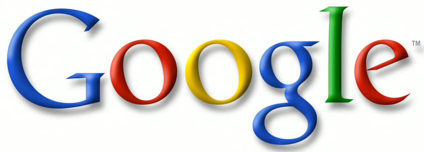
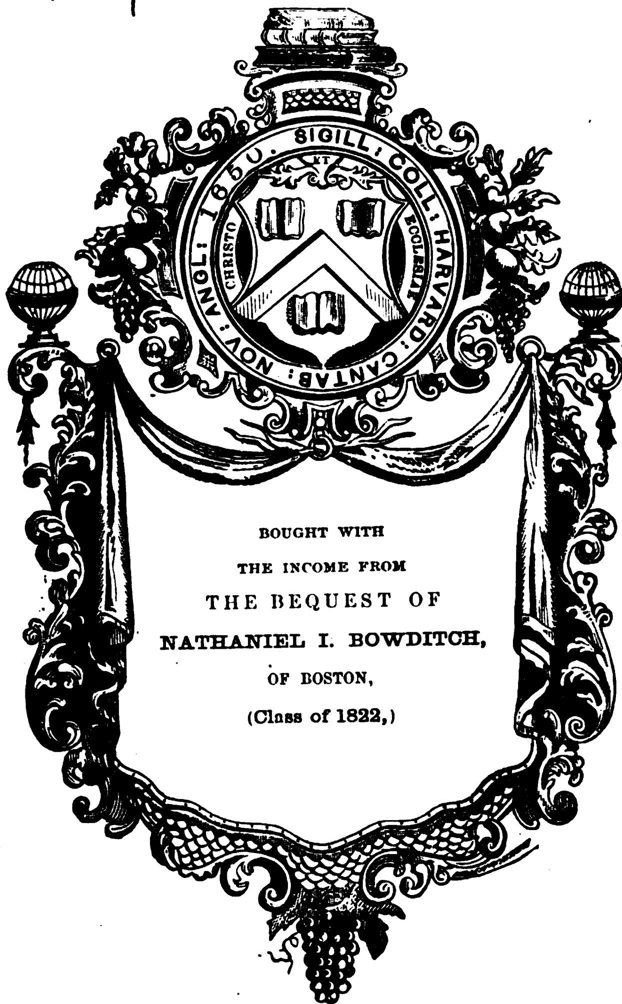
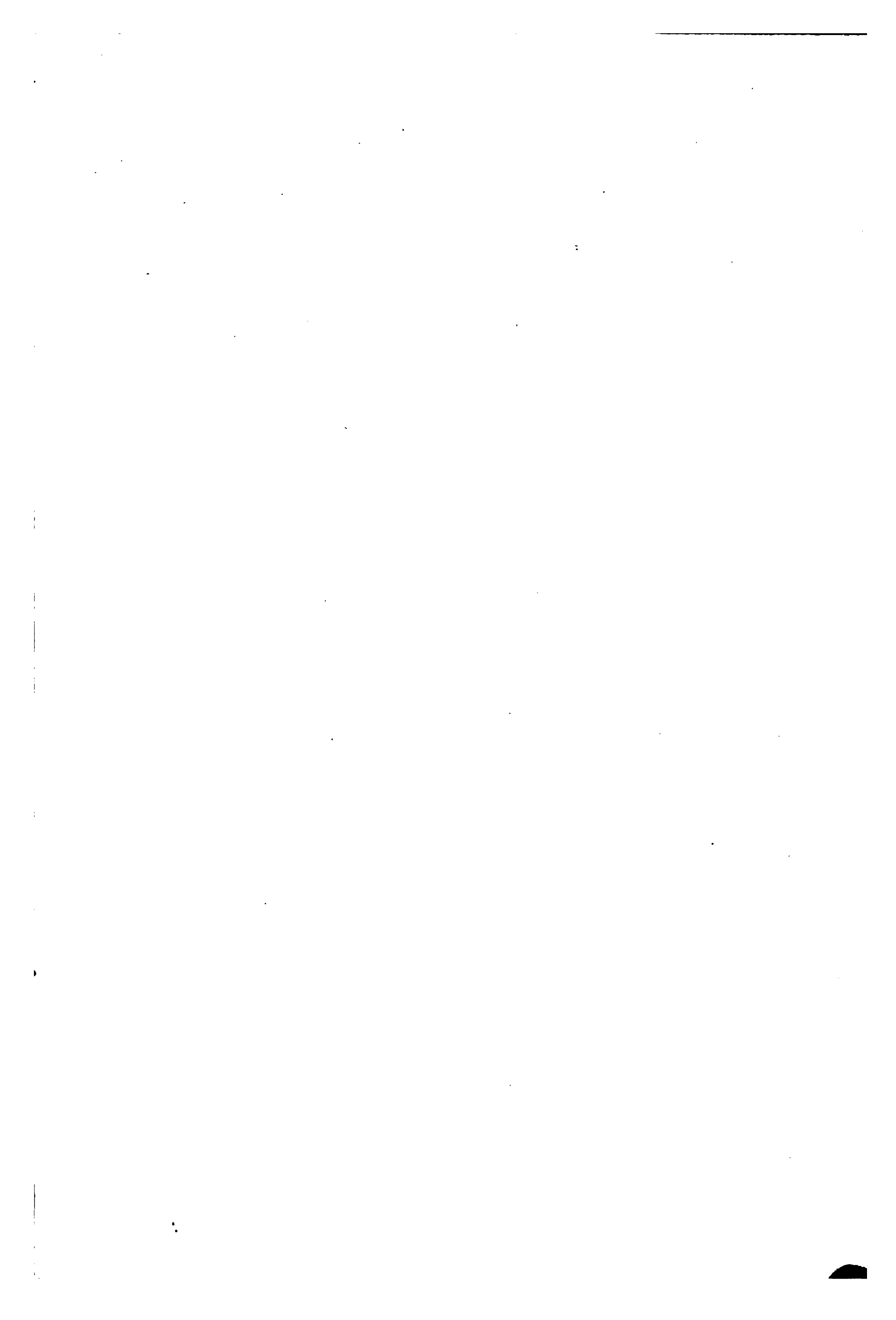

Google


SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE



Grundprobleme der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate

von

JOSEF KOZÁK
k. u. k. Oberst im Techn. Militärkomitee

Zweiter Band, erster Teil

Mit 36 Figuren im Texte

Theorie des Schießwesens auf Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Fehlertheorie I. Teil

WIEN und LEIPZIG 1908 Kaiserl. und königl. Hof-Buchdruckerei und Hof-Verlags-Buchhandlung CARL FROMME

Theorie des Schießwesens auf Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Fehlertheorie

von

JOSEF KOZÁK
k. u. k. Oberst im Techn. Militärkomitee

ERSTER TEIL

Mit 36 Figuren im Texte



WIEN und LEIPZIG 1908 Kaiserl. und königl. Hof-Buchdruckerei und Hof-Verlags-Buchhandlung CARL FROMME



Verlags-Archiv Nr. 2022

Seiner Exzellenz dem Herrn k. und k. Feldmarschalleutnant

Nikolaus Ritter von Wuich

Ritter des Ordens der Eisernen Krone 2. Klasse,
Besitzer des Militärverdienstkreuzes etc.

Präsidenten des k. und k. Technischen Militärkomitees

ehrfurchtsvollst und dankbarst gewidmet

vom Verfasser

Vorwort.

Motto: Rationelle Schießregeln können nur gleichmäßig auf theoretischer und praktischer Grundlage aufgebaut sein.

Die zahlreichen Besprechungen des ersten Bandes heben die leichtverständliche und gründliche Darstellungsweise hervor, so daß auch der nicht mit tieferen mathematischen Kenntnissen ausgestattete Leser imstande ist, allen Entwicklungen zu folgen. Dies war ja auch das Ziel, das ich mir bei der Bearbeitung der eigenartigen, nicht ganz leichten Materie gesteckt habe.

Die erwähnten günstigen Urteile, sowie die an mich ergangenen Aufforderungen bewogen mich, in den zweiten Band auch noch die „Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung", ferner das „Theorem von Jakob Bernoulli", „die Umkehrung dieses Theorems", endlich „die Wahrscheinlichkeit auf Grund der Erfahrung" aufzunehmen.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung ist gegenwärtig zu einer unentbehrlichen und wichtigen Hilfswissenschaft der Schießtheorie geworden.

Bei der Anlage des Werkes war die Aufnahme der Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung überhaupt nicht beabsichtigt; das Theorem von Bernoulli u. s. w. sollten dagegen nur an jener Stelle Aufnahme finden, wo es zur Förderung des Verständnisses notwendig erschien.

Die eingangs erwähnten Gründe jedoch veranlaßten mich, von diesem Plane abzugehen und die genannten Teile der Theorie als eigene Abschnitte gesondert im zweiten Bande zu behandeln, obgleich dieselben in ihrer jetzigen Fassung in den ersten Band gehören würden.

Die dermalige Fassung bietet auch den nicht unwesentlichen Vorteil, daß derjenige Leser, welchen die Schießtheorie nicht interessiert, darin die Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Zusammenhange mit der Ausgleichungsrechnung vorfindet. Bei der Behandlung der Probleme der Schießlehre wurden die betreffenden Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, soweit als es die jeweilige Schießaufgabe erfordert, kurz wiederholt oder es wurde auf die bezüglichen Stellen des theoretischen Teiles hingewiesen. Hiedurch war es wohl unvermeidlich, daß Wiederholungen auftreten, was aber anderseits dem Verständnisse zu gute kommen dürfte.

Es sei ausdrücklich bemerkt, daß von der Theorie nur das aufgenommen wurde, was für die gründliche und vollständige Behandlung der Probleme des Schießwesens als unumgänglich notwendig erachtet worden ist.

Während der erste Teil des zweiten Bandes sozusagen nur vorbereitende Aufgaben für die eigentliche Theorie des Einschießens löst und die empirischen Fehlergesetze behandelt, sind in den das Schießwesen berührenden Abschnitten des zweiten Teiles dieses Bandes das Fehlergesetz in der Ebene und im Raume und die theoretischen Grundlagen für die Beurteilung bestehender und neu aufzustellender Schießregeln festgelegt.

In diesem Bande wird auch das Einschießen bei Anwendung des Distanzmessers, sowie das Schießen aus Küsten- und Schiffsgeschützen hinreichend erläutert.

Das Zustandekommen dieses auf so breiter Basis angelegten Werkes habe ich nur der überaus reichlichen materiellen Unterstützung des k. und k. Reichskriegsministeriums zu verdanken, welches nie seine Hilfe versagt, wo es sich um die Förderung militärwissenschaftlicher Arbeiten handelt; dasselbe hat auch mir bei der Verfassung dieses Bandes jede, in aller Hinsicht schrankenlose Freiheit gewährt.

Um das in mich gesetzte Vertrauen auch zu rechtfertigen, habe ich mich dieser Arbeit in redlicher Bemühung, mit voller Hingebung und großer Freude gewidmet. Ja, mit großer Freude, denn durch

die mir gebotene Möglichkeit der Schaffung des vorliegenden Werkes ging ja auch mein langgehegter Herzenswunsch in Erfüllung.

Meine Absicht war, den Waffengefährten ein leichtverständliches Werk zu übergeben, welches in allen auf das Schießen Bezug habenden Fragen erschöpfende Auskünfte entnehmen läßt und Anhaltspunkte zur Ausgestaltung der Schießtechnik bietet. Es wäre mein schönster Lohn, wenn ich die Anerkennung fände, daß mir dies gelungen ist.

Mit tiefer Dankbarkeit gedenke ich an dieser Stelle Sr. Exzellenz des Feldmarschalleutnants Nikolaus Ritter von Wuich und des Herrn Hofrates Professors Emanuel Czuber, welche meine Arbeit so reichlich unterstützt und wohlwollend gefördert haben. Der behandelte Stoff brachte es mit sich, daß ich auch in dem zweiten Bande von ihren ausgezeichneten Werken, welche anerkanntermaßen sich eines Weltrufes erfreuen, ausgiebigen Gebrauch machte.

In kritischen, für die Art und Weise der Bearbeitung des Stoffes wichtigen Fällen halfen mir im theoretischen Teile das scharfsinnige Urteil Czubers, in der Schießtheorie das maßgebende Urteil des hervorragenden Ballistikers Wuich überzeugend über so manche Klippen hinweg.

Diese beiden Herren, welche meine Arbeit schon während der Drucklegung einer wissenschaftlichen Kritik zu unterziehen die Güte hatten, äußern sich darüber in besonders mich auszeichnenden Worten.

Wuich sagt:

„Dank der Munifizenz des k. und k. Reichskriegsministeriums und dem durch tiefe Sachkenntnis unterstützten bewunderungswerten Sammelfleiß hat Oberst Kozák — einer meiner vorzüglichsten Schüler — ein Werk geschaffen, das die Theorie der Wahrscheinlichkeit und deren Anwendungen auf dem Gebiete des Schießwesens auf breitester Grundlage behandelt und eine nie versagende Fundgrube für diesen wichtigen Zweig des artilleristischen Wissens bildet.

Es sei hiebei speziell hervorgehoben, daß den besonderen Verhältnissen der Feuertätigkeit der Küstengeschütze in umfassender Weise Rechnung getragen wurde.

Ein glücklicher Gedanke war es, die mannigfachen Wahrscheinlichkeitsprobleme mit den darauf bezüglichen mathematischen Theorien innig zu verweben, denn bei ihrem naturgemäß abstrakten Charakter greift die Theorie der Wahrscheinlichkeit in die feinsten Verästelungen der höheren Analysis ein, die oft von selbst geschulten Mathematikern nicht beherrscht werden und die eine mühevolle Suche auf dem reichverzweigten Gebiete der mathematischen Literatur bedingen würden.

Dieser Mühe hat Oberst Kozák den sonst leicht mißmutig werdenden Leser enthoben, indem er die oft schwierigen Probleme der Analysis an den passenden Stellen in schmackhafter Form einflocht.

Dafür wird ihm jeder Leser Dank wissen. Möge das Werk den verdienten Weg gehen und fleißig gelesen werden, denn es behandelt einen artilleristischen Wissenszweig, für den ganz besonders das Wahrwort und auch Mahnwort gilt:

Der rationellen Praxis Leitstern muß die Theorie sein.“

Czuber schreibt:

„Mit großem Interesse verfolge ich seit einer Reihe von Jahren die Bemühungen des Herrn Obersten J. Kozák, für die Theorie des Schießwesens eine Basis zu schaffen aus den Lehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der von ihr abzweigenden Fehlertheorie. Es handelt sich um ein wichtiges und schwieriges Anwendungsgebiet, für das sich in der deutschen sowohl als in fremden Literaturen wertvolle Ansätze finden und auf dem sich die österreichische Artillerie hervorragende Verdienste erworben hat.

Das Werk Kozáks stellt sich die Aufgabe, den ganzen theoretischen Apparat in Verbindung mit den praktischen Problemen darzubieten und auf diese Weise dem Bedürfnis jener Kreise möglichst entgegen zu kommen, für die das Buch in erster Linie bestimmt ist. Gerade dadurch, daß der Verfasser die Bestrebungen, die Denk-, Arbeits- und Ausdrucksweise seiner Leser genau kennt, war er imstande, alles in solcher Form zu bieten, daß dem Interesse und Verständnis vorgearbeitet wird; hiezu zählt auch die Begleitung des Textes durch zahlreiche Beispiele, Tabellen und instruktive Figuren.

Es ist lebhaft zu wünschen, daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung, die sich immer neue Wissensgebiete erobert, auch im artilleristischen Schießwesen zu jener Be-

deutung gelange, die ihr dort gebührt. Kozáks Werk wird sicherlich in hohem Maße dazu beitragen."

Auch muß ich dankbarst des Herrn Obersten Benedikt Schöffler erwähnen, dessen sehr beachtenswerte Aufsätze über „Gesetz der zufälligen Abweichungen. Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Anwendung auf die Theorie des Schießens" mir einen reichlichen Behelf für meine Arbeit boten (Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens, 6. Heft Jahrgang 1900, 12. Heft Jahrgang 1901, 2. und 5. Heft Jahrgang 1902).

Ich kann nicht das Interesse unerwähnt lassen, welches dem Entstehen des Werkes bei der Durchsicht des Manuskriptes und der Druckrevision besonders von den Herren Artilleriehauptleuten Alex. Exner, Leopold Wltavský, Florian Cwik, sowie den Herren Artillerieoberleutnants Edmund Röggla und Ernst Müller entgegengebracht wurde. Vom Herrn Oberleutnant Röggla und meinem Sohne, dem Herrn Artillerieleutnant Hugo Kozák, wurde ich beim Entwurfe der mitunter schwierigen Figuren in ausgiebiger Weise unterstützt. Allen den vorgenannten Offizieren spreche ich für ihre Mühewaltung bei dieser Gelegenheit meinen aufrichtigsten Dank aus.

Ebenso dankbar muß ich die Bereitwilligkeit der k. u. k. Hof-Buchdruckerei und Hof-Verlags-Buchhandlung Carl Fromme anerkennen, mit welcher sie allen meinen Wünschen in freundlichster Weise auch bei der Drucklegung des zweiten Bandes entgegengekommen ist.

Die benützten Quellen wurden an entsprechender Stelle im Texte angeführt. Überdies werden dieselben im zweiten Teile dieses Bandes übersichtlich zusammengestellt werden.

Wien, Februar 1908.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

I. Abschnitt.

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Seite

1. Definition der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Direkte Methode der Wahrscheinlichkeitsbestimmung 1
2. Indirekte Methoden der Wahrscheinlichkeitsbestimmung 4
   A) Vollständige oder totale Wahrscheinlichkeit 5
   B) Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit 6
3. Bestimmung der vollständigen Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses aus seiner Wahrscheinlichkeit bei verschiedenen Hypothesen 11
4. Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Kombination zweier entgegengesetzter Ereignisse einer Reihe von Versuchen. Die Binomialformel 14
5. Beispiele 15
6. Bemerkungen über Wahrscheinlichkeitsbestimmungen 19
7. Formeln der Kombinatorik 21
8. Die Formel von Stirling 25
9. Herleitung der Formel von Wallis 32

II. Abschnitt.

Theorem von Jakob Bernoulli. Umkehrung dieses Theorems.

1. Von der Gesetzmäßigkeit in der Wiederholung eines Ereignisses und der Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen desselben, sobald die Zahl der Versuche stark anwächst 35
2. Entwicklung der Fragestellung für das Theorem von Bernoulli 36
3. Beispiele 38
4. Die wahrscheinlichste Kombination der entgegengesetzten Ereignisse E und F bei s-maliger Wiederholung des Versuches 40
5. Näherungsweise Darstellung des größten Gliedes 43
6. Näherungsweise Darstellung eines Gliedes, welches sich von dem maximalen Gliede um eine gegebene Anzahl Stellen entfernt 46
7. Wahrscheinlichkeit, daß die Abweichung innerhalb gegebener Grenzen verbleibe 49

Seite
8. Formulierung des Bernoullischen Theorems 53
9. Ausführung der Rechnungen 56
10. Wahrscheinliche Abweichung 58
11. Beispiele 60
12. Umkehrung des Theorems von Jakob Bernoulli 63

III. Abschnitt.

Wahrscheinlichkeit auf Grund der Erfahrung.

A. Wahrscheinlichkeit der möglichen Ursachen eines beobachteten Ereignisses . 67
1. Definition der Wahrscheinlichkeit a priori und der Wahrscheinlichkeit a posteriori 67
2. Ursachen oder Entstehungsmodi eines beobachteten Ereignisses. Annahmen oder Hypothesen über die einem beobachteten Ereignisse zugrunde liegenden Umstände 67
3. Theorem von Bayes für den Fall, daß die Ursachen a priori gleichmöglich sind 68
4. Beispiele 70
5. Theorem von Bayes für den Fall, daß die Ursachen a priori verschiedene Wahrscheinlichkeiten besitzen 72
6. Beispiele. Bemerkungen über die Wahrscheinlichkeiten von Ursachen . . . 76
7. Theorem von Bayes bei unbegrenzter Menge möglicher Ursachen 80
8. Ursachen, welche den Eintritt eines Ereignisses begünstigen 83
9. Die wahrscheinlichste Hypothese 85
10. Bestimmung der Wahrscheinlichkeit P dafür, daß die Wahrscheinlichkeit p für das Eintreffen des Ereignisses e zwischen den Grenzen $\frac{m}{s} \mp \delta$ liegt. Umkehrung des Theorems von Jakob Bernoulli 87
A) Bestimmung des Ausdruckes für die Wahrscheinlichkeit P 87
B) Berechnung des Integrals $J_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$, worin m und n ganze positive Zahlen bedeuten 87
C) Näherungsweise Darstellung des Integrals $\int_{\frac{m}{s}-\delta}^{\frac{m}{s}+\delta} x^m (1-x)^n \, dx$ durch ein anderes Integral 89
D) Berechnung von P. Umkehrung des Theorems von Jakob Bernoulli 89
E) Wahrscheinliche Grenzen der unbekannten Wahrscheinlichkeit p des Ereignisses e 91
F) Präzision der gewonnenen Bestimmung $\frac{m}{s}$ für p 92
B. Wahrscheinlichkeit künftiger Ereignisse auf Grund von Beobachtungen . . 93
11. Aposteriorische Wahrscheinlichkeit eines zu gewärtigenden Ereignisses . . 93
12. Beispiele 100
13. Hauptaufgabe über die aposteriorische Wahrscheinlichkeit 105
Spezielle Fälle 106

IV. Abschnitt.

Interpolationsmethoden.

Seite

1. Definition einer Interpolationsformel. Verschiedene Arten derselben. Hauptsächlichste Anwendungen . . . 112
   A. Differenz- und Summenreihen . . . 115
2. Erklärungen über die Differenzreihen . . . 115
3. Jede Reihe ist die summatorische Reihe ihrer Differenzreihe . . . 117
4. Ausdruck für das erste und $(k+1)$-te Glied der n-ten Differenzreihe . . . 117
5. Ausdruck für das $(n+1)$-te Glied der Hauptreihe . . . 119
6. Ausdruck für das summatorische Glied einer arithmetischen Reihe k-ter Ordnung . . . 120
7. Allgemeiner Ausdruck für u_{n-1} und $\sum u_n$ bei einer arithmetischen Reihe k-ter Ordnung . . . 122
8. Bestimmung der Summe

$$\sum_1^n x^m = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots\cdots + n^m,$$

   wobei m eine positive ganze Zahl ist . . . 125
   B. Interpolation der Reihen und Interpolation der Tabellen . . . 128
9. Interpolation (Einschalten) der arithmetischen Reihen . . . 128
10. Verallgemeinerung der für arithmetische Reihen erhaltenen Interpolationsformel . . . 133
11. Interpolationsformel von Langrange . . . 137
12. Interpolationsformel von Newton . . . 141
    Spezieller Fall: Interpolation durch äquidistante Intervalle . . . 144
    C. Prinzip der Interpolationsmethode auf Grund der Methode der kleinsten Quadrate . . . 146
13. Aufgabe der Interpolation im weiteren Sinne . . . 146
14. Prinzip der Methode der kleinsten Quadrate . . . 149
15. Bestimmung der wahrscheinlichsten Werte der Parameter einer durch eine Potenzreihe dargestellten empirischen Funktion . . . 151
16. Näherungsweise Darstellung in der Ballistik vorkommender Funktionen einer Veränderlichen . . . 155
17. Analytische Lösung des ballistischen Problems, wenn die Reihe der Abgangswinkel gegeben ist . . . 157
    a) Aufstellung der Beziehung für die Reihe der Abgangswinkel beziehungsweise für die Reihe der Elevationswinkel . . . 158
    b) Berechnung der Ordinaten (Aufstellung der Flugbahngleichung) . . 160
    c) Berechnung des Tangentenwinkels . . . 161
    d) Berechnung der Geschwindigkeit in einem beliebigen Bahnpunkte . 162
    e) Berechnung der Flugzeit . . . 162
    f) Berechnung des Luftwiderstandes . . . 163
18. Bestimmung des Erhebungswinkels, des ballistischen Koeffizienten und der Anfangsgeschwindigkeit auf Grund von Punktbedingungen . . . 163
    D. Interpolationsformeln abgeleitet auf Grund der Methode der kleinsten Quadrate . . . 167
19. Allgemeine Bemerkungen . . . 167
20. Aufstellung der Normalgleichungen . . . 170

Seite

21. Auflösung der Normalgleichungen nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten 171
    a) Bestimmung der Parameter k 171
    b) Transformation der für die Parameter k gewonnenen Beziehungen . 174
22. Kriterium für die erforderliche Anzahl Glieder in der Interpolationsformel 175
23. Zusammenstellung der Rechnungsvorgänge für die Berechnung der einzelnen Glieder der Interpolationsformel 178
24. Allgemeines Prinzip zur Vereinfachung der gefundenen Interpolationsformel. Definition der Hilfsgrößen q_1, q_2 und p_2 179
25. Beziehungen für die Bestimmung der weiteren, von Tchebycheff eingeführten Hilfsgrößen p und q 181
26. Zusammenstellung der Rechnungsvorgänge für die Berechnung der einzelnen Glieder der Interpotationsformel nach dem Verfahren von Tchebycheff 184
27. Zusammenstellung der Rechnungsvorgänge für die Interpolationsformel von Tchebycheff, wenn Funktionswerte bekannt sind, welche äquidistanten Werten der unabhängigen Variabeln entsprechen 186
    Beispiel 190
28. Allgemeine Anhaltspunkte für die Durchführung von Rechnungen, wenn die Reihe der Abgangswinkel gegeben ist 196

V. Abschnitt.

Streuung und deren Ursachen.

A. Streuung der Flugbahnen 198
1. Streuung der Treffpunkte im einfachen Trefferbilde 198
2. Mittlerer Treffpunkt einer Schußserie und mittlerer Treffpunkt. Streuungsfläche. Trefferbildachsen 201
3. Streuung der mittleren Treffpunkte. Zusammengesetzter mittlerer Treffpunkt 203
4. Bestimmung der Lage der einzelnen Treffpunkte und des mittleren Treffpunktes einer Schußserie 206
5. Gruppierungsgesetze 212
6. Die Summe der Quadrate der scheinbaren Abweichungen von irgend einer durch den berechneten mittleren Treffpunkt gezogenen Geraden ist ein Minimum 213
7. Bestimmung der Summe der Quadrate der scheinbaren Abweichungen . . 214
8. Bestimmung der scheinbaren Abweichungen in Bezug auf eine beliebige, durch den mittleren Treffpunkt gezogene Gerade. Richtungen der Trefferbildachsen 216
9. Beobachtung beim Schießen von Aufschlaggeschoßen. Einschießlinien . . 220
B Streuung der Sprengpunkte 222
10. Streuungserscheinungen bei Tempier- oder Zeitzündergeschoßen 222
11. Sprengintervall oder Sprengweite, Sprenghöhe 225
12. Bestimmung der Lage der einzelnen Sprengpunkte und des mittleren Sprengpunktes einer Schußserie 225
13. Beobachtung beim Schießen von Tempier- oder Zeitzündergeschoßen . . . 227

VI. Abschnitt.

Maße der Genauigkeit. Prozentzahl sowie Anzahl der Treffer in symmetrischen Parallelstreifen. Theoretisches Trefferbild.

Seite

1. Wahrscheinlichkeit für das Treffen von symmetrischen Parallelstreifen mit einem Schusse . . . 229
2. Maß der Schußpräzision oder Maß der Schußgenauigkeit . . . 231
3. Einführung der p-prozentigen Streuung zur Beurteilung der Schußgenauigkeit 234
4. Durchschnittliche Abweichung . . . 238
5. Mittlere Abweichung . . . 240
6. Ermittlung der zu erwartenden Prozentzahl beziehungsweise der Anzahl Treffer in symmetrischen Parallelstreifen . . . 243
7. Beispiele . . . 245
8. Verwandlung der Tabellen der Wahrscheinlichkeitsfaktoren in andere, bei welchen die Prozentzahl das Argument bildet . . . 247
9. Wahrscheinlichkeit, mit einem Schusse asymmetrische Parallelstreifen zu treffen; Prozentzahl (Anzahl) Treffer in denselben . . . 248
   a) der mittlere Treffpunkt befindet sich in einer Begrenzungslinie des Parallelstreifens . . . 248
   b) der mittlere Treffpunkt liegt innerhalb des Parallelstreifens . . . 249
   c) der mittlere Treffpunkt liegt außerhalb des Parallelstreifens . . . 249
10. Unvermeidlicher und vermeidlicher Trefferverlust . . . 250
11. Darstellung des theoretischen Trefferbildes . . . 252
12. Lösung von Aufgaben mit dem theoretischen Trefferbilde . . . 255
13. Bestimmung der auf einer Seite einer Einschießlinie zu erwartenden Prozentzahl (Anzahl) Treffer bei beliebiger Lage des mittleren Treffpunktes. Wahrscheinlichkeit eines Kurz- oder Weitschusses . . . 258
14. Vergleich der Schießergebnisse mit der Theorie . . . 268
15. Allgemeine Bemerkung. Beispiele . . . 277
16. Wahrscheinlichste Zielentfernung, wenn die Beobachtung sich auf die Unterscheidung von Kurz- und Weitschüssen beschränkt . . . 281
17. Simpsons Regel . . . 285
18. Wahrscheinlichkeit des Eintreffens einer bestimmten Kombination von Kurz- und Weitschüssen beim Gruppenschießen . . . 287
19. Von den falschen Beobachtungen und ihrer Berücksichtigung bei der Ermittlung der Wahrscheinlichkeit eines Kurz- oder Weitschusses . . . 289
20. Wahrscheinlichster Abstand des mittleren Treffpunktes einer Schußserie von der Einschießlinie, sobald die Anzahl der auf einer Seite der Einschießlinie liegenden Treffer bekannt ist . . . 292
21. Ermittlung der Präzisionswerte für eine beliebige Achse aus den Präzisionswerten für die Trefferbildachsen des Systems . . . 294
22. Fußpunktkurven. Fußpunktkurve der Ellipse in Bezug auf ihren Mittelpunkt als Pol . . . 297
   a) Definition der Fußpunktkurve oder Pedale . . . 297
   b) Allgemeine Gleichung der Fußpunktkurven . . . 297
   c) Richtung der Tangente der Fußpunktkurve . . . 299
   d) Gleichung der Fußpunktkurve der Ellipse in Polarkoordinaten und rechtwinkeligen Koordinaten, wenn der Mittelpunkt der Ellipse als Pol angenommen wird . . . 300

Seite

e) Normalform der Gleichung einer Geraden 301
f) Punktweise Konstruktion der Fußpunktkurve der Ellipse, wenn der Mittelpunkt derselben als Pol angenommen wird 302
23. Reduktion der Präzisionswerte 303
A) Aus den Präzisionswerten des im Mündungshorizonte liegenden, also horizontalen Trefferbildes die Präzisionswerte des zugehörigen vertikalen Trefferbildes oder umgekehrt abzuleiten; beide Trefferbilder haben also eine Flugbahngarbe gemeinsam 303
B) Aus den Präzisionswerten des im Mündungshorizonte liegenden Trefferbildes die Präzisionswerte des zugehörigen, in einer anderen horizontalen Ebene, etwa am Meeresspiegel liegenden Trefferbildes zu ermitteln 305
24. Streuungsfehler des Geschützes 307
A) Genauigkeit der Höhenrichtung bei Benützung des Visierfernrohres, des Geschützaufsatzes, des Höhenrichtzeigers oder des Quadranten . 308
B) Bestimmung des 50-prozentigen oder wahrscheinlichen Richtfehlers der Höhenrichtung im Distanzmaße, ferner der 50-prozentigen oder wahrscheinlichen Längenabweichung im Mündungshorizonte und am Meeresspiegel 314
C) Genauigkeit der Seitenrichtung bei Benützung des Aufsatzes, eines Zielfernrohres oder einer Seitenrichtskala (Horizontalskala). Bestimmung des 50-prozentigen oder wahrscheinlichen Richtfehlers der Seitenrichtung, ferner der 50-prozentigen oder wahrscheinlichen Breitenabweichung 315
25. Tageselemente und Tagesrelation 316
A) Tageselemente 316
B) Tagesrelation 317
26. Distanzberechnung mit Rücksicht auf Erdkrümmung und Refraktion . . . 322
27. Beurteilung des automatischen Richtverfahrens (der automatischen Aufsätze) der Küstengeschütze 324
28. Wahrscheinlichkeit für das Treffen eines in Ruhe befindlichen Zieles (Kriegsschiffes), wenn die Entfernung desselben mit einem Distanzmesser gemessen wurde 331

VII. Abschnitt.

Empirische Fehlergesetze.

1. Allgemeine Bemerkung 336
2. Das Fehlergesetz von Simpson 337
a) Aufstellung der Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktion 337
b) Bestimmung des Parameters β durch α 338
c) Wahrscheinlichkeit, daß der bei einer Beobachtung begangene Fehler, absolut genommen, kleiner ist als eine gegebene Größe a 338
d) Bestimmung des 50-prozentigen oder wahrscheinlichen Fehlers a_{50} . 339
e) Bestimmung des Durchschnittsfehlers ϑ 340
f) Bestimmung des mittleren Fehlers μ 340
3. Ein aus dem Gaußschen Fehlergesetz abgeleitetes empirisches Fehlergesetz 340
a) Aufstellung der Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktion 340
b) Bestimmung des Parameters c durch α 340

Seite

c) Wahrscheinlichkeit, daß der bei einer Beobachtung begangene Fehler, absolut genommen, kleiner ist als eine gegebene Größe a 341
d) Bestimmung des 50-prozentigen oder wahrscheinlichen Fehlers a_{50} . 341
e) Bestimmung des Durchschnittsfehlers ϑ 342
f) Bestimmung des mittleren Fehlers μ 342
4. Beurteilung der Brauchbarkeit des Simpsonschen und des parabolischen Fehlergesetzes 342
5. Wahrscheinlichkeit, daß der bei einer Beobachtung begangene Fehler, absolut genommen, kleiner ist als eine gegebene Größe a, ausgedrückt als Funktion von $\frac{a}{\vartheta}$ 343
6. Fehlerwahrscheinlichkeitskurven mit Berührungsanschluß 345
7. Fehlerwahrscheinlichkeitskurve, welche die Fehlerachse nach der ersten Ordnung berührt 345
a) Bestimmung der Parameter a_0, a_2, a_4 und Aufstellung der Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktion 345
b) Wahrscheinlichkeit, daß der bei einer Beobachtung begangene Fehler, absolut genommen, kleiner ist als eine gegebene Größe a 347
c) Bestimmung des 50-prozentigen oder wahrscheinlichen Fehlers a_{50} . 347
d) Bestimmung des Durchschnittsfehlers ϑ 347
e) Bestimmung des mittleren Fehlers μ 347
f) Bestimmung der Wendepunkte der Fehlerwahrscheinlichkeitskurve . 348
8. Fehlerwahrscheinlichkeitskurve, welche die Fehlerachse nach der zweiten Ordnung berührt 348
a) Bestimmung der Parameter a_0, a_2, a_4, a_6 und Aufstellung der Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktion 348
b) Wahrscheinlichkeit, daß der bei einer Beobachtung begangene Fehler, absolut genommen, kleiner ist als eine gegebene Größe a 350
c) Bestimmung des 50-prozentigen oder wahrscheinlichen Fehlers a_{50} . 350
d) Bestimmung des Durchschnittsfehlers ϑ 350
e) Bestimmung des mittleren Fehlers μ 350
f) Bestimmung der Wendepunkte der Fehlerwahrscheinlichkeitskurve . 351
9. Vergleichung der Fehlerwahrscheinlichkeitskurven mit Berührungsanschluß 351
10. Anführung weiterer empirischer Fehlergesetze 352
11. Moivres Problem 353
a) Erste Art der Bestimmung des Ausdruckes für die zu suchende Wahrscheinlichkeit 354
b) Zweite Art der Bestimmung des Ausdruckes für die zu suchende Wahrscheinlichkeit 355
c) Beispiele 358
12. Anwendung des Problems von Moivre auf den speziellen Fall $s = 3$ und $n = 6$ 358
A) Wahrscheinlichkeit, mit drei Würfeln eine gegebene Summe zu werfen 358
B) Beziehung der Wahrscheinlichkeiten P_z zum theoretischen Trefferbilde 361
C) Anwendung von Würfeln zur Bestimmung der wahrscheinlichen Abweichungen beim Artillerieschießspiele 362

Seite

13. **Anwendung des Problems von Moivre auf den speziellen Fall $s = 3$ und $n = 28$** 366

A) **Eine Urne enthält 28 mit 1, 2, 3, ... , 28 bezeichnete Kugeln. Man führt nacheinander 3 Ziehungen aus und legt jedesmal die gezogene Kugel, nachdem man ihre Nummer notiert hat, zurück. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Summe der erschienenen Nummern z sei?** 366

B) **Berechnung der Tabelle der Wahrscheinlichkeitsfaktoren** 368

C) **Summatorisches Glied für $\sum_{3}^{z} i\, g_i$, wobei z irgend einen der Werte 3 bis einschließlich 43 annehmen kann** 371

14. **Figurierte Zahlenreihen** 373

a) **Entstehung der figurierten Zahlenreihen** 373

b) **Die Polygonalzahlen oder figurierte Zahlen der ersten Ordnung** . . 374

c) **Die Pyramidalzahlen oder figurierte Zahlen der zweiten Ordnung** . 375

d) **Geometrische Darstellung der Polygonalzahlen oder m-Eckzahlen** . . 376

15. **Ableitung von Fehlergesetzen bei der Annahme einer endlichen Anzahl von unabhängigen Elementarursachen** 377

a) **Allgemeine Bemerkungen** 377

b) **Gesetz der zufälligen Abweichungen bei der Annahme einer Elementarursache** 379

c) **Gesetz der zufälligen Abweichungen bei der Annahme von zwei unabhängigen Elementarursachen** 381

d) **Gesetz der zufälligen Abweichungen bei der Annahme von drei unabhängigen Elementarursachen** 388

e) **Gesetz der zufälligen Abweichungen bei der Annahme von vier und mehr unabhängigen Elementarursachen** 395

Tabellen.

Seite

Tabelle I. Werte der Funktion $\Phi(a\,h) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{a\,h} e^{-t^2}dt$ III

Tabelle II. Werte der Funktion $\Phi\left(\varrho\,\frac{a}{r}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\varrho\frac{a}{r}} e^{-t^2}\,dt$, geordnet nach dem Argumente $\frac{a}{r}$ VII

Tabelle III. Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers zwischen den Grenzen Null und dem k-fachen wahrscheinlichen Fehler . . . XI

Tabelle IV. Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers zwischen den Grenzen Null und dem k-fachen mittleren Fehler XII

Tabelle V. Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers zwischen den Grenzen Null und dem k-fachen durchschnittlichen Fehler . . XIII

Tabelle VI. Werte der Funktionen

$$F(\zeta) = \frac{\varrho}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\zeta} e^{-\varrho^2\zeta^2}\,d\zeta,$$

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\varrho^2}\,\frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)} = \frac{1}{2\varrho\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-\varrho^2\zeta^2}}{F(\zeta)} \text{ und}$$

$$f'(\zeta) = -2\varrho^2 f(\zeta)\left\{\zeta + f(\zeta)\right\}$$

für die Argumentenwerte $-5 \leq -\zeta < 0 < +\zeta < +5$ XIV

Tabelle VII. Quadrate der Zahlen von 10 bis 99 XV

Tabelle VIII. Quadratwurzeln der Zahlen von 0·1 bis 9·9 XVI

Tabelle IX. Quadratwurzeln der Zahlen von 10 bis 100 XVI

Theorie des Schießwesens
◻ auf Grundlage der ◻
Wahrscheinlichkeitsrechnung
◻ und Fehlertheorie ◻
Zweiter Band, erster Teil

I. Abschnitt.

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1. Definition der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Direkte Methode der Wahrscheinlichkeitsbestimmung.

In der Schießtheorie wird von der Wahrscheinlichkeitsrechnung vielfach Gebrauch gemacht. Es erscheint deshalb gerechtfertigt, die wichtigsten Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu erläutern und analytisch zu entwickeln sowie zum besseren Verständnisse derselben einige typische Beispiele beizufügen.

Sind unter mehreren gleich möglichen Fällen einige dem Eintreffen eines bestimmten Ereignisses günstig, die übrigen dagegen ungünstig, so heißt bekanntlich das Verhältnis der Anzahl jener Fälle, welche dem Eintreffen des Ereignisses günstig sind, zu der Anzahl aller gleich möglichen Fälle die mathematische Wahrscheinlichkeit*) für das Eintreffen dieses Ereignisses.

Bezeichnet also g die Anzahl der einem Ereignisse E günstigen und m die Anzahl aller möglichen Fälle, so ist die mathematische Wahrscheinlichkeit p für das Eintreffen jenes Ereignisses

$$1)\qquad p = \frac{g}{m}.$$

Die Methode, welche in dieser Definition ihren Ausdruck findet, bezeichnet man als eine Wahrscheinlichkeitsbestimmung a priori. Mitunter wird diese Bezeichnung auch auf die Wahrscheinlichkeit selbst übertragen und dann von einer Wahrscheinlichkeit

*) Die auf diese Weise zahlenmäßig bestimmte Wahrscheinlichkeit wird zum Unterschiede von dem allgemeinen Begriffe der Wahrscheinlichkeit — als Gegensatz der Notwendigkeit — mathematische Wahrscheinlichkeit genannt.

a priori oder von einer apriorischen Wahrscheinlichkeit gesprochen.

Das Zahlengebiet, auf welchem sich in solcher Weise bestimmte Wahrscheinlichkeiten bewegen, ist das der positiven echten Brüche, also der rationalen Zahlen aus dem Intervall (0,1) mit Ausschluß der Grenzen; denn diese Grenzen charakterisieren eine Notwendigkeit oder Gewißheit; die untere, aus $g = 0$ entspringend, drückt die Notwendigkeit des Nichteintreffens, die obere, aus $g = m$ hervorgehend, die Notwendigkeit des Eintreffens von E aus.

Die $g' = m - g$ Fälle, welche nach Ausscheidung der günstigen verbleiben, nennt man in Bezug auf das Ereignis E ungünstige Fälle und die Verwirklichung eines derselben ein dem Ereignis E entgegengesetztes Ereignis F (gleichbedeutend mit dem Nichteintreffen von E). Seine Wahrscheinlichkeit q (mitunter die Gegenwahrscheinlichkeit von p genannt) ist durch den Bruch $\frac{g'}{m}$ gegeben, also ist:

$$q' = \frac{g'}{m} = \frac{m-g}{m} = 1 - \frac{g}{m} = 1 - p,$$

woraus

$$2) \qquad p + q = 1$$

folgt, so daß zwei entgegengesetzte Ereignisse Wahrscheinlichkeiten besitzen, die sich zur Einheit ergänzen. Von dieser Beziehung wird zuweilen vorteilhafter Gebrauch gemacht, wenn sich die Berechnung von q leichter gestaltet als die des fraglichen p.

Es seien $E_1, E_2, \ldots, E_k$ die Ereignisse, welche im Bereiche der Möglichkeit liegen und einander ausschließen,*) wobei aber eines dieser Ereignisse eintreten muß. Entsprechen unter den m möglichen Fällen diesen k Ereignissen, beziehungsweise $g_1, g_2, \ldots, g_k$ günstige Fälle, so folgt aus $g_1 + g_2 + \cdots + g_k = m$, daß

$$3) \qquad p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1.$$

Diese Gleichung ist eine Erweiterung der Gleichung 2) und besagt, daß die Wahrscheinlichkeiten einer Reihe einander ausschließender Ereignisse, wobei eines der Ereignisse eintreten muß, die Summe 1 ergeben.

Die Bestimmung einer Wahrscheinlichkeit auf Grund der aufgestellten Definition setzt voraus, daß sich aus den Bedingungen des Problems eine Gesamtheit gleichberechtigter und innerhalb dieser

---

*) Man nennt mehrere Ereignisse „einander ausschließend", wenn keines derselben mit einem der übrigen zugleich eintreffen kann.

die Gesamtheit der dem betreffenden Ereignisse günstigen Fälle konstruieren läßt; mit der Zählung dieser Gesamtheiten ist das Problem gelöst. Die Bildung der Fälle ist ein kombinatorischer Prozeß, dessen richtige Durchführung eine scharfe Zergliederung der Bedingungen der Aufgabe erfordert. (Die wichtigsten Formeln der Kombinatorik sind im Punkte 7 dieses Abschnittes angeführt.) Hiedurch ist die sogenannte direkte Methode der Wahrscheinlichkeitsbestimmung gekennzeichnet. Ein Beispiel soll diese Methode näher erläutern.

Beispiel. Wenn mit drei Würfeln gewürfelt wird, so sind bezüglich des Übereinstimmens oder Nichtübereinstimmens der geworfenen Zahlen drei Fälle denkbar:

a) daß alle drei Zahlen gleich werden,

b) daß nur zwei Zahlen gleich werden,

c) daß alle drei Zahlen verschieden werden.

Für jeden dieser drei Fälle soll die Wahrscheinlichkeit berechnet werden.

Die drei Würfel selbst mögen A_1, A_2, A_3 heißen. Da zur Berechnung der Anzahl der möglichen Fälle, jede der sechs Arten, wie der Würfel A_1 fallen kann, mit jeder der sechs Arten, wie A_2 fallen kann und mit jeder der sechs Arten, wie A_3 fallen kann, zusammenzusetzen ist, so gibt $6 \times 6 \times 6 = 6^3$ die Anzahl aller möglichen Fälle an, d. h. die sechs Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, welche auf den sechs Würfelflächen verzeichnet erscheinen, sind zur dritten Klasse mit Wiederholung zu variieren.

Zu *a)*. Unter den 6^3 möglichen Fällen sind nun 6 Fälle vorhanden, in welchen alle drei Zahlen gleich sind, nämlich die Fälle, in denen jeder der drei Würfel A_1, A_2, A_3 entweder 1, oder 2, oder 3, oder 4, oder 5, oder 6 zeigt.

Zu *b)*. Angenommen, sowohl der Würfel A_1 als auch der Würfel A_2 zeigen 1; dann muß der Würfel A_3 eine der Zahlen 2 bis einschließlich 6 zeigen; dies gibt also 5 mögliche Fälle. Nun können aber auch die Würfel A_2 und A_3, oder A_3 und A_1 die Zahl 1 zeigen. Man erhält also insgesamt 5×3 Fälle, wobei zwei von den drei Zahlen, welche die drei Würfel zeigen, gleich 1 sind. Das Gesagte gilt auch, wenn eine der Zahlen 2 bis einschließlich 6 auf zwei von den drei Würfeln erscheint. Für die Lösung der Aufgabe sind demnach $6 \times 5 \times 3$ Fälle günstig. Man kann also allgemein sagen: Wenn nur zwei Zahlen gleich sein sollen, so kann dies zunächst jede der sechs Zahlen 1 bis 6 sein. Da dann aber auf dem dritten Würfel eine Zahl sein muß, die von der doppelt vorhandenen Zahl verschieden ist, und

immer 5 solcher Zahlen vorhanden sind, so gelangt man zu 6×5 günstigen Fällen. Nun kann aber noch die von den beiden anderen verschiedene dritte Zahl von dem Würfel A_1, oder von A_2, oder von A_3 gezeigt werden. Man hat also noch mit 3 zu multiplizieren. Es ergeben sich daher $6 \times 5 \times 3 = 90$ unter den 6^3 Fällen, in welchen zwei von den drei Zahlen gleich sind.

Zu *c)*. Wenn endlich alle drei Zahlen verschieden sein sollen, so sind die Zahlen von 1 bis 6 zur dritten Klasse ohne Wiederholung variiert zu denken. Es ergeben sich so $6 \times 5 \times 4 = 120$ Fälle. In der Tat ist

$$6 + 90 + 120 = 216 = 6^3.$$

Man erhält also für die drei Fälle beziehungsweise die Wahrscheinlichkeiten:

$$a) \ \frac{6}{216} = \frac{1}{36} = 0{\cdot}028,$$

$$b) \ \frac{90}{216} = \frac{5}{12} = 0{\cdot}417,$$

$$c) \ \frac{120}{216} = \frac{5}{9} = 0{\cdot}555.$$

Die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten ist gleich 1, wie es sein soll.

2. Indirekte Methoden der Wahrscheinlichkeitsbestimmung.

Die direkte Methode war ursprünglich das einzige Mittel der Wahrscheinlichkeitsbestimmung. Es bildeten sich jedoch im Laufe der Zeit an der Hand zahlreicher Probleme Regeln aus, nach welchen gewisse häufig wiederkehrende Schlüsse vollzogen werden sollten. Anfänglich sehr zahlreich, reduzierten sich diese Regeln auf einige wenige Sätze, welche Laplace zum ersten Mal präzis formuliert hat. Diese Sätze betreffen:

A) Die vollständige oder totale Wahrscheinlichkeit und

B) Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

Durch geschickte Analyse des Ereignisses, nach dessen Wahrscheinlichkeit gefragt wird, und die Anwendung dieser Sätze gelingt es oft leichter, eine Aufgabe zu lösen, als durch die unmittelbare Zählung der möglichen und günstigen Fälle.

Das Wesen dieser beiden früher erwähnten Wahrscheinlichkeiten soll nun näher erläutert werden.

A) Vollständige oder totale Wahrscheinlichkeit.

Die einem Ereignis E günstigen Fälle, g an der Zahl, mögen sich von irgend einem Gesichtspunkte aus in Gruppen von g_1, g_2, ..., g_k Fällen derart sondern lassen, daß jeder der g Fälle einer und nur einer dieser Gruppen angehört; dann ist

$$g = g_1 + g_2 + \cdots\cdots + g_k.$$

Die Verwirklichung eines Falles aus der ersten Gruppe werde als Ereignis E_1, die Verwirklichung eines Falles aus der zweiten Gruppe als Ereignis E_2 u. s. w. bezeichnet. Dann sind E_1, E_2, ..., E_k Spezialfälle, Arten oder Modalitäten des Ereignisses E. Dieses Ereignis E gilt als eingetroffen, wenn entweder E_1, oder E_2, ..., oder E_k allein eingetroffen ist, wobei wohl darauf zu achten ist, daß es jedesmal nur auf eine dieser Arten eintreffen kann. Von vornherein kann man sagen, daß die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses E größer sein muß als die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von E_1, oder E_2, ..., oder E_k.

Ist m die Anzahl der möglichen Fälle, so ist die Wahrscheinlichkeit p des Ereignisses E bestimmt durch:

$$p = \frac{g}{m} = \frac{g_1}{m} + \frac{g_2}{m} + \cdots\cdots + \frac{g_k}{m};$$

$\frac{g_1}{m} = p_1$ ist aber die Wahrscheinlichkeit von E_1, $\frac{g_2}{m} = p_2$ die Wahrscheinlichkeit von E_2 u. s. f.; demnach ist:

$$1) \qquad p = p_1 + p_2 + \cdots\cdots + p_k = \sum_1^k p_i,$$

Dies gibt den Satz: Wenn ein Ereignis auf mehrere einander ausschließende Arten eintreffen kann, so ist seine Wahrscheinlichkeit gleich der Summe der den einzelnen Arten des Eintreffens zukommenden Wahrscheinlichkeiten. (Gesetz von der additiven Zusammensetzung der Wahrscheinlichkeiten.)

Die Wahrscheinlichkeit p wird im Gegensatze zu den Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, ..., p_k die vollständige oder totale Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E genannt.

C. Reuschle hat für die totale Wahrscheinlichkeit die zutreffende Bezeichnung „Wahrscheinlichkeit des Entweder — oder" vorgeschlagen.

Beispiel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit drei Würfeln entweder die Summe 9 oder 10 zu werfen?

Die Zahl der möglichen Fälle ist $m = 6^3 = 216$.

Die Summe 9 kann auftreten, wenn auf den drei Würfeln die Zahlen:

1, 2, 6	2, 2, 5
1, 3, 5	2, 3, 4
1, 4, 4	3, 3, 3

erscheinen. Die Zahlen 1, 2, 6 können aber auf den drei Würfeln in verschiedener Ordnung auftreten. Denkt man sich die Würfel mit A_1, A_2, A_3 bezeichnet und in dieser Reihenfolge gelegt, so können die Zahlen 1, 2, 6 auch auf den drei Würfeln in der Reihenfolge 1, 6, 2; 2, 1, 6; 2, 6, 1; 6, 1, 2; 6, 2, 1 auftreten, im ganzen also, da alle diese Fälle gleichberechtigt sind, sechsmal. Allgemein wird die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten jeder Gruppe durch die Anzahl der Permutationen von drei Elementen bestimmt, unter denen keine, beziehungsweise zwei oder drei gleiche Elemente vorhanden sind (siehe Punkt 7 dieses Abschnittes). Diese Anzahl beträgt bei den obigen sechs Kombinationen 6, 6, 3, 3, 6 und 1, also die Gesamtzahl der günstigen Fälle 25. Ebenso findet man für die der Summe 10 günstigen Fälle die Kombinationen:

1, 3, 6	2, 3, 5
1, 4, 5	2, 4, 4
2, 2, 6	3, 3, 4

und zwar in der Anzahl 6, 6, 3, 6, 3, 3; daher die Gesamtzahl der günstigen Fälle 27.

Es ist also die Wahrscheinlichkeit für das Werfen der Summe 9:

$$p_1 = \frac{25}{216}$$

und für das Werfen der Summe 10:

$$p_2 = \frac{27}{216},$$

daher die vollständige oder totale Wahrscheinlichkeit p für das Werfen der Summen 9 oder 10:

$$p = p_1 + p_2 = \frac{52}{216} = \frac{13}{54}.$$

B) Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

Ein Ereignis E gelte dann als eingetroffen, wenn sowohl das Ereignis E_1 als auch das Ereignis E_2 .... als auch das Ereignis

E_k in der angegebenen Reihenfolge eingetreten sind, mit andern Worten: das Eintreffen des Ereignisses E bestehe in dem Zusammentreffen der Ereignisse E_1, E_2, ..., E_k. Da die Forderung des Zusammentreffens dieser k Ereignisse strenger ist als jene, daß nur ein Ereignis eintritt, so muß die Wahrscheinlichkeit p für das Eintreffen des Ereignisses E entsprechend der strengeren Forderung kleiner sein als p_1, ebenso kleiner sein als p_2, ..., endlich auch kleiner sein als p_k, wenn p_1, p_2, ..., p_k die Wahrscheinlichkeiten für das isolierte Eintreffen der Ereignisse E_1, E_2, ..., E_k, bedeuten.

Von den m_1, m_2, ..., m_k möglichen Fällen, welche den Ereignissen E_1, E_2, ..., E_k zu Grunde liegen, muß aus jeder Gruppe ein Fall eintreten; da sich nun jeder Fall der ersten Gruppe mit jedem der zweiten Gruppe verbinden, jede dieser Verbindungen sich wieder mit jedem Falle der dritten Gruppe vereinigen kann u. s. w., so gibt es

$$m = m_1 \, m_2 \ldots\ldots m_k$$

Verbindungen, die in Bezug auf das Ereignis E als mögliche, insbesondere auch als gleichmögliche Fälle aufzufassen sind, wenn die m_1 und die m_2 ...... und die m_k Fälle unter einander gleichberechtigt waren.

Ein dem Ereignisse E günstiger Fall ergibt sich nur dann, wenn von jedem der Ereignisse E_1, E_2, ..., E_k je ein günstiger eintrifft, und das kann auf

$$g = g_1 \, g_2 \ldots . g_k$$

Arten geschehen, wenn g_1 günstige Fälle dem E_1, g_2 günstige Fälle dem E_2 u. s. w. zukommen. Hienach ist die Wahrscheinlichkeit p des Ereignisses E bestimmt durch

$$p = \frac{g}{m} = \frac{g_1}{m_1} \cdot \frac{g_2}{m_2} \ldots\ldots \frac{g_k}{m_k}.$$

Nun ist aber $\frac{g_1}{m_1} = p_1$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_1 an sich, $\frac{g_2}{m_2} = p_2$ die Wahrscheinlichkeit von E_2 u. s. w.; demnach

2) $$p = p_1 \, p_2 \ldots . p_k.$$

Die Forderung, daß $p < p_1$, $p < p_2$, ..., $p < p_k$ sein muß, wird durch das Ergebnis $p = p_1 \, p_2 \ldots . p_k$ erfüllt, da ja die Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, ..., p_k positive echte Brüche sind.

Bei der vorstehenden Betrachtung wurde Unabhängigkeit der Ereignisse E_1, E_2,...., E_k in dem Sinne vorausgesetzt, daß die Wahrscheinlichkeit eines derselben nicht davon abhängt, ob die

andern eingetroffen sind. Die Gleichung 2) gibt hienach den Satz: Die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen mehrerer von einander unabhängiger Ereignisse in gegebener Reihenfolge ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse. (Gesetz von der multiplikativen Verbindung der Wahrscheinlichkeiten.)

Die Wahrscheinlichkeit p wird im Gegensatze zu den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_k$ eine zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit genannt. Auch das Ereignis E wird als ein aus den einfachen Ereignissen $E_1, E_2, \ldots, E_k$ zusammengesetztes Ereignis bezeichnet.

Ob das Zusammentreffen ein gleichzeitiges oder ein sukzessives ist, bleibt für die Erwartungsbildung und daher auch für die Wahrscheinlichkeitsbestimmung gleichgültig; im Falle des folgeweisen Eintreffens der einfachen Ereignisse ist auch ihre Ordnung ohne Belang. Es ist also beispielsweise die Wahrscheinlichkeit mit einer Münze n-mal hintereinander Wappen zu werfen gleich der Wahrscheinlichkeit mit n Münzen in einem Wurfe durchwegs Wappen zu werfen.

Für die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit hat C. Reuschle den treffenden Terminus „Wahrscheinlichkeit des Sowohl—als auch" in Vorschlag gebracht.

Wenn die Ereignisse $E_2, E_3, \ldots, E_k$ mit dem ersten Ereignisse E_1 übereinstimmen, so besteht das Ereignis E entweder in dem Zusammentreffen von k gleichwahrscheinlichen oder in der k-maligen Wiederholung eines und desselben Ereignisses, und seine Wahrscheinlichkeit ist zufolge 2):

$$p = p_1^k.$$

Es ist also die Wahrscheinlichkeit der k-maligen Wiederholung eines und desselben Ereignisses gleich der k-ten Potenz seiner Wahrscheinlichkeit.

Wenn p die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses E ist, so drückt $1 - p$ die Wahrscheinlichkeit aus, daß das Ereignis E bei einem einzelnen Versuch nicht eintrifft. Die Wahrscheinlichkeit des Nichteintreffens bei k-maliger Wiederholung des Versuches ist $(1-p)^k$. Die Wahrscheinlichkeit des entgegengesetzten Ereignisses, d. h. des Falles, daß bei diesen k Versuchen das Ereignis E überhaupt, also wenigstens einmal eintrifft, ist $P = 1 - (1-p)^k$. Ergibt sich $P = \frac{1}{2}$, so bedeutet dies, daß bei k Versuchen das Ereignis E mit derselben Wahrscheinlichkeit eintreffen oder ausbleiben kann. Man hat dann:

$$\frac{1}{2} = 1 - (1 - p)^k; \; (1 - p)^k = \frac{1}{2}$$

und hieraus

$$k = - \frac{log\, 2}{log\, (1 - p)}.$$

Ist eine angenommene Zahl a größer als die Zahl k, welche einem bestimmten p aus dieser Gleichung entspricht, so ist das Eintreffen des Ereignisses E wahrscheinlicher als sein Ausbleiben, bleibt a hinter dem durch die Gleichung bestimmten Werte zurück, so ist das Ausbleiben wahrscheinlicher als das Eintreffen.

Es bestehe z. B. das Ereignis E darin, daß beim Werfen eines gewöhnlichen Würfels die Zahl 6 nach oben zu liegen kommt. Beim Würfeln mit einem einzigen Würfel ist die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Zahl, also z. B. 6 zu werfen, $p = \frac{1}{6}$.

Hieraus folgt $k = 3{\cdot}8018$. Es ist daher schon bei 4 Würfen $(4 > k)$ das Erscheinen der Zahl 6 wahrscheinlicher als das Ausbleiben, während bei 3 Würfen $(3 < k)$ das Umgekehrte der Fall ist.

Besteht das Ereignis E im Treffen einer Scheibe, und ist die Wahrscheinlichkeit, diese Scheibe mit einem Schusse zu treffen $p = \frac{1}{6}$, dann ist bei 4 Schüssen wahrscheinlicher, daß die Scheibe getroffen wird, als daß alle 4 Schüsse vorbeigehen; bei 3 Schüssen ist es wahrscheinlicher, daß alle 3 Schüsse Fehlschüsse sind, als daß die Scheibe getroffen wird.

Im Vorstehenden liegt auch die Lösung der folgenden Aufgabe vor:

Die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß ein Ereignis von gegebener Wahrscheinlichkeit p sich in k Realisierungen der allgemeinen Bedingungen wenigstens einmal, also überhaupt zutrage.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist:

$$P = 1 - (1 - p)^k.$$

Sie wird mit wachsendem k immer größer und nähert sich der Einheit, wie klein auch p, d. h. wie unwahrscheinlich das betreffende Ereignis im einzelnen Falle auch sein mag.

Zu gegebenem P läßt sich die Zahl k der Realisierungen bestimmen, welche nötig sind, damit das Eintreffen des Ereignisses mit der Wahrscheinlichkeit P erwartet werden dürfe. Es ist:

$$k = \frac{log(1 - P)}{log(1 - p)}.$$

Es liegt in der Natur der Sache, daß $P > p$ sein muß.

Es gibt aber noch einen andern Modus des Zusammentreffens mehrerer Ereignisse, der zwar zu derselben mathematischen Formel 2) führt, wobei jedoch den einfachen Wahrscheinlichkeiten eine veränderte Deutung gegeben werden muß. Das Ereignis E bestehe wieder in dem Zusammentreffen der Ereignisse E_1, E_2, ..., E_k, welches zunächst als ein sukzessives in der durch die Zeiger bezeichneten Ordnung gedacht werden soll. Das Eintreffen des ersten Ereignisses E_1 beeinflusse aber das nächste Ereignis in der Weise, daß es die Anzahl der möglichen oder der günstigen Fälle oder beider zugleich gegenüber dem ursprünglichen Bestand verändert, also auch der Wahrscheinlichkeit desselben einen von dem ursprünglichen verschiedenen Wert verleiht. Die früher gemachten Schlüsse über die Kombinierung der möglichen und günstigen Fälle bleiben aufrecht, nur sind die Fälle bei dem zweiten Ereignisse so zu zählen, wie sie sich nach dem Eintreffen oder unter dem Einflusse des ersten Ereignisses stellen. In gleicher Weise möge das Eintreffen der zwei ersten Ereignisse auf das des dritten Einfluß nehmen u. s. f. Man bezeichnet dann die Ereignisse E_1, E_2, ..., E_k als von einander abhängig und kann bezüglich ihres Zusammenhanges den Satz aussprechen: Die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen mehrerer von einander abhängiger Ereignisse ist gleich dem Produkte ihrer Wahrscheinlichkeiten, die Wahrscheinlichkeit jedes einzelnen Ereignisses unter der Voraussetzung berechnet, daß die ihm in der Sukzession oder Folge vorangehenden eingetroffen seien.

Bei der Bildung einer zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit kommt es also wesentlich darauf an, ob die einfachen Ereignisse in dem Sinne von einander unabhängig sind, daß das Eintreffen oder Nichteintreffen des einen Ereignisses auf das Wahrscheinlichkeitsurteil bezüglich der andern Ereignisse keinen Einfluß übt, oder ob sie in dem eben gekennzeichneten Sinne von einander abhängig sind.

In dem Nachweise der Unabhängigkeit, beziehungsweise in dem Erkennen der Abhängigkeit von Ereignissen liegt eine der Hauptschwierigkeiten, sobald es sich um Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf wirkliche Vorgänge handelt. Aus der Nichtbeachtung einer vorhandenen Abhängigkeit können schwere Irrungen hervorgehen.

Mitunter begegnet man der falschen Vorstellung von einer Abhängigkeit der sukzessiven Realisierungen. So hielt J. D'Alembert daran fest, daß es für das Wahrscheinlichkeitsurteil nicht gleichgültig sei, in n Würfen mit einer Münze und in einem Wurfe mit n Münzen Wappen in einer bestimmten Anzahl zu treffen — er hält das erstere für minder wahrscheinlich wegen einer von ihm behaupteten Abhängigkeit der aufeinander folgenden Würfe.

Die Untersuchung, ob die einzelnen Fälle gleich möglich oder gleich wahrscheinlich sind, ist oft sehr schwierig und erfordert große Sorgfalt und Unbefangenheit. Ein Beispiel soll dies erläutern.

Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß bei zweimaligem Aufwerfen einer Münze wenigstens einmal Wappen erscheint.

Bezeichnet man die Wappenseite mit W, die Schriftseite mit S, so kann das Ereignis zweier Würfe einer der vier gleich möglichen Fälle sein:

$$WW, \quad WS, \quad SW, \quad SS.$$

Die drei ersten dieser Fälle sind dem erwarteten Ereignis günstig, sonach ist dessen Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$.

Man kann aber auch bei der Lösung der Aufgabe nur drei verschiedene Fälle unterscheiden, nämlich:

a) Wappen im ersten Wurfe, wobei das Spiel beendet und der zweite Wurf unnötig ist,

b) Schrift im ersten und Wappen im zweiten Wurfe und

c) Schrift in beiden Würfen.

Hienach könnte es scheinen, daß die Wahrscheinlichkeit nur gleich $\frac{2}{3}$ wäre und in dieser unrichtigen Weise faßte D'Alembert die Aufgabe auf. Es ist jedoch klar, daß die Wahrscheinlichkeit des Falles *a)* größer ist als die eines der beiden Fälle *b)* und *c)*. Jene ist in der Tat gleich $\frac{1}{2}$, während sie sowohl für den Fall *b)* als auch für den Fall *c)* gleich $\frac{1}{4}$ ist. Daß der Fall *a)* nicht gleichwertig den beiden andern Fällen ist, gab D'Alembert nicht zu.

3. Bestimmung der vollständigen Wahrscheinlichkeit eines Ergeignisses aus seiner Wahrscheinlichkeit bei verschiedenen Hypothesen.

Mit Hilfe der Sätze über die vollständige und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit kann man folgende Aufgabe lösen:

Es werde vorausgesetzt, daß das Ereignis E nur in Verbindung mit einem der einander ausschließenden Ereignisse

$$F_1, F_2, \ldots\ldots, F_k,$$

deren Wahrscheinlichkeiten

$$P_1, P_2, \ldots\ldots, P_k$$

sein mögen, eintreffen kann.

Die Wahrscheinlichkeit von E, wenn vorher F_1 eingetroffen ist, sei auch bekannt und gleich p_1. Wenn jedoch nicht F_1, sondern F_2 vorher eintraf, sei die Wahrscheinlichkeit von E gleich p_2, u. s. f.

Man kann leicht beweisen, daß die vollständige Wahrscheinlichkeit P für das Eintreffen des Ereignisses E durch die Formel

$$1) \qquad P = P_1 p_1 + P_2 p_2 + \cdots\cdots + P_k p_k$$

dargestellt ist.

Nach dem Satze über die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses E_1, welches darin besteht, daß E gleichzeitig mit F_1 eintrifft, gleich $P_1 p_1$; ferner die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses E_2, welches darin besteht, daß E gleichzeitig mit F_2 eintrifft, gleich $P_2 p_2$; u. s. f.

Nach dem Satze über die vollständige Wahrscheinlichkeit ist daher die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eines von den k Ereignissen $E_1, E_2, \ldots, E_k$ eintritt, gleich der Summe

$$P = P_1 p_1 + P_2 p_2 + \cdots\cdots + P_k p_k.$$

Da der Voraussetzung gemäß das Ereignis E nur gleichzeitig mit einem der Ereignisse $F_1, F_2, \ldots, F_k$ eintreffen kann, sind die Ereignisse $E_1, E_2, \ldots\ldots, E_k$ schon die sämtlichen möglichen Arten des Eintreffens von E, demnach ist der Ausdruck 1) schon seine vollständige Wahrscheinlichkeit.

Betrachtet man die Ereignisse $F_1, F_2, \ldots, F_k$ als verschiedene, einander ausschließende Hypothesen für das Zustandekommen des Ereignisses E, so kann man die Formel 1) wie folgt in Worte kleiden:

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wird erhalten, indem man die Wahrscheinlichkeit einer jeden der für das Zustandekommen des Ereignisses möglichen, einander ausschließenden Hypothesen mit der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses bei eben dieser Hypothese multipliziert und die Summe aller Produkte bildet.

Beispiel. Es liegen n äußerlich gleiche Urnen U_1, U_2, ..., U_n von folgender Füllung vor:

U_1 enthält c_1 Kugeln, darunter a_1 von weißer Farbe,
U_2 „ c_2 „ , „ a_2 „ „ „ ,
. . . .
U_n „ c_n „ , „ a_n „ „ „ .

Man hat nun aus einer der Urnen eine Kugel gezogen und frägt: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese Kugel weiß ist?

Da man die weiße Kugel aus irgend einer der Urnen ziehen kann, so ist die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen, gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten, die weiße Kugel aus einer der n Urnen zu ziehen. Nun ist von vornherein der Zug aus irgend einer der n Urnen gleich wahrscheinlich, weil für jede Urne die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ besteht, daß man sie wählen werde.

Die Wahrscheinlichkeit für den Zug der weißen Kugel aus der Urne U_1 setzt sich zusammen aus der Wahrscheinlichkeit $P_1 = \frac{1}{n}$, den Zug aus der Urne U_1 zu machen und der Wahrscheinlichkeit $p_1 = \frac{a_1}{c_1}$, daß aus U_1 eine weiße Kugel gezogen wird. Die Wahrscheinlichkeit, daß man in die Urne U_1 greife und aus dieser eine weiße Kugel zieht, ist also

$$P_1 p_1 = \frac{1}{n} \cdot \frac{a_1}{c_1}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, die Urne U_2 zu wählen und aus derselben eine weiße Kugel zu ziehen, ist analog

$$P_2 p_2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{a_2}{c_2},$$

u. s. f.

Die Wahrscheinlichkeit endlich, die Urne U_n zu ergreifen und aus ihr eine weiße Kugel zu ziehen, ist

$$P_n p_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{a_n}{c_n}.$$

Daher ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$2) \quad P = \frac{1}{n}\frac{a_1}{c_1} + \frac{1}{n}\frac{a_2}{c_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{n}\frac{a_n}{c_n} = \frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{c_1} + \frac{a_2}{c_2} + \cdots\cdots + \frac{a_n}{c_n}\right).$$

4. Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Kombination zweier entgegengesetzter Ereignisse in einer Reihe von Versuchen. Die Binomialformel.

Nachstehend soll die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bestimmt werden, welches darin besteht, daß bei einer bekannten Zahl von Versuchen jedes von zwei einander entgegengesetzten Ereignissen, deren Wahrscheinlichkeiten bekannt sind, in einer bestimmten Anzahl wiederkehrt.

Diese Aufgabe kann man folgendermaßen formulieren:

Über zwei entgegengesetzte Ereignisse E, F mit den Wahrscheinlichkeiten p, $q (= 1 - p)$ werden s Versuche oder Beobachtungen angestellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich das Ereignis E dabei m $(\leq s)$-mal und das Ereignis F hingegen $n (= s - m)$-mal in was immer für einer Reihenfolge zutragen werde?

Jede Kombination der entgegengesetzten Ereignisse E, F besteht somit aus s Elementen, von welchen m gleich E und n gleich F sind; hiebei ist die Reihenfolge, in welcher die Ereignisse E und F auf einander folgen, gegeben. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten irgend einer derartigen Kombination ist daher ein Produkt von $m + n = s$ Faktoren, wovon m gleich p und n gleich q sind, so daß $p^m q^n$ der einfachste Ausdruck dieses Produktes ist.

Kombinationen von dieser Art gibt es aber so viele, als s Elemente Permutationen ergeben, worunter m gleiche einer Art und n gleiche einer andern Art vorkommen, d. i. $\frac{s!}{m!\,n!} = \binom{s}{m} = \binom{s}{n}$.

Dies ist also die Zahl, welche angibt, in wieviel verschiedenen Reihenfolgen m Ereignisse E und n Ereignisse F angeordnet sein können.

Da jeder solchen Anordnung die Wahrscheinlichkeit $p^m q^n$ zukommt, so ist die totale Wahrscheinlichkeit, daß die Ereignisse E, F in der Anzahl m, n in was immer für einer Ordnung sich wiederholen werden, dargestellt durch

$$1)\qquad P = \frac{s!}{m!\,n!} p^m q^n$$

oder

$$2)\qquad P = \binom{s}{m} p^m q^n = \frac{s(s-1)\ldots\ldots(s-m+1)}{1.2.3\ldots\ldots m} p^m q^n.$$

Der für P in 2) gefundene Ausdruck ist das allgemeine Glied der Entwicklung von $(p + q)^s$, welche lautet:

$$(p+q)^s = p^s + \binom{s}{1} p^{s-1} q + \binom{s}{2} p^{s-2} q^2 + \cdots \binom{s}{n} p^m q^n + \cdots + q^s =$$
$$= p^s + \binom{s}{s-1} p^{s-1} q + \binom{s}{s-2} p^{s-2} q^2 + \cdots + \binom{s}{m} p^m q^n + \cdots +$$
$$+ \binom{s}{1} p q^{s-1} + q^s,$$

oder in anderer Schreibart der Binominalkoeffizienten, indem man sie nämlich durch Fakultäten ausdrückt (siehe hierüber Punkt 7 dieses Abschnittes):

$$(p+q)^s = p^s + \frac{s!}{(s-1)!\,1!} p^{s-1} q + \frac{s!}{(s-2)!\,2!} p^{s-2} q^2 + \cdots +$$
$$+ \frac{s!}{m!\,n!} p^m q^n + \cdots + q^s.$$

Jedes Glied dieser Entwicklung hat sonach eine bestimmte wahrscheinlichkeitstheoretische Bedeutung. So stellt das erste Glied die Wahrscheinlichkeit dar, daß in allen n Versuchen das Ereignis E auftreten werde; das zweite Glied die Wahrscheinlichkeit, daß E sich $(s-1)$-mal wiederholen und F einmal zutragen werde, gleichgültig, ob F an erster, oder zweiter, ..., oder letzter Stelle erscheint u. s. w.; das Glied $\frac{s!}{m!\,n!} p^m q^n$ stellt die Wahrscheinlichkeit dar des m-maligen Eintreffens von E und des n-maligen Eintreffens von F ohne Rücksicht auf die Reihenfolge des Eintreffens dieser Ereignisse; das letzte Glied gibt die Wahrscheinlichkeit einer beständigen Wiederholung von F.

Da $p+q=1$, ist die Summe sämtlicher Glieder der Entwicklung gleich 1, wodurch die Tatsache ausgedrückt ist, daß von den den Gliedern entsprechenden Ereignisverbindungen nur eine eintreten kann und eine notwendig eintreten muß.

5. Beispiele.

1. Beispiel. Ein Schüler schätzt die Wahrscheinlichkeit, zu Weihnachten ein Paar Schlittschuhe geschenkt zu bekommen, zu $\frac{4}{5}$ und die Wahrscheinlichkeit, daß am ersten Weihnachtsfeiertag die Eisbahn geöffnet wird, zu $\frac{3}{4}$. Wie viel Wahrscheinlichkeit hat er dann dafür, daß beide Ereignisse eintreten, daß er also am ersten Weihnachtstage mit den geschenkten Schlittschuhen auf die Eisbahn gehen kann?

Es ergibt sich für die fragliche Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5} = 0{\cdot}6.$$

2. Beispiel. In einer Urne befinden sich n Kugeln, darunter a weiße, b schwarze, wobei $n = a + b$ ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in drei auf einander folgenden Zügen zwei weiße und eine schwarze Kugel zu ziehen, wenn die gezogene Kugel nicht wieder zurückgelegt wird?

Die drei Ereignisse, der erste, zweite und dritte Zug, sind von einander abhängig, und zwar hängt der zweite Zug vom ersten, der dritte Zug vom ersten und zweiten ab. Weil die erste und die zweite gezogene Kugel nicht zurückgelegt werden, ist die Anzahl der Kugeln für jeden der drei Züge eine andere.

Die Wahrscheinlichkeit für den Zug der ersten weißen Kugel ist $p_1 = \frac{a}{n}$. Vor dem zweiten Zuge sind in der Urne, da die gezogene Kugel nicht mehr zurückgelegt wird, $n - 1$ Kugeln, darunter $a - 1$ weiße, weil nur jene Fälle zu berücksichtigen sind, in denen im ersten Zuge bereits eine weiße Kugel gezogen wurde. Die Wahrscheinlichkeit, mit dem zweiten Zuge wieder eine weiße Kugel zu ergreifen, ist daher $p_2 = \frac{a-1}{n-1}$. Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen zweier weißer Kugeln in zwei aufeinander folgenden Zügen ist somit $p_1 p_2 = \frac{a(a-1)}{n(n-1)}$. Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer schwarzen Kugel, nachdem bereits zwei weiße Kugeln gezogen wurden, ist nunmehr $p_3 = \frac{b}{n-2}$, daher die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen zweier weißer Kugeln und einer schwarzen Kugel in der gegebenen Reihenfolge

$$p_1 p_2 p_3 = \frac{a(a-1)b}{n(n-1)(n-2)}.$$

Hiemit wäre die Aufgabe erledigt, die Wahrscheinlichkeit zu suchen, daß die drei Kugeln in der gegebenen Reihenfolge gezogen werden. Diese Beschränkung wird aber in der Aufgabe nicht gefordert. Es sind also noch die Wahrscheinlichkeiten dafür zu suchen, daß die Kugeln in der Reihenfolge weiß — schwarz — weiß, schwarz — weiß — weiß gezogen werden. Diese sind, wie man in derselben Weise leicht findet, ebenso groß; somit ist die Wahrscheinlichkeit P zwei weiße und eine schwarze Kugel in irgend einer beliebigen

Reihenfolge zu ziehen

$$P = 3\,\frac{a\,(a-1)\,b}{n\,(n-1)\,(n-2)}.$$

3. Beispiel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei zehnmaligem Werfen einer Münze siebenmal Wappen und dreimal Schrift zum Vorschein kommt?

Bei dem einmaligen Werfen des Geldstückes ist die Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen von Schrift, beziehungsweise Wappen $p = q = \frac{1}{2}$.

Zur Anwendung der Formel 2) im Punkte 4 dieses Abschnittes hat man zu setzen:

$$s = 10, \quad m = 7, \quad n = 3, \quad p = q = \frac{1}{2}$$

und erhält:

$$P = \binom{10}{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{15}{128}.$$

4. Beispiel. Die Wahrscheinlichkeit, daß beim Werfen einer Münze die Schriftseite nach oben fällt, ist gleich $\frac{1}{2}$. Daraus folgt für die Wahrscheinlichkeit, daß bei sechs Würfen dreimal die Schriftseite und dreimal die Wappenseite nach oben fällt, der Wert:

$$P = \frac{6!}{3!\,3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 20 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{20}{64} = 0{\cdot}31.$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also 31%, d. h. man ist zu der Annahme berechtigt, daß unter 100 Experimenten mit sechs Würfen durchschnittlich 31-mal der Fall eintreten wird, daß unter sechs Würfen gerade dreimal die Schriftseite und dreimal die Wappenseite nach oben fällt. Die Wahrscheinlichkeit, daß dieses Ereignis nicht eintrifft, ist dann $1 - 0{\cdot}31 = 0{\cdot}69$, d. h. man darf 31 Heller gegen 69 Heller wetten, daß das genannte Ereignis eintrifft. Denn in einer zu billigenden Wette müssen sich die Einzahlungen oder die Einsätze der beiden Partner wie die beiderseitigen Wahrscheinlichkeiten verhalten, die Wette zu gewinnen. Man kann auch sagen: die Größe des Gewinnes und Verlustes müssen bei einer rechtmäßigen Wette im umgekehrten Verhältnisse der Wahrscheinlichkeit des Gewinnes zu der des Verlustes stehen. Wettet man z. B., daß beim einmaligen Werfen zweier Würfel zwei gleiche Zahlen erscheinen werden, so führen unter den 36 gleich möglichen Fällen 6 dieses Ereignis herbei, während es in den übrigen 30 nicht eintritt. Die

Wahrscheinlichkeit des Gewinnes verhält sich also zu der des Verlustes wie 1 : 5, oder der Gewinn muß das Fünffache des Verlustes betragen.

5. Beispiel. Angenommen, die Wahrscheinlichkeit, mit einem einzigen Schuß aus einem Geschütze eine Scheibe zu treffen, sei $p = \frac{3}{4}$. Die Wahrscheinlichkeit des entgegengesetzten Ereignisses, eines Fehlschusses, ist dann $q = 1 - p = \frac{1}{4}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei 4 Schüssen dreimal die Scheibe zu treffen?

Zur Anwendung der Formel 2) im Punkte 4 dieses Abschnittes setze man:

$$s = 4, \quad m = 3, \quad n = 1, \quad p = \frac{3}{4}, \quad q = \frac{1}{4};$$

dann wird:

$$P = \binom{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3 \frac{1}{4} = \frac{27}{64}.$$

6. Beispiel. Eine Urne enthält n Kugeln; hievon sind a weiß und b schwarz, wobei $n = a + b$ ist. Es werden k Züge hintereinander ausgeführt, die gezogenen Kugeln jedoch nicht zurückgelegt. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß in den k ($\overline{\leqq} a$) Zügen lauter weiße Kugeln erscheinen?

Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weißen Kugel beim ersten Zug ist: $p_1 = \frac{a}{n}$.

Da die Kugel nicht zurückgelegt wird, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weißen Kugel beim zweiten Zuge: $p_2 = \frac{a-1}{n-1}$.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weißen Kugel beim dritten Zug ist, da nur $a - 2$ weiße Kugeln vorhanden sind, $p_3 = \frac{a-2}{n-2}$ u. s. w. Die Wahrscheinlichkeit, daß im k-ten Zug eine weiße Kugel erscheint, ist: $p_k = \frac{a-(k-1)}{n-(k-1)}$.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also:

$$P = p_1 \, p_2 \cdots\cdots p_k = \frac{a}{n} \cdot \frac{a-1}{n-1} \cdot \frac{a-2}{n-2} \cdots\cdots \frac{a-(k-1)}{n-(k-1)} = \frac{\binom{a}{k}}{\binom{n}{k}},$$

oder bei Anwendung der von Kramp [siehe Punkt 7 E) dieses Abschnittes] eingeführten Bezeichnung:

$$P = \frac{a^{k/-1}}{n^{k/-1}} = \frac{\{a-(k-1)\}^{k/1}}{\{n-(k-1)\}^{k/1}}.$$

6. Bemerkungen über Wahrscheinlichkeitsbestimmungen.

Es dürfte von Interesse sein, noch die folgenden Bemerkungen über Wahrscheinlichkeitsbestimmungen anzuführen:

a) Es wurde gefunden, daß die Wahrscheinlichkeit, womit die mehrmalige Wiederholung desselben Ereignisses unter gleichen Umständen erwartet werden darf, ausgedrückt wird durch die Wahrscheinlichkeit des einmaligen Eintretens der Erscheinung, erhoben zu derjenigen Potenz, deren Exponent der Wiederholungszahl gleich ist. Die höheren Potenzen eines echten Bruches werden aber immer kleiner, daher die mehrmalige Wiederholung eines an sich leicht möglichen Ereignisses sehr wenig wahrscheinlich wird.

Laplace schließt hieran die folgenden Bemerkungen:*) Eine Tatsache sei durch zwanzigmaliges Wiedererzählen überliefert worden. Wenn alsdann auch die Glaubwürdigkeit jeder Mitteilung gleich 0·9 wäre, so würde die der schließlichen Überlieferung doch nur 0·9 zur zwanzigsten Potenz oder gleich 0·1216 oder weniger als $\frac{1}{8}$ sein. Diese auffallende Verminderung der Wahrscheinlichkeit kann man sehr passend mit der abnehmenden Deutlichkeit der Gegenstände vergleichen, die man durch mehrere Glasscheiben sieht. Die einzelne Scheibe läßt kaum eine Undeutlichkeit bemerken, wenn es aber mehrere sind, so wird das Bild bald unklar und leicht ganz unkenntlich. Die Geschichtschreiber pflegen diese Tatsache nicht sonderlich zu beachten, wenn sie von Zeiten sprechen, die viele Generationen zurückliegen, und gewiß würden manche historische Ereignisse, die man als sicher ansieht, wenigstens sehr zweifelhaft erscheinen, wenn man sie einer Prüfung unterwerfen könnte.

In den rein mathematischen Wissenschaften sind die entferntesten Folgerungen noch ebenso sicher, wie die Grundsätze, von denen man ausgegangen ist. Bei Anwendung der Analysis auf physikalische Gegenstände geht die Wahrscheinlichkeit der zu Grunde gelegten Voraussetzungen auf alle Folgerungen über. In den historischen Wissenschaften leitet man dagegen jede Folgerung nur auf eine wahrscheinliche Art aus den vorhergehenden Sätzen ab. Welche Sorgfalt man daher auch anwenden mag, um Täuschungen zu vermeiden, so wächst die Größe des möglichen Fehlers doch mit jedem Schritte, und für entferntere Folgerungen dieser Art wird die Wahrscheinlichkeit sehr gering.

---

*) G. Hagen, Wahrscheinlichkeitsrechnung, dritte Auflage, 1882, Seite 9 bis 13.

b) Oft fragt man, ob bei ganz zufälligen Ereignissen, wobei keine Beziehung zu den früheren stattfindet, die Vergangenheit von Einfluß auf die Zukunft sei. Dieses ist nicht der Fall. So ist es höchst unwahrscheinlich, daß beim Aufwerfen einer flachen und ganz symmetrisch geformten Münze zehnmal nacheinander die Wappenseite erscheinen wird. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist gleich $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$ oder man kann vor dem Beginne des Spieles 1 gegen 1023 wetten, daß dies nicht der Fall sein wird. Wenn auch bereits neunmal hintereinander Wappen erschienen ist, so bleibt der letzte Wurf hievon ganz unabhängig, und die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er Wappenseite geben wird, ist wie bei dem ersten Wurfe gleich $\frac{1}{2}$, weil keine Rückwirkung der früheren Ereignisse auf die folgenden denkbar ist.

Bei dem wiederholten und vorwiegenden Erscheinen der einen Seite kann man jedoch vermuten, daß die Ursache dieses Eintreffens in der Münze selbst gelegen und dieselbe nicht gleichmäßig geformt ist. Wäre das letztere der Fall, so würde auch in Zukunft diese Seite vorherrschend erscheinen. — Ebenso ist das Glück, welches manche Personen in allen Lebensverhältnissen haben, gemeinhin die Folge ihrer Geschicklichkeit.

c) Man pflegt regelmäßig wiederkehrende Erscheinungen, z. B. daß in n Würfen mit einer Münze abwechselnd Wappen und Schrift erscheint, besonderen Ursachen zuzuschreiben. Oft glaubt man sogar, daß Erscheinungen, die sich in eigentümlicher Weise oder in einer gewissen Regelmäßigkeit darstellen, weniger wahrscheinlich sind, als andere; so z. B., daß beim Aufwerfen einer symmetrisch gestalteten Münze nicht so leicht zehnmal nacheinander die Wappenseite erscheinen könne, als irgend eine andere im voraus bestimmte Reihenfolge, worin die Aufeinanderfolge von Wappen und Schrift keine auffallende Regelmäßigkeit aufweist. Dies ist aber nicht der Fall. Die regelmäßigen Kombinationen ereignen sich vielmehr nur deshalb so selten, weil ihrer so wenige sind. An sich ist die Erscheinung 10-mal Wappen ebenso wahrscheinlich wie etwa die Erscheinung 1-mal Schrift, 3-mal Wappen, 2-mal Schrift, 1-mal Wappen, 1-mal Schrift und 2-mal Wappen. Die letzte Erscheinung tritt aber nicht als eine besonders in die Augen springende auf, daher sie weniger beachtet, vielmehr zur großen Anzahl der anscheinend gesetzlosen gerechnet wird.

Eben wegen der verschwindend kleinen Anzahl solcher ungewöhnlichen Erscheinungen erregen dieselben den Verdacht, daß

sie nicht zufällig sind. Wenn jemand aus einer Urne, die auf sechs gleichen Kärtchen die Buchstaben *A*, *E*, *O*, *P*, *R*, *U* enthält, diese Kärtchen sukzessive herausziehend sie in der Ordnung *EUROPA* erhielte, so würde er dies mit Rücksicht darauf, daß die Buchstaben in dieser Reihenfolge einen ihm geläufigen Namen darstellen, als ein ungewöhnliches Ereignis bezeichnen; einem andern, dem dieser Name fremd wäre, würde nur mehr die Lesbarkeit der Permutation auffallen und sie würde ihm von diesem Gesichtspunkte nicht ungewöhnlicher erscheinen als etwa *AREUPO*; an sich stehen aber diese Anordnungen auf ganz gleicher Stufe mit jeder andern, wodurch ein Wort dargestellt würde, das sich nicht aussprechen läßt und in keiner uns bekannten Sprache vorkommt, wie etwa mit *RPUOAE*. Jede Anordnung ist unter den 720 verschiedenen Permutationen der sechs verschiedenen Buchstaben einzig in ihrer Art und hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{720}$.

Wir sind gewohnt, die Erscheinungen, die um uns vorgehen, in gewöhnliche und ungewöhnliche oder außerordentliche einzuteilen. Die Anzahl der letzteren ist vergleichungsweise zu der der ersteren verschwindend klein; wenn sie daher vorkommen, so wird immer der Verdacht angeregt, daß sie nicht zufällig eingetreten sind. Laplace bemerkt dabei, wie in gleicher Weise auch Zeugenaussagen, welche außerordentliche Ereignisse bestätigen, besorgen lassen, daß sie auf Täuschung oder Übertreibung beruhen.

7. Formeln der Kombinatorik.

Bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten kommt es stets darauf an, die Anzahl der möglichen und günstigen Fälle zu ermitteln. Hiezu dienen vornehmlich die kombinatorischen Grundoperationen, welche die Bildung von Permutationen, Kombinationen und Variationen zum Gegenstande haben.

Es genügt hier die wichtigsten Formeln anzuführen.

A) Eine Reihe von *n* verschiedenen Elementen permutieren heißt, den Elementen dieser Reihe alle möglichen Anordnungen (Gruppen oder Komplexionen) geben: die Anzahl der Permutationen ist durch

$$P_n = 1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, \ldots \ldots n, \quad \text{symbolisch } P_n = n!$$

gegeben. Sie vermindert sich, wenn unter den n Elementen a gleiche Elemente vorkommen, auf

$$P_n^{(a)} = \frac{n!}{a!},$$

und sie vermindert sich noch weiter auf

$$P_n^{(a,\, b)} = \frac{n!}{a!\, b!},$$

wenn sich außer den a gleichen Elementen einer Art noch b gleiche Elemente einer andern Art vorfinden u. s. w.

$n!$ wird bekanntlich gelesen „Faktorielle n" oder „n Fakultät".

B) Eine Reihe von n Elementen zur r-ten Klasse ohne Wiederholung kombinieren heißt, sie auf alle möglichen Arten in Gruppen von je r Elementen zusammenstellen, derart, daß ein Element in einer Gruppe nur einmal vorkommt; auf die Anordnung der Elemente innerhalb einer Gruppe kommt es dabei nicht an. Die Anzahl der Kombinationen ist

$$K_n^{(r)} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots r}, \text{ symbolisch } K_n^{(r)} = \binom{n}{r}$$

und kann durch Fakultäten ausgedrückt werden, da

$$K_n^{(r)} = \binom{n}{r} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots r} \times$$

$$\times \frac{(n-r)\,(n-r-1)\ldots\ldots 3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\ldots(n-r)} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

ist; die Klassenzahl ist durch die Elementenzahl beschränkt.

Eine Reihe von n Elementen zur r-ten Klasse mit Wiederholung kombinieren heißt, auf alle möglichen Arten Gruppen von r Elementen bilden mit der Maßgabe, daß ein und dasselbe Element in einer Gruppe mehrmal und selbst r-mal sich wiederholen kann; auf die Anordnung der Elemente innerhalb einer Gruppe kommt es nicht an. Die Anzahl solcher Kombinationen ist

$$K_n^{(w,\, r)} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)\ldots\ldots(n+r-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\ldots r},$$

und durch Fakultäten ausgedrückt:

$$K_n^{(w,\, r)} = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}.$$

Die Klassenzahl ist hier unbeschränkt.

Gewöhnlich nennt man die Kombinationen zur ersten, zweiten, dritten, vierten, fünften, ... Klasse auch Unionen, Amben, Ternen, Quaternen, Quinternen, ...

C) Aus einer Reihe von n Elementen Variationen ohne Wiederholung zur r-ten Klasse bilden heißt, auf alle Arten und in allen möglichen Anordnungen Gruppen von je r verschiedenen Elementen bilden. Die Anzahl derartiger Gruppen ist

$$V_n^{(r)} = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1) = r!\binom{n}{r},$$

durch Fakultäten ausgedrückt:

$$V_n^{(r)} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Die Klassenbildung ist durch die Elementenzahl beschränkt. Die Variationen der obersten, n-ten, Klasse fallen mit den Permutationen der Elemente zusammen.

Aus einer Reihe von n Elementen Variationen mit Wiederholung der r-ten Klasse bilden heißt, auf alle möglichen Arten und in allen Anordnungen Gruppen von je r Elementen bilden, worunter sich gleiche Elemente selbst bis zur Anzahl r befinden können. Die Anzahl dieser Gruppen ist

$$V_n^{(w,\,r)} = n^r,$$

und die Klassenbildung ist unbeschränkt.

Bemerkenswert und wichtig ist der Umstand, daß sich die Anzahlen der verschiedenen Arten von Komplexionen, bis auf die Variationen mit Wiederholung, durch Fakultäten darstellen lassen. Demnach würde man für praktische Zwecke mit einer Tafel der Fakultäten das Auskommen finden. Indessen wachsen die Fakultäten mit der Zahl n sehr rasch und werden bei sehr großem n geradezu unberechenbar; um so weniger wären Rechnungen mit mehreren Fakultäten großer Zahlen direkt zu bewerkstelligen.

D) Bekanntlich lautet der binomische Lehrsatz:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots\ldots\ldots +$$
$$+ \binom{n}{n-1}a\,b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Der Binomialkoeffizient des ersten Gliedes ist 1; der Binominalkoeffizient des zweiten, dritten, vierten, ..., $(r+1)$-ten Gliedes ist gleich der Anzahl der Kombinationen der ersten, zweiten, dritten, ..., r-ten Klasse von n Elementen ohne Wiederholung.

Die wichtigsten Eigenschaften der Binomialkoeffizienten sind folgende:

a) Die Binomialkoeffizienten wachsen bis zur Mitte der Binomialreihe und nehmen dann gegen das Ende in umgekehrter Ordnung ab.

Bildet man sämtliche Kombinationen von n Elementen zur r-ten Klasse ohne Wiederholung, so bilden die in der Komplexion nicht enthaltenen $n-r$ Elemente in ihrer Gesamtheit die Kombinationen von denselben n Elementen zur $(n-r)$-ten Klasse ohne Wiederholung, so daß hieraus das Gesetz $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ ohne weiteres folgt. Aus der Gleichung $\binom{n}{n-r}=\binom{n}{r}$ erhält man:

$$\text{für } r=1 \qquad \binom{n}{n-1}=\binom{n}{1}=n,$$

$$\text{für } r=2 \qquad \binom{n}{n-2}=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{1.2},$$

$$\text{für } r=3 \qquad \binom{n}{n-3}=\binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}, \text{ u. s. f.}$$

Die Binomialreihe jeder geraden Potenz eines Binoms hat nur ein Mittelglied; die Binomialreihe jeder ungeraden Potenz eines Binoms hat zwei Mittelglieder.

b) Die Summe aus dem r-ten und $(r+1)$-ten Binomialkoeffizienten einer beliebigen Potenz ist gleich dem $(r+1)$-ten Binomialkoeffizienten der um 1 höheren Potenz; in Zeichen:

$$\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}=\binom{n+1}{r}.$$

Denn es ist $\binom{n}{r}=\binom{n}{r-1}\frac{n-r+1}{r}$, daher

$$\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}=\binom{n}{r-1}\left(1+\frac{n-r+1}{r}\right)=\binom{n}{r-1}\frac{n+1}{r}=\binom{n+1}{r}.$$

Darnach ist beispielsweise $\binom{3}{1}+\binom{3}{2}=\binom{4}{2}$, $\binom{4}{2}+\binom{4}{3}=\binom{5}{3}$, u. s. f.; d. h. zwei aufeinander folgende Binomialkoeffizienten der n-ten Potenz geben einen Binomialkoeffizienten der $(n+1)$-ten Potenz zur Summe.

Sollen die Formeln

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!} \quad \text{und} \quad \binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$$

noch für $n=r$ gelten, so muß man als Definition setzen:

$$0! = 1 \text{ und } \binom{n}{0} = 1;$$

dann gilt die Formel $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ auch für $r = 0$.

Für den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{r}$ werden auch häufig die Zeichen $B_r^{(n)}$ oder n_r gebraucht. Das Zeichen $B_r^{(n)}$ erinnert an den Namen „Binomialkoeffizienten".

E) Mit einer von Chr. Kramp stammenden Bezeichnung für Produkte aufeinander folgender Zahlen, wonach für das Produkt $n(n-1) \ldots\ldots (n-r+1)$ das Symbol $n^{r/-1}$ oder auch das Symbol $(n-r+1)^{r/1}$ gebraucht wird, läßt sich

$$n! \text{ auch in der Form } 1^{n/1},$$

$$\frac{n!}{a!\,b!} \quad \text{in der Form } \frac{1^{n/1}}{1^{a/1}\,1^{b/1}},$$

$$\binom{n}{r} \quad \text{in der Form } \frac{n^{r/-1}}{1^{r/1}}$$

u. s. w. schreiben.

8. Die Formel von Stirling.

Für die mathematische Ausbildung der Wahrscheinlichkeitstheorie bedeutete es einen großen Fortschritt, als es gelang, eine Funktion zu finden, welche den Wert der Fakultät einer großen Zahl angenähert gibt und rechnerisch leicht zu handhaben ist. De Moivre hat den Weg hiezu angegeben und war zu einem Resultate gelangt, in welchem ihm nur noch die Natur einer in Form einer unendlichen Reihe dargestellten Konstanten ($\sqrt{2\pi}$) unbekannt blieb. Stirling gelang es, durch Auffindung des Wertes dieser Konstanten den vollendenden Schritt zu tun; nach ihm wurde später auch die Näherungsformel benannt; die Ableitung derselben soll nachstehend gegeben werden.

Bekanntlich ist

$$n! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots\ldots n.$$

Ersetzt man im rechten Teile dieser Gleichung jeden der n Faktoren durch den letzten, n, so resultiert n^n, welche Potenz offenbar größer als $n!$ ist. Nun setze man

$$1) \qquad n! = n^n\,\varphi(n)$$

und es handelt sich darum, für $\varphi(n)$ einen Näherungswert zu finden, wenn n groß ist. Ersetzt man in 1) n durch $n+1$, so folgt

$$(n+1)! = (n+1)^{n+1}\,\varphi(n+1),$$

oder wenn beiderseits durch $n+1$ abgekürzt wird,

$$2) \qquad n! = (n+1)^n\,\varphi(n+1).$$

Dividiert man 2) durch 1), so resultiert:

$$1 = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)},$$

daraus

$$\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Nun ist bekanntlich $\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{\cdot}71828\ldots\ldots$, daher wird, wenn n groß ist, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ sehr wenig von $\frac{1}{e} = e^{-1}$ differieren. Für endliche Werte von n ist $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ kleiner als e; speziell für $n=1$ erhält diese Potenz den Wert 2.

Aus dem Gesagten geht hervor, daß sich das Verhältnis $\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}$ mit beständig wachsendem n dem Werte e^{-1} nähert. Da die Entwicklung für große n gemacht wird, so kann man demnach näherungsweise setzen

$$3) \qquad \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = e^{-1},$$

wobei festzuhalten ist, daß diese Formel nur für ein unendlich großes n streng richtig ist. Es fragt sich nun, welche Annahme für $\varphi(n)$ mit dem gemachten, näherungsweise gültigen Ansatz 8) verträglich erscheint. Offenbar die Annahme $\varphi(n) = e^{-n}$, denn dann ist $\varphi(n) = e^{-n-1}$.

Man kann also setzen:

$$4) \qquad n! = n^n e^{-n}\,\psi(n),$$

worin der Faktor $\psi(n)$ wieder den Ausgleich herbeizuführen hat. Dieser Faktor ist nicht konstant, sondern mit n veränderlich; ist n hinlänglich groß, so ist diese Änderung bei wachsendem n eine langsame. Nachstehend soll ein Näherungswert für $\psi(n)$ bestimmt werden. Setzt man in 4) $n+1$ statt n, so folgt:

$$(n+1)! = (n+1)^{n+1} e^{-n-1}\,\psi(n+1);$$

wird beiderseits durch $n+1$ abgekürzt, so resultiert:

5) $$n! = (n+1)^n e^{-n-1} \psi(n+1).$$

Dividiert man diese Gleichung durch 4), so ergibt sich:

$$1 = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n e^{-1} \frac{\psi(n+1)}{\psi(n)} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n e^{-1} \frac{\psi(n+1)}{\psi(n)},$$

woraus folgt:

$$\frac{\psi(n+1)}{\psi(n)} = e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Um für die rechte Seite dieser Gleichung einen Wert zu finden, setze man

$$e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = z$$

und nehme beiderseits die natürlichen Logarithmen; dann entsteht

$$l z = 1 - n\, l\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Wird $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ in eine Reihe entwickelt,*) so ergibt sich:

$$l z = 1 - n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \cdots\cdots\right) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + \cdots\cdots;$$

es ist somit

$$z = e^{\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + \cdots\cdots}.$$

Beschränkt man sich im Exponenten auf die Glieder von der Ordnung $\frac{1}{n}$, so kann man schreiben

$$z = e^{\frac{1}{2n}}.$$

Entwickelt man diese Exponentialfunktion in eine Reihe**) und beschränkt sich hiebei auf die zwei ersten Glieder, so ergibt sich

$$z = 1 + \frac{1}{2n}.$$

---

*) Bekanntlich ist $l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\cdots, \quad -1 < x \leqq +1.$

**) Für jeden Wert von x gilt die Reihe:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots$$

Man hat also

$$\frac{\psi(n+1)}{\psi(n)} = 1 + \frac{1}{2n}.$$

Bis zu demselben Grade der Annäherung findet man mit Zuhilfenahme der Binomialreihe:

$$\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{1+\frac{1}{n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2n}.$$

Wenn man also alle Glieder, welche im Nenner n in der zweiten und höheren Potenz enthalten, vernachlässigt, so ändert sich die Funktion $\psi(n)$ mit n ebenso wie $\sqrt{n}$. Man kann daher näherungsweise setzen:

$$\psi(n) = \sqrt{n};$$

die genaue Form für $\psi(n)$ wäre eigentlich

$$\psi(n) = \sqrt{n}\, F(n)$$

und hiemit erhielte man:

$$6) \qquad n! = n^n e^{-n} \sqrt{n}\, F(n).$$

Die Funktion $F(n)$ ändert sich sehr langsam, wenn n groß ist; das Verhältnis $\frac{F(n+1)}{F(n)}$ reduziert sich nach früherem auf die Einheit, wenn die Glieder mit $\frac{1}{n^2}$ vernachlässigt werden.

Um einen Näherungswert für $F(n)$ zu finden, könnte man denselben Weg einschlagen, welcher vorher für die Berechnung der Näherungswerte der Funktionen $\varphi(n)$ und $\psi(n)$ eingehalten wurde. Es ist jedoch gestattet, mit diesem Vorgange hier abzubrechen, da man zeigen kann, daß $F(n)$ einem konstanten Werte zustrebt, welchen man für $F(n)$ nehmen kann, wenn n sehr groß ist.

Da $\frac{F(n+1)}{F(n)}$ sich auf die Einheit reduziert, wenn man $\frac{1}{n^2}$ vernachlässigt, so kann man setzen

$$\frac{F(n+1)}{F(n)} = 1 + \frac{\lambda_1}{n^2},$$

worin λ_1 einen endlichen Wert hat. Man kann also schreiben

$$\frac{F(n+2)}{F(n+1)} = 1 + \frac{\lambda_2}{(n+1)^2},$$

$$\frac{F(n+3)}{F(n+2)} = 1 + \frac{\lambda_3}{(n+2)^2},$$

....

$$\frac{F(n+p)}{F(n+p-1)} = 1 + \frac{\lambda_p}{(n+p-1)^2},$$

wobei $\lambda_2, \lambda_3, \ldots\ldots, \lambda_p$ endliche Größen sind. Durch Multiplikation der vorhergehenden Gleichungen folgt

$$7)\quad \frac{F(n+p)}{F(n)} = \left\{1+\frac{\lambda_1}{n^2}\right\}\left\{1+\frac{\lambda_2}{(n+1)^2}\right\}\cdots\cdots\left\{1+\frac{\lambda_p}{(n+p-1)^2}\right\}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung und folglich auch die linke Seite, welche ihr gleich ist, nähert sich mit wachsendem n immer mehr der Einheit, p kann hiebei irgend einen endlichen (großen oder kleinen) Wert haben. In der Tat, hat man allgemein

$$8)\qquad l\left(1+\frac{\lambda}{n^2}\right) = \frac{\lambda}{n^2}(1+\Theta),$$

worin Θ mit wachsendem n immer mehr der Null sich nähert. Der Logarithmus der rechten Seite von 7) ist

$$l\left\{1+\frac{\lambda_1}{n^2}\right\} + l\left\{1+\frac{\lambda_2}{(n+1)^2}\right\} + \cdots\cdots + l\left\{1+\frac{\lambda_p}{(n+p-1)^2}\right\};$$

wegen 8) geht diese Summe über in

$$\frac{\lambda_1}{n^2}(1+\Theta_1) + \frac{\lambda_2}{(n+1)^2}(1+\Theta_2) + \cdots\cdots + \frac{\lambda_p}{(n+p-1)^2}(1+\Theta_p).$$

Diese Summe nähert sich mit wachsendem n der Null, und zwar deshalb, weil die Reihe, deren allgemeines Glied $\frac{1}{n^2}$ heißt, eine konvergente ist. Die Summe aller Glieder dieser letzteren Reihe, vom Gliede $\frac{1}{n^2}$ angefangen, ist sehr klein, sobald n hinreichend groß angenommen wird; diese Summe bleibt auch sehr klein, wenn die Glieder derselben mit Faktoren multipliziert werden, welche endliche Größen sind. Hiemit wurde bewiesen, daß $l\frac{F(n+p)}{F(n)} = 0$ ist; es ist demnach $\frac{F(n+p)}{F(n)} = 1$, d. h. $F(n)$ strebt mit wachsendem n einer konstanten Grenze zu. Bezeichnet man letztere mit G, so kann man schreiben:

$$9)\qquad n! = G\, n^n e^{-n} \sqrt{n}.$$

Diese Formel drückt das Theorem von Moivre aus; letzterer erkannte, daß zu dem Produkte der drei Faktoren $n^n e^{-n}\sqrt{n}$ ein konstanter Faktor G hinzutreten müsse, um $n!$ zu erhalten. Moivre konnte aber den Wert dieser Konstanten nicht bestimmen. Er teilte das von ihm gefundene Resultat Stirling mit, dem es auch gelang,

diese Konstante G zu ermitteln. **Stirling** erkannte auch, daß G mit dem Kreise im Zusammenhange steht.

Nach dem Theorem von **Wallis** (siehe den nächsten Punkt) hat man

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{2.2.4.4.6.6\ldots\ldots 2n.2n}{1.3.3.5.5.7\ldots(2n-1)(2n+1)}.$$

Ist n sehr groß, so kann man für die unendlich vielen Faktoren im Zähler und Nenner eine endliche Anzahl setzen und schreiben

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6\ldots\ldots 2n.2n}{1.3.3.5.5.7\ldots\ldots(2n-1)(2n+1)}.$$

Hieraus folgt nun durch einfache Transformation

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2^{2n}(1.1.2.2.3.3\ldots\ldots n.n)}{\{1.3.5.7\ldots(2n-1)\}\{1.3.5.7\ldots\ldots(2n-1)(2n+1)\}} =$$

$$= \frac{2^{2n}(n!)^2}{\{1.3.5.7\ldots(2n-1)\}\{1.3.5.7\ldots(2n-1)(2n+1)\}} =$$

$$= \frac{2^{2n}(n!)^2(2.4.6\ldots\ldots 2n)^2}{(2n!)^2(2n+1)} =$$

$$= \frac{2^{2n}(n!)^2 2^{2n}(1.2.3\ldots n)^2}{(2n!)^2(2n+1)} = \frac{2^{2n}(n!)^2 2^{2n}(n!)^2}{(2n!)^2(2n+1)};$$

man hat also

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n!)^2(2n+1)}.$$

Mit Benützung der Formel 9) kann man hierin setzen

$$n! = G n^n e^{-n}\sqrt{n}, \quad 2n! = G(2n)^{2n} e^{-2n}\sqrt{2n}$$

und erhält

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2^{4n} n^{4n} e^{-4n} n^2 G^4}{(2n)^{4n} e^{-4n} 2n G^2 (2n+1)} = \frac{n G^2}{2(2n+1)},$$

oder

$$\pi = \frac{n}{2n+1} G^2.$$

Da n sehr groß vorausgesetzt wird, so unterscheidet sich $\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{n}}$ sehr wenig von $\frac{1}{2}$, so daß man setzen kann $\pi = \frac{1}{2} G^2$; hieraus ergibt sich schließlich

10) $$G = \sqrt{2\pi}.$$

Setzt man diesen Wert in 9) ein, so erhält man als Schlußresultat

11) $$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2 \pi n}.$$

Dies ist die sogenannte Stirlingsche Formel. Wie aus der Herleitung hervorgeht, gibt die rechte Seite immer einen zu kleinen Wert für die linksstehende Fakultät. Genauer ist

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2 \pi n} \left(1 + \frac{1}{12 n} + \frac{1}{288 n^2} + \cdots\cdots\right).$$

In den Anwendungen dieser Formel auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung genügt es, den vor der Klammer stehenden Faktor allein zu benützen.

Um die Natur der merkwürdigen Näherungsformel 11) erkennen zu lassen und zu zeigen, daß sie schon bei mäßigen Werten von n gut verwendbar ist, seien nachstehende Beispiele angeführt:

Es ist

$$10! = 3\,628\,800$$
$$10^{10} e^{-10} \sqrt{20 \pi} = 3\,598\,699$$

die Differenz $=$ 30 101 macht 0·008 .... oder 0·8 .... % des richtigen Wertes aus.

$$20! = 2_{\prime\prime\prime} 432902_{\prime\prime} 008176, 640000$$
$$20^{20} e^{-20} \sqrt{40 \pi} = 2_{\prime\prime\prime} 422786_{\prime\prime} 385510, 400000$$

die Differenz $=$ $10115_{\prime\prime} 622666, 240000$

macht 0·00417 .... oder 0·4 .... % des richtigen Wertes aus.

$$30! = 265_{\prime\prime\prime\prime\prime} 252859_{\prime\prime\prime\prime} \ldots\ldots$$
$$30^{30} e^{-30} \sqrt{60 \pi} = 264_{\prime\prime\prime\prime\prime} 517093_{\prime\prime\prime\prime} \ldots\ldots$$

die Differenz $=$ $735766_{\prime\prime\prime\prime} \ldots\ldots$

macht 0·0028 ... oder 0·28 ... % des richtigen Wertes aus.

Genau ist:

$$30! = 265_{\prime\prime\prime\prime\prime} 252859_{\prime\prime\prime\prime} 810729_{\prime\prime\prime} 458636_{\prime\prime} 308480, 000000.$$

Der absolute Fehler, den man bei Anwendung der Formel 11) begeht, wächst also mit n ins Ungeheure, der relative Fehler aber nimmt mit wachsendem n ab und ist selbst bei $n = 10$ so klein, daß er für praktische Zwecke fast ausnahmslos zulässig erscheint.

Die Herleitung der Formel von Stirling wurde dem Werke „Calcul des Probabilités" par J. Bertrand, Paris 1889, entnommen. Siehe daselbst Seite 72, Punkt 56.

9. Herleitung der Formel von Wallis.

Wendet man auf das Integral

$$\int \sin^m x\,dx = \int \sin^{m-1} x \sin x\,dx,$$

worin m eine positive ganze Zahl $\overline{\gtrless} 2$ bedeutet, die partielle oder teilweise Integration an, indem man setzt:

$$u = \sin^{m-1} x, \qquad dv = \sin x\,dx,$$

also

$$du = (m-1)\sin^{m-2} x \cos x\,dx, \qquad v = -\cos x,$$

so erhält man

$$\int \sin^m x\,dx = -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1)\int \sin^{m-2} x \cos^2 x\,dx =$$

$$= -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1)\int \sin^{m-2} x (1-\sin^2 x)\,dx =$$

$$= -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1)\int \sin^{m-2} x\,dx - (m-1)\int \sin^m x\,dx;$$

schafft man das zweite Integral im rechten Teile der Gleichung in den linken, so folgt:

$$m\int \sin^m x\,dx = -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1)\int \sin^{m-2} x\,dx$$

und hieraus

$$1) \quad \int \sin^m x\,dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x\,dx.$$

Diese Reduktionsformel erniedrigt die Potenz m von $\sin x$ um zwei Einheiten und führt durch wiederholte Anwendung zu

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \text{ wenn } m \text{ ungerade ist,}$$

oder zu

$$\int dx = x + C, \text{ wenn } m \text{ gerade ist.}$$

Mit Rücksicht auf 1) hat man nun

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx = -\left\{\frac{\sin^{m-1} x \cos x}{m}\right\}_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{m-1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x\,dx,$$

oder weil das erste Glied im rechten Teile für beide Grenzen verschwindet,

$$2)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx = \frac{m-1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x\,dx,$$

d. i. für ganze positive m eine Reduktionsformel mit den Schlußintegralen

$$3)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Bezeichnet man das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx$ der Kürze wegen mit J_m, so ergibt sich:

$$\begin{array}{ll}
J_0 = \frac{\pi}{2}, & J_1 = 1, \\
J_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & J_3 = \frac{2}{3}, \\
J_4 = \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\pi}{2}, & J_5 = \frac{2.4}{3.5}, \\
J_6 = \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\pi}{2}, & J_7 = \frac{2.4.6}{3.5.7}, \\
J_8 = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{\pi}{2}, & J_9 = \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}, \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Für $m = 2p$ gibt p-mal wiederholte Anwendung der Reduktionsformel 2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} x\,dx = \frac{1.3.5\ldots\ldots(2p-3)(2p-1)}{2.4.6\ldots\ldots(2p-2)\;2p}\cdot\frac{\pi}{2};$$

für $m = 2p + 1$ erhält man

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1} x\,dx = \frac{2.4.6\ldots\ldots(2p-2)\;2p}{3.5.7\ldots\ldots(2p-1)(2p+1)};$$

Bemerkenswert ist die Transzendenz des Resultates für gerade m und seine Rationalität für ungerade m.

Auf Grund dieser Untersuchung kann man nun die bemerkenswerte Formel von Wallis ableiten, durch welche die transzendente Zahl $\frac{\pi}{2}$ zwischen beliebig enge rationale Grenzen eingeschlossen wird.

In dem Intervalle 0 bis einschließlich $\frac{\pi}{2}$ ist

$$\sin^{2p-1} x \geqq \sin^{2p} x \geqq \sin^{2p+1} x,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur an den Grenzen des Intervalls Geltung hat; daraus folgt, daß

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} x\, dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} x\, dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1} x\, dx,$$

also

$$\frac{2.4\ldots.(2p-2)}{3.5\ldots.(2p-1)} > \frac{1.3\ldots.(2p-1)}{2.4\ldots\ldots 2p} \cdot \frac{\pi}{2} > \frac{2.4\ldots\ldots 2p}{3.5\ldots.(2p+1)},$$

woraus

$$\frac{2.2.4\ldots\ldots(2p-2)\,2p}{1.3.3\ldots\ldots(2p-1)\,(2p-1)} > \frac{\pi}{2} > \frac{2.2.4\ldots\ldots\ldots\ldots 2p.2p}{1.3.3\ldots\ldots(2p-1)\,(2p+1)};$$

nun ist die obere Grenze

$$\frac{2.2.4\ldots\ldots(2p-2)\,2p}{1.3.3\ldots\ldots(2p-1)\,(2p-1)} = \frac{2.2.4\ldots\ldots\ldots\ldots 2p.2p}{1.3.3\ldots\ldots(2p-1)\,(2p+1)} \cdot \frac{2p+1}{2p},$$

daher weiter

$$1 + \frac{1}{2p} > \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{2.2\ldots\ldots\ldots\ldots 2p.2p}{1.3\ldots\ldots(2p-1)\,(2p+1)}} > 1.$$

Daraus ersieht man, daß

$$4) \quad \frac{\pi}{2} = \lim_{p=+\infty} \frac{2.2.4.4\ldots\ldots\ldots\ldots 2p.2p}{1.3.3.5\ldots\ldots(2p-1)\,(2p+1)} = \frac{2.2.4.4\ldots\ldots}{1.3.3.5\ldots\ldots}.$$

Diese Darstellung von $\frac{\pi}{2}$ durch ein konvergentes unendliches Produkt hat zuerst John Wallis, und zwar vor Erfindung der Infinitesimalrechnung gegeben; nach ihm heißt 4) die Wallissche Formel.

———

II. Abschnitt.

Theorem von Jakob Bernoulli. Umkehrung dieses Theorems.

1. Von der Gesetzmäßigkeit in der Wiederholung eines Ereignisses und der Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen desselben, sobald die Zahl der Versuche stark anwächst.

Die Erfahrung zeigt, daß sich mit wachsender Zahl der Versuche eine gewisse Gesetzmäßigkeit in der Wiederkehr der bei dem einzelnen Versuch auftretenden Resultate einstellt. Diese Tatsache ist die Folge eines für die Wahrscheinlichkeitstheorie höchst wichtigen Gesetzes, dessen Untersuchung und Klarlegung den Inhalt dieses Abschnittes bilden. Um zu zeigen, worin das Wesen dieses Gesetzes besteht, sollen zwei einfache Beispiele betrachtet werden.

Es sei ein völlig gleichmäßig gearbeiteter Würfel vorausgesetzt, dessen sechs Flächen mit den Ziffern 1 bis 6 beschrieben sind. Mit diesem Würfel werde eine große Zahl von Würfen ausgeführt und die bei jedem Wurfe erscheinende Ziffer notiert. Nach Beendigung des Versuches wird man finden, daß alle Ziffern nahezu gleich oft zum Vorschein kamen, daß also das Verhältnis der Zahl der einer bestimmten Ziffer günstigen Würfe zur Gesamtzahl der Würfe sich wenig von dem Bruche $\frac{1}{6}$ unterscheiden wird, und zwar umso weniger, je größer die Zahl der Würfe ist.

Man nehme ein Kartenspiel von 52 Blättern, wovon 12 Blätter Figuren aufweisen. Dieses Kartenspiel mische man, hebe die oberste Karte ab und notiere, ob dieselbe eine Figur aufweist oder nicht. Dann stecke man die Karte wieder in das Spiel, mische von neuem und wiederhole den Versuch.

Vergleicht man nach einer größeren Zahl von Versuchen die Zahl der abgehobenen Karten, welche eine Figur aufwiesen, mit der Zahl jener Karten, welche ohne Figur waren, so wird sich das Verhältnis dieser Zahlen umso weniger von dem Bruche $\frac{12}{40} = \frac{3}{10}$ unterscheiden, je größer die Zahl der Versuche war.

Die Gesetzmäßigkeit in der Wiederholung der einzelnen Resultate bei einer größeren Zahl von Versuchen ist derartig in die Augen springend, daß man sie als etwas völlig Gewisses entgegen nehmen muß.

Zu Anfang des 18. Jahrhunderts veröffentlichte Jakob Bernoulli seinen Beweis dieser Gesetzmäßigkeit, welcher unter dem Namen „Theorem von Jakob Bernoulli" bekannt geworden ist.

2. Entwicklung der Fragestellung für das Theorem von Bernoulli.

Aus der Verwirklichung gewisser allgemeiner Bedingungen möge mit Notwendigkeit eines der Ereignisse E, F hervorgehen; für das Eintreten des ersten bestehe die Wahrscheinlichkeit p, für das Eintreten des zweiten die Wahrscheinlichkeit q, so daß $p + q = 1$ ist. Die Verwirklichung (Versuch, Beobachtung) soll nicht einmal, sondern s-mal geschehen; jedoch sei ausdrücklich vorausgesetzt, daß der Komplex der allgemeinen Bedingungen in dem Sinne unveränderlich bleibe, daß die Wahrscheinlichkeiten p und q bei jedem Versuche dieselben Werte besitzen. Das einfachste Schema für diesen Sachverhalt kann in wiederholten Ziehungen einer Kugel aus einer Urne erblickt werden, welche weiße und schwarze Kugeln in bestimmtem Mengenverhältnis enthält; die gezogene Kugel wird jedesmal zurückgelegt und unter die anderen gemengt, ehe der nächste Zug geschieht; das Erscheinen einer weißen Kugel gelte als Ereignis E, das Erscheinen einer schwarzen Kugel als Ereignis F.

Wenn man bloß die Wiederholungszahlen der Ereignisse E, F in Betracht zieht und von ihrer Reihenfolge, falls sie überhaupt feststellbar wäre, absieht, so sind $s + 1$ verschiedene Gesamterfolge der s Beobachtungen möglich. Es kann

das Ereignis	E	s-mal,	das Ereignis	F	gar nicht,
„	E	$(s-1)$-mal,	„	F	1-mal,
„	E	$(s-2)$-mal,	„	F	2-mal,
. . . . .	. . .	. . . . .	. . . . .	. . .	. . . . .
das Ereignis	E	gar nicht,	das Ereignis	F	s-mal

eintreten. Die Wahrscheinlichkeiten dieser Kombinationen sind bestimmt durch die aufeinander folgenden Glieder der nach fallenden Potenzen von p geordneten Entwicklung von

$$(p+q)^s = p^s + \binom{s}{1} p^{s-1} q + \binom{s}{2} p^{s-2} q^2 + \cdots\cdots + \binom{s}{n} p^m q^n + \cdots\cdots + q^s$$

oder in anderer Schreibart der Binomialkoeffizienten durch

$$(p+q)^s = p^s + \frac{s!}{(s-1)!\,1!} p^{s-1} q + \frac{s!}{(s-2)!\,2!} p^{s-2} q^2 + \cdots\cdots +$$
$$+ \frac{s!}{m!\,n!} p^m q^n + \cdots\cdots + q^s, \quad (m+n=s).$$

Die Summe aller hierin vorkommenden Wahrscheinlichkeiten ist offenbar gleich Eins; insbesondere stellt das Glied

$$1) \qquad \frac{s!}{m!\,n!} p_m q_n, \text{ worin } m+n=s,$$

die Wahrscheinlichkeit dar, daß der Gesamterfolg in der m-maligen Wiederholung von E und der n-maligen Wiederholung von F bestehen werde, und zwar ohne Rücksicht auf die Reihenfolge dieser Ereignisse. Die Wahrscheinlichkeit, daß in irgend einer vorgeschriebenen Ordnung der erwähnte Gesamterfolg bestehen werde, ist bekanntlich $p^m q^n$, wobei $m+n=s$.

Es mag hervorgehoben werden, daß diese Wahrscheinlichkeitsmessung für einen Gesamterfolg gerade so wie die Wahrscheinlichkeitsbestimmung für den einzelnen Versuch lediglich auf der Wahrscheinlichkeitsdefinition beruht und demgemäß folgenden Sinn hat: In dem Gesamtumfange der Ausführungsmöglichkeiten der s Versuche machen diejenigen, welche mit Notwendigkeit zu dem in Rede stehenden Gesamterfolge hinführen, einen Teil aus, dessen Verhältnis zum Ganzen durch die Zahl 1) bestimmt ist.

Hinsichtlich der möglichen Erfolge der s Versuche sind nun zwei Fragen von besonderer Bedeutung:

a) Welcher unter den Erfolgen ist der wahrscheinlichste?

b) Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß sich ein Erfolg einstellen werde, der von dem wahrscheinlichsten nicht mehr als innerhalb vorgegebener Grenzen abweicht?

Der Sinn des Wortes „Abweichung" ist hier der folgende: Sind m', n' die Wiederholungszahlen von E und F in der wahrscheinlichsten Kombination, so weist eine Kombination mit den Wieder-

holungszahlen m, n die Abweichung $m-m'=-(n-n')$ (folgt aus $m+n=m'+n'$) auf; um so viel übertrifft (wenn $m-m'>0$) die Wiederholungszahl von E in der letzteren Kombination jene in der wahrscheinlichsten Kombination, oder um so viel bleibt sie hinter ihr zurück (wenn $m-m'<0$).

Die Beantwortung der aufgestellten Fragen bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten dar. Die erste erfordert die Feststellung des größten Gliedes in der Entwicklung von $(p+q)^s$; die Exponenten von p, q in diesem Gliede kennzeichnen die wahrscheinlichste Kombination, der Wert des Gliedes selbst gibt ihre Wahrscheinlichkeit. Um die zweite Frage zu beantworten, hätte man jene Glieder der Entwicklung auszurechnen, welche Abweichungen innerhalb der vorgezeichneten Grenzen aufweisen; ihre Summe gäbe die Wahrscheinlichkeit, daß diese Grenzen nicht überschritten werden.

Ist s eine nur mäßige Zahl und sind auch p, q durch kleine Zahlen ausgedrückt, so verursacht die Ausführung dieser Rechnungen keine große Mühe. Es sollen zwei Beispiele in dieser Art erledigt werden, um daran einige Beobachtungen zu knüpfen.

3. Beispiele.

1. Beispiel. Aus einer Urne, welche zwei weiße und eine schwarze Kugel enthält, mögen 6 Ziehungen vorgenommen werden.

Die Entwicklung

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^6=\left(\frac{2}{3}\right)^6+6\left(\frac{2}{3}\right)^5\frac{1}{3}+15\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^2+20\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^3+$$
$$+15\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^4+6\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^5+\left(\frac{1}{3}\right)^6=\frac{64}{729}+\frac{192}{729}+\frac{240}{729}+\frac{160}{729}+$$
$$+\frac{60}{729}+\frac{12}{729}+\frac{1}{729}$$

zeigt, daß die Kombination, 4 weiße und 2 schwarze Kugeln zu ziehen, unter allen die wahrscheinlichste ist; auf die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, daß die Wiederholungszahl der weißen Kugel nicht über 5 und nicht unter 3 falle, die Abweichung von der wahrscheinlichsten Wiederholungszahl also nicht mehr als 1 nach auf- oder abwärts betrage, gibt sie die Antwort:

$$\frac{192}{729}+\frac{240}{729}+\frac{160}{729}=\frac{592}{729}.$$

2. Beispiel. Aus derselben Urne sollen doppelt so viel, das sind 12 Ziehungen vorgenommen werden.

Die 13 Glieder der nach fallenden Potenzen von $\frac{2}{3}$ geordneten Entwicklung von $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^{12}$ sind Brüche mit dem Nenner 531441 und den Zählern:

4096, 24576, 67584, 112640, 126720, 101376, 59136, 25344, 7920, 1760, 264, 24, 1.

Daraus ist zu entnehmen, daß die Kombination von 8 weißen und 4 schwarzen Kugeln die wahrscheinlichste ist; daß ferner die Wahrscheinlichkeit, weiß werde nicht öfter als 10-mal und nicht seltener als 6-mal sich einstellen, gleich ist

$$\frac{67584}{531441}+\frac{112640}{531441}+\frac{126720}{531441}+\frac{101376}{531441}+\frac{59136}{531441}=\frac{467456}{531441}.$$

Aus diesen Beispielen sei folgendes hervorgehoben:

Bei 6 Versuchen hat die wahrscheinlichste Kombination die Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{240}{729}=0\cdot3030\ldots,$$

bei 12 Versuchen — die übrigen Umstände blieben unverändert — die Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{126720}{531441}=0\cdot2380\ldots\ldots$$

Die Wahrscheinlichkeit für die wahrscheinlichste Kombination hat sich mit der wachsenden Anzahl der Versuche vermindert. Diese Erscheinung kann nicht überraschen, wenn man beachtet, daß mit der Anzahl der Versuche auch die Menge der möglichen Erfolge wächst.

Für die Grenzen 5, 3 der Wiederholungszahl weißer Kugeln ergab sich bei 6 Versuchen die Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{592}{729}=0\cdot81207\ldots\ldots;$$

für die Grenzen 10, 6 bei 12 Versuchen die Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{467456}{531441}=0\cdot8796\ldots\ldots$$

Das Verhältnis der Grenzen zur Gesamtzahl der Versuche ist beidemal dasselbe, nämlich $\frac{5}{6}=\frac{10}{12}$ und $\frac{3}{6}=\frac{6}{12}$; die Wahrscheinlichkeit der Nichtüberschreitung dieser Grenzen fiel das zweite Mal größer aus.

Die Reihe der Wahrscheinlichkeiten ist asymmetrisch, nach der Seite des Ereignisses mit der größeren Wahrscheinlichkeit kürzer und aus größeren Zahlen bestehend. Sie würde symmetrisch ausfallen, wenn $p = q = \frac{1}{2}$ wäre.

Bei sehr großen Werten von s und weiteren Grenzen der Abweichung wird die direkte Erledigung der gestellten Fragen wegen der Weitläufigkeit und Umständlichkeit der erforderlichen Rechnungen physisch undurchführbar. Für solche Fälle sind seit der Zeit, da Jakob Bernoulli diese Untersuchungen in Angriff genommen, Näherungsmethoden ausgebildet worden, um welche sich insbesondere A. de Moivre, J. Stirling, C. Maclaurin, L. Euler und P. S. Laplace verdient gemacht haben. Mit der Entwicklung dieser Analyse und ihrer Anwendung auf verschiedene Probleme beschäftigen sich die folgenden Punkte.

4. Die wahrscheinlichste Kombination der einander entgegengesetzten Ereignisse E und F bei s-maliger Wiederholung des Versuches.

Diese Ermittlung fällt mit der Aufsuchung des größten Gliedes der Entwicklung von $(p+q)^s$ zusammen. Dieses Glied sei mit T_0 bezeichnet, ferner sei die Zahl, welche angibt, wie oft bei der wahrscheinlichsten Kombination das Ereignis E eintrifft, gleich m und die Zahl, welche angibt, wie oft hiebei F eintrifft, gleich n. Das größte Glied des aufgelösten Binoms $(p+q)^s$ hat dann die folgende Form: $T_0 = \binom{s}{n} p^m q^n = \frac{s!}{m!\,n!} p^m q^n$, wobei $m + n = s$ ist.

Die Zahlen m und n sollen nun bestimmt werden. Das dem Gliede T_0 vorangehende Glied sei T_1, das nachfolgende T_{-1}. Es ist alsdann

$$T_1 = \binom{s}{n-1} p^{m+1} q^{n-1} = \frac{s!}{(n-1)!\,(m+1)!} p^{m+1} q^{n-1},$$

$$T_{-1} = \binom{s}{n+1} p^{m-1} q^{n+1} = \frac{s!}{(n+1)!\,(m-1)!} p^{m-1} q^{n+1}.$$

Die drei Glieder T_0, T_1, T_{-1} stehen sonach zu einander in der Beziehung

$$T_1 < T_0 > T_{-1},$$

oder

$$\frac{s!}{(n-1)!\,(m+1)!} p^{m+1} q^{n-1} < \frac{s!}{m!\,n!} p^m q^n > \frac{s!}{(n+1)!\,(m-1)!} p^{m-1} q^{n+1},$$

woraus nach entsprechender Kürzung einerseits

1) $$\frac{p}{m+1} < \frac{q}{n}$$

und anderseits

2) $$\frac{p}{m} > \frac{q}{n+1}$$

folgt. Aus diesen zwei Ungleichungen kann man zunächst q und n mittels der Beziehungen $q = 1 - p$, $n = s - m$ eliminieren und sodann die Ungleichungen umformen; man gelangt hiedurch zu zwei Grenzen für m.

Aus 1) ergibt sich

$$\frac{p}{m+1} < \frac{1-p}{s-m} \quad \text{oder} \quad ps - pm < m + 1 - pm - p, \quad ps < m + 1 - p,$$

daraus endlich

3) $$m > ps + p - 1 \quad \text{oder} \quad m > ps - q.$$

Da p, q, s gegeben sind, ist durch 3) eine untere Grenze für m gegeben.

Als untere Grenze für n würde man auf gleichem Wege erhalten:

4) $$n > qs + q - 1 \quad \text{oder} \quad n > qs - p.$$

Aus 2) folgt:

$$\frac{p}{m} > \frac{1-p}{s-m+1} \quad \text{oder} \quad ps - pm + p > m - pm, \quad ps + p > m.$$

Durch

5) $$m < ps + p$$

ist eine obere Grenze für m gegeben.

Als obere Grenze für n würde man finden:

6) $$n < qs + q.$$

Für m besteht also die Beziehung

7) $$ps + p - 1 < m < ps + p \quad \text{oder} \quad ps - q < m < ps + p,$$

die Beziehung für n lautet:

8) $$qs + q - 1 < n < qs + q \quad \text{oder} \quad qs - p < n < qs + q.$$

Die Ungleichungen 7) sagen aus, daß die Zahl m der Wiederholungen des Ereignisses E, welche der wahrscheinlichsten Kombination entspricht, in den Grenzen

$$ps - q \quad \text{und} \quad ps + p$$

eingeschlossen ist. Da die Differenz dieser Grenzen gleich $p + q = 1$ ist, muß m diejenige ganze Zahl sein, welche als einzige zwischen den angegebenen Grenzen liegt. Ist ps selbst eine ganze Zahl, dann ist $m = ps$. Hienach ist $n = s - m = s(1 - p) = qs$ und

9) $$m : n = p : q,$$

d. h. die wahrscheinlichste von allen Kombinationen, zu welchen eine s-malige Wiederholung des Versuches führen kann (immer vorausgesetzt, daß jeder Versuch eines der beiden entgegengesetzten Ereignisse E und F zur notwendigen Folge hat und daß die Wahrscheinlichkeiten p und q während aller Versuche konstant bleiben), ist diejenige Kombination, bei welcher sich die Zahl der Wiederholungen von E zur Zahl der Wiederholungen von F verhält, wie die Wahrscheinlichkeit von E zur Wahrscheinlichkeit von F.

Ist aber ps ein unechter Bruch, so ist m jener ganzen Zahl gleich, welche innerhalb der Grenzen $ps - q$ und $ps + p$ eingeschlossen ist. In diesem Falle ist das Verhältnis $\frac{m}{s}$ nahezu gleich p und folglich $\frac{n}{s}$ nahezu gleich q.

Aus der Beziehung 7) folgt übrigens unter allen Umständen, daß

$$m + 1 > (s + 1)p, \quad m < (s + 1)p;$$

somit kann man setzen:

$$m = (s + 1)p - \delta, \quad \text{wobei} \quad 0 < \delta < 1.$$

Da nun in $m = ps + p - \delta$ sowohl p als auch δ echte Brüche sind und s als eine sehr große ganze Zahl vorausgesetzt wird, so folgt hieraus, daß $p - \delta$ gegenüber ps vernachlässigt, also

10) $$m = ps$$

gesetzt werden kann. Für die Wiederholungszahl n von F folgt dann

11) $$n = s - m = s - ps = s(1 - p) = qs.$$

Durch Division der Gleichungen 10) und 11) folgt wieder

$$m : n = p : q.$$

Das Resultat der Untersuchung zusammengefaßt lautet: Unter allen Ergebnissen, die in s Versuchen möglich sind, ist dasjenige am wahrscheinlichsten, in welchem das Verhältnis $m:n$ der Wiederholungszahlen von E und F dem Verhältnis $p:q$ der Wahrscheinlichkeiten von E und F gleich oder am nächsten ist.

Ein besonderer Fall, der noch zu erwähnen ist, tritt dann ein, wenn $ps - q$ und infolge dessen auch $ps + p$ eine ganze Zahl ist; es ergeben sich dann zwei um eine Einheit verschiedene ganze Zahlen als Grenzen für die Wiederholungszahl m. In der Entwicklung der Potenz $(p+q)^s$ sind dann zwei Glieder einander gleich und größer als alle anderen und es existieren zwei wahrscheinlichste Kombinationen von gleicher Wahrscheinlichkeit.

Für die weiteren Entwicklungen ist es zulässig, $m = ps$ und $n = qs$ zu setzen und sonach das größte Glied auch dann in der Form

$$T_0 = \frac{s!}{(ps)!\,(qs)!} p^{ps} q^{qs}$$

zu schreiben, wenn ps und qs nicht ganze Zahlen sein sollten.

Beispiel. Aus einer Urne mit 3 weißen und 2 schwarzen Kugeln werden 400, beziehungsweise 623 und 624 Ziehungen gemacht; welches ist das wahrscheinlichste Resultat?

Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weißen Kugel ist $p = \frac{3}{5}$, die für das Ziehen einer schwarzen $q = \frac{2}{5}$.

Bei $s = 400$ ist $ps = 240$, $qs = 160$, und da dies ganze Zahlen sind, so besteht die wahrscheinlichste Kombination aus 240 weißen und 160 schwarzen Kugeln.

Bei $s = 623$ sind die Grenzen des die Wiederholungszahl m einschließenden Intervalls $373\frac{2}{5}$ und $374\frac{2}{5}$, daher ist $m = 374$ und $n = s - m = 623 - 374 = 249$.

In dem Falle $s = 624$ findet man als Grenzen des Intervalls für m die Zahlen 374, 375. Es kann daher ebenso wohl $m = 374$, $n = 250$ wie $m = 375$, $n = 249$ gesetzt werden.

5. Näherungsweise Darstellung des größten Gliedes.

Nach den vorhergehenden Untersuchungen ist es bei sehr großen s gestattet, für die Wiederholungszahlen von E und F in der wahrscheinlichsten Kombination

$$m = ps, \quad n = qs$$

zu setzen und somit, wie schon gesagt, das größte Glied in der Form

$$1)\qquad T_0 = \frac{s!}{(p\,s)!\,(q\,s)!}\,p^{ps}\,q^{qs}$$

darzustellen. wenn auch $p\,s$ und $q\,s$ nicht ganze Zahlen sein sollten.

Hiezu sei bemerkt: T_0 ist wohl das größte Glied und die entsprechende Kombination die wahrscheinlichste. An sich betrachtet hat aber auch diese wahrscheinlichste Kombination eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit, und zwar ist letztere umso geringer, je größer die Anzahl s der Versuche ist. Die Gleichung

$$(p+q)^s = 1 = p^s + \binom{s}{1} p^{s-1} q + \binom{s}{2} p^{s-2} q^2 + \cdots +$$
$$+ \binom{s}{n} p^m q^n + \cdots + q^s, \quad (m+n=s)$$

enthält $s+1$ Glieder, deren Summe 1 ist. Je größer also s wird, desto kleiner muß jedes Glied werden. Hiebei werden die ersten und letzten Glieder viel rascher kleiner als die mittleren. Wären alle Glieder gleich, so hätte jedes den Wert $\frac{1}{s+1}$. Die Verteilung ist aber eine andere; es gibt Glieder, die größer und solche, die kleiner sind als $\frac{1}{s+1}$.

Wenn s eine sehr große Zahl ist, so können die Faktoriellen in T_0 mit Hilfe der Stirlingschen Formel

$$k! = 1.2.3\ldots.k = k^k e^{-k} \sqrt{2\pi k}$$

näherungsweise dargestellt werden.

Demgemäß ist:

$$s! = s^{s+\frac{1}{2}} e^{-s} \sqrt{2\pi},$$
$$(p\,s)! = (p\,s)^{ps+\frac{1}{2}} e^{-ps} \sqrt{2\pi},$$
$$(q\,s)! = (q\,s)^{qs+\frac{1}{2}} e^{-qs} \sqrt{2\pi};$$

hiemit ergibt sich für den Binomialkoeffizienten $\frac{s!}{(p\,s)!\,(q\,s)!}$ der angenäherte Wert

$$\frac{1}{p^{ps+\frac{1}{2}}\, q^{qs+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi s}}$$

und für das größte Glied der näherungsweise Ansatz

$$T_0 = \frac{1}{p^{ps+\frac{1}{2}} q^{qs+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi s}} p^{ps} q^{qs} = \frac{1}{\sqrt{2\pi pqs}},$$

also

2) $$T_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi pqs}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)s}}.$$

Bei demselben p, q nimmt daher die Wahrscheinlichkeit der wahrscheinlichsten Kombination mit wachsender Versuchszahl, und zwar im Verhältnis ihrer reziproken Quadratwurzel ab. Bei sehr großem s wird sie außerordentlich klein. Bei gegebenem s hat T_0 den kleinsten Wert, wenn $p = q = \frac{1}{2}$ ist, denn für diese Werte von p und q wird bekanntlich das Produkt pq ein Maximum.

Beispiele. Die Wahrscheinlichkeit, daß bei 1000 Würfen mit einer Münze gleich oft Wappen und Schrift sich einstelle, beträgt

$$\frac{1}{\sqrt{500\pi}} = 0{\cdot}025231;$$

daß in 1000 Ziehungen aus einer Urne mit 4 weißen und 1 schwarzen Kugel 800 weiße und 200 schwarze Kugeln erscheinen, ist mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{\sqrt{320\pi}} = 0{\cdot}031539$$

zu erwarten.

Um zu zeigen, daß die Formel 2) auch schon bei mäßig großem s eine ziemlich gute Annäherung gibt, benütze man die beiden Beispiele, welche im Punkte 3 dieses Abschnittes zur Erläuterung der Entwicklung der Fragestellung für das Theorem von Bernoulli angeführt wurden. Dort war $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{3}$, ferner

für $s = 6$ der strenge Wert von $T_0 = 0{\cdot}3030$,
der angenäherte Wert ist $0{\cdot}3455$;
für $s = 12$ der strenge Wert von $T_0 = 0{\cdot}2380$,
der angenäherte Wert ist $0{\cdot}2443$.

Welche Näherung sie bei großem s liefert, soll in dem Falle $s = 1200$ durch Nebeneinanderstellung der strengen Rechnung und der Näherungsrechnung dargetan werden; die linksstehende Rechnung ist mit Hilfe der sechsstelligen Logarithmen aller Fakultäten von 1 bis 1200 von A. de Morgans geführt.

$$T_0 = \frac{1200!\,2^{800}}{800!\,400!\,3^{1200}};$$

$log\,1200! = 3175{\cdot}802827$
$log\;\;800! = 1976{\cdot}887084$
$log\;\;400! = \;\;868{\cdot}806414$
$\qquad\qquad\quad 330{\cdot}109329$
$800\,log\,2 = 240{\cdot}823997$
$\qquad\qquad\quad 570{\cdot}933326$
$1200\,log\,3 = 572{\cdot}545506$
$log\,T_0 = 0{\cdot}387820 - 2$
$T_0 = 0{\cdot}024424.$

$$T_0 = \frac{3}{\sqrt{4800\,\pi}}$$

$log\,4800 = 3{\cdot}681241$
$log\,\pi = 0{\cdot}497150$
$\qquad\quad 4{\cdot}178391$
$log\sqrt{4800\,\pi} = 2{\cdot}089196$
$log\,3 = 0{\cdot}477121$
$log\,T_0 = 0{\cdot}387925 - 2$
$T_0 = 0{\cdot}024430.$

6. Näherungsweise Darstellung eines Gliedes, welches sich von dem maximalen um eine gegebene Anzahl von Stellen entfernt.

Dasjenige Glied, welches dem größten Gliede vorangehend von diesem durch $l-1$ Glieder getrennt ist, hat den Ausdruck

$$1)\qquad T_l = \frac{s!}{(p\,s+l)!\,(q\,s-l)!}\,p^{ps+l}\,q^{qs-l};$$

das hiezu symmetrisch angeordnete Glied lautet:

$$2)\qquad T_{-l} = \frac{s!}{(p\,s-l)!\,(q\,s+l)!}\,p^{ps-l}\,q^{qs+l}.$$

Unter Anwendung der Formel von **Stirling** erhält man:

$$T_l = \frac{s^s e^{-s}\sqrt{2\pi s}}{(ps+l)^{ps+l}e^{-ps-l}\sqrt{2\pi(ps+l)}.(qs-l)^{qs-l}e^{-qs+l}\sqrt{2\pi(qs-l)}}\times$$
$$\times p^{ps+l}q^{qs-l} =$$
$$= \frac{s^s\sqrt{s}}{(ps)^{ps+l}\left(1+\frac{l}{ps}\right)^{ps+l}(qs)^{qs-l}\left(1-\frac{l}{qs}\right)^{qs-l}\sqrt{2\pi(ps+l)(qs-l)}}\times$$
$$\times p^{ps+l}q^{qs-l} =$$
$$= \frac{1}{\left(1+\frac{l}{ps}\right)^{ps+l+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{l}{qs}\right)^{qs-l+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi pqs}},\text{ oder endlich}$$

$$3)\quad T_l = \frac{1}{\sqrt{2\pi pqs}}\left(1+\frac{l}{ps}\right)^{-ps-l-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{l}{qs}\right)^{-qs+l-\frac{1}{2}}.$$

Der Kürze halber setze man:

$$A = \left(1 + \frac{l}{ps}\right)^{-ps-l-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{l}{qs}\right)^{-qs+l-\frac{1}{2}};$$

es ist dann, wenn man nach der Basis e logarithmiert und hiebei, um Verwechslungen mit dem schon im Ausdrucke A enthaltenen Buchstaben l vorzubeugen, für den Logarithmus das Zeichen ln anwendet:

$$ln\,A = -\left(ps + l + \frac{1}{2}\right) ln\left(1 + \frac{l}{ps}\right) - \left(qs - l + \frac{1}{2}\right) ln\left(1 - \frac{l}{qs}\right).$$

Entwickelt man die Logarithmen im rechten Teile der Gleichung in unendliche Reihen,*) so hat man

$$ln\,A = -\left(ps + l + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{l}{ps} - \frac{l^2}{2p^2s^2} + \frac{l^3}{3p^3s^3} - \cdots\cdots\right) -$$
$$-\left(qs - l + \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{l}{qs} - \frac{l^2}{2q^2s^2} - \frac{l^3}{3q^3s^3} - \cdots\cdots\right).$$

Setzt man voraus, daß l eine Zahl von der Ordnung $\sqrt{s}$ sei und vernachlässigt bei der Multiplikation Größen von geringerer Ordnung als $\frac{1}{s}$, so ergibt sich:

$$ln\,A = -l + \frac{l^2}{2ps} - \frac{l^3}{3p^2s^2} - \frac{l^2}{ps} + \frac{l^3}{2p^2s^2} - \frac{l}{2ps} +$$
$$+ l + \frac{l^2}{2qs} + \frac{l^3}{3q^2s^2} - \frac{l^2}{qs} - \frac{l^3}{2q^2s^2} + \frac{l}{2qs} =$$
$$= -l - \frac{l}{2ps} - \frac{l^2}{2ps} + \frac{l^3}{6p^2s^2} +$$
$$+ l + \frac{l}{2qs} - \frac{l^2}{2qs} - \frac{l^3}{6q^2s^2}.$$

Durch Reduktion resultiert ferner:

$$ln\,A = \frac{l}{2qs} - \frac{l}{2ps} - \frac{l^2}{2ps} - \frac{l^2}{2qs} + \frac{l^3}{6p^2s^2} - \frac{l^3}{6q^2s^2} =$$
$$= \frac{(p-q)\,l}{2pqs} - \frac{(p+q)\,l^2}{2pqs} + \frac{l^3}{6p^2s^2} - \frac{l^3}{6q^2s^2} =$$
$$= \frac{(p-q)\,l}{2pqs} - \frac{l^2}{2pqs} + \frac{l^3}{6p^2s^2} - \frac{l^3}{6q^2s^2}.$$

*) Bekanntlich ist $ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\cdots, \quad -1 < x \leqq +1.$

Geht man vom Logarithmus zur Zahl über, so erhält man:

$$A = e^{-\frac{l^2}{2pqs}} \cdot e^{\frac{(p-q)l}{2pqs} + \frac{l^3}{6p^2s^2} - \frac{l^3}{6q^2s^2}}.$$

Wird der zweite Faktor im rechten Teile der Gleichung in Form einer unendlichen Reihe dargestellt, so ergibt sich

$$A = e^{-\frac{l^2}{2pqs}} \left\{1 + \frac{(p-q)l}{2pqs} + \frac{l^3}{6p^2s^2} - \frac{l^3}{6q^2s^2} + \cdots\cdots\right\}.$$

Setzt man diesen Wert von A in die Gleichung 3) ein, in welcher das Produkt der beiden Klammerfaktoren der Größe A gleich gesetzt wurde, so folgt:

$$4)\quad T_l = \frac{e^{-\frac{l^2}{2pqs}}}{\sqrt{2\pi pqs}} \left\{1 + \frac{(p-q)l}{2pqs} + \frac{l^3}{6p^2s^2} - \frac{l^3}{6q^2s^2} + \cdots\cdots\right\}.$$

Die Gleichung 2) geht aus der Gleichung 1) hervor, wenn in derselben l durch $-l$ ersetzt wird, deshalb kann ohne weitere Rechnung gesetzt werden:

$$5)\quad T_{-l} = \frac{e^{-\frac{l^2}{2pqs}}}{\sqrt{2\pi pqs}} \left\{1 - \frac{(p-q)l}{2pqs} - \frac{l^3}{6p^2s^2} + \frac{l^3}{6q^2s^2} + \cdots\cdots\right\}.$$

Der gemeinsame Faktor beider Klammerausdrücke ist eine gerade Funktion von l. Der zweite Faktor führt die Asymmetrie herbei; ist $p > q$, so ist $T_l > T_{-l}$.

Wird die Summe der beiden Wahrscheinlichkeiten T_l, T_{-l} genommen, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, daß die Abweichung nach auf- oder abwärts l betrage, und diese ist:

$$6)\qquad T_l + T_{-l} = \frac{2}{\sqrt{2\pi pqs}}\, e^{-\frac{l^2}{2pqs}}.$$

Die Summe $T_l + T_{-l}$ drückt also die Wahrscheinlichkeit aus, daß sich die Wiederholungszahl des Ereignisses E und daher auch die Wiederholungszahl des Ereignisses F von der wahrscheinlichsten Kombination um l nach auf- oder abwärts unterscheidet.

Sofern man Glieder zusammenfaßt, welche in Bezug auf das größte Glied symmetrisch angeordnet sind, darf man innerhalb der angegebenen Grenzen von l und mit der bezeichneten Genauigkeit die Werte von T_l durch die gerade Funktion

7) $$T_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi p q s}} e^{-\frac{x^2}{2pqs}}$$

darstellen. In der Praxis wird meist die Asymmetrie unterdrückt und man rechnet mit Werten, welche aus der Formel 7) folgen. Diese Formel entsteht dadurch, daß man in den Formeln 4) und 5) die innerhalb der geschwungenen Klammern befindlichen Ausdrücke gleich 1 setzt.

Es liegt in der Natur dieser Funktion, in ihrer außerordentlich raschen Abnahme mit wachsendem x, daß man sie auch über die angegebenen Grenzen hinaus anwenden darf, ohne einen erheblichen Einfluß auf die ziffermäßigen Resultate befürchten zu müssen. Es werden für beträchtliche Abweichungen sowohl die strengen wie auch die nach dem Gesetze 7) gerechneten Näherungswerte von T_l so außerordentlich klein, daß sie bei Lösung einer praktischen Frage nicht in Betracht kommen.

Beispiel. Die rasche Abnahme von T_l mag aus dem folgenden Beispiele ersehen werden. Für $p = \frac{3}{5}$, $q = \frac{2}{5}$, $s = 2500$, in welchem Falle l von der Größenordnung 50 sein muß, also ein mäßiges Vielfaches dieser Zahl sein darf, ergibt die Rechnung nach 7):

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{1200\,\pi}} = 0{\cdot}016\,287,$$

$$T_{50} = T_0\, e^{-\frac{25}{12}} = 0{\cdot}002\,0280,$$

$$T_{80} = T_0\, e^{-\frac{16}{3}} = 0{\cdot}000\,078\,632,$$

$$T_{100} = T_0\, e^{-\frac{25}{3}} = 0{\cdot}000\,003\,9149,$$

$$T_{150} = T_0\, e^{-\frac{75}{4}} = 0{\cdot}000\,000\,000\,193\,18.$$

Die weitere Abnahme erfolgt so rasch, daß T_{500} erst an der 93. Stelle eine von Null verschiedene Ziffer hat.

7. Wahrscheinlichkeit, daß die Abweichung innerhalb gegebener Grenzen verbleibe.

Bei der Lösung dieser Aufgabe handelt es sich um die Summierung von $2l + 1$ Gliedern der Entwicklung $(p + q)^s$, als deren mittelstes das maximale Glied T_0 erscheint, also um die Bestimmung der Summe

1) $$P = T_l + T_{l-1} + \cdots + T_1 + T_0 + T_{-1} + \cdots + T_{-(l-1)} + T_{-l}.$$

Jedes T drückt bekanntlich eine Wahrscheinlichkeit aus. Es bedeutet demnach P eine Totalwahrscheinlichkeit, und zwar die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich in den s Versuchen eine der $2l+1$ Kombinationen, welche durch die einzelnen T in P vertreten sind, zutrage. Oder mit anderen Worten: Es drückt P die Wahrscheinlichkeit aus, daß die Wiederholungzahlen der beiden Ereignisse E und F in den s Versuchen nicht mehr als um die Zahl l von der wahrscheinlichsten Kombination nach auf- oder abwärts abweichen.

Die Bildung der Summe der T ist bei einigermaßen großem l eine kaum zu bewältigende Arbeit; man wird daher trachten, diese Summe näherungsweise durch einen geschlossenen Ausdruck darzustellen.

Im Nachstehenden soll gezeigt werden, wie sich die Summe der T mit großer Annäherung auf ein Integral zurückführen läßt.

Faßt man die Gleichung

$$2) \qquad T_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi p q s}} e^{-\frac{x^2}{2pqs}}$$

als Gleichung einer Kurve auf, wobei T_x die Ordinate für die Abszisse x bedeutet, so kann die Fläche zwischen der Kurve, der Abszissenachse und den Ordinaten T_l, T_{-l} näherungsweise mittels der zu den Abszissen

$$l,\ l-1,\ l-2, \ldots, 1,\ 0,\ -1,\ -2, \ldots, -(l-1)$$

gehörigen Ordinaten durch die Summe

$$3) \qquad T_l + T_{l-1} + \cdots + T_1 + T_0 + T_{-1} + \cdots + T_{-(l-1)}$$

dargestellt werden. Denn dieser Ausdruck entspricht der Summe der Rechtecke, welche sich ergeben, wenn man durch den Endpunkt jeder Ordinate bis an die benachbarte eine Parallele zur Abszissenachse nach rechts zieht. Die Flächenstreifen der Kurve, deren Gleichung 2) ist, links von der Ordinatenachse sind größer, jene rechts von der Ordinatenachse kleiner als die entsprechenden Rechtecke (Fig. 1).

Ein mit 3) gleichberechtigter Ausdruck lautet:

$$4) \qquad T_{l-1} + T_{l-2} + \cdots + T_1 + T_0 + T_{-1} + \cdots + T_{-l}.$$

Dieser Ausdruck gibt die Summe der Rechtecke, welche durch das Ziehen der Parallelen zur Abszissenachse nach links erhalten werden. Die Rechtecke rechts von der Ordinatenachse sind dann kleiner, jene links größer als die zugehörigen Flächenstreifen.

Größere Genauigkeit wird erzielt, wenn man das arithmetische Mittel beider Summen 3) und 4) nimmt; demnach kann

$$\int_{-l}^{l} T_x\,dx = 2\int_0^l T_x\,dx = T_{l-1} + \cdots + T_1 + T_0 + T_{-1} + \cdots +$$
$$+ T_{-(l-1)} + \frac{T_l + T_{-l}}{2},$$

also

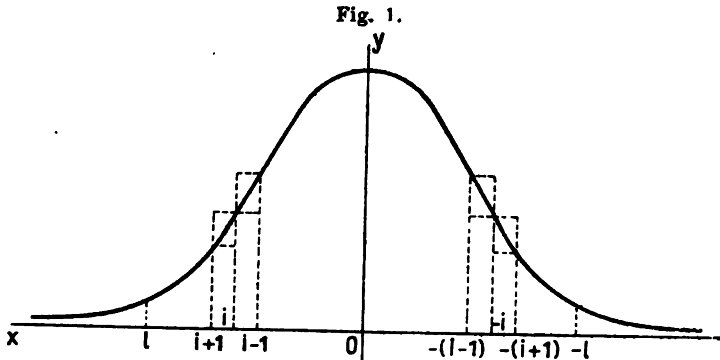
$$2\int_0^l T_x\,dx = \sum_{-l}^{l} T_i - \frac{T_l + T_{-l}}{2}$$

gesetzt werden, woraus

$$\sum_{-l}^{l} T_i = 2\int_0^l T_x\,dx + \frac{T_l + T_{-l}}{2}$$

folgt.

Fig. 1.



Setzt man hierin für T_x den Wert aus 2) ein und berücksichtigt, daß zufolge der Gleichung 6) des Punktes 6 dieses Abschnittes $\frac{T_l + T_{-l}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi p q s}} e^{-\frac{l^2}{2pqs}}$ ist, so ergibt sich für P die Darstellung:

5) $$P = \frac{2}{\sqrt{2\pi p q s}} \int_0^l e^{-\frac{x^2}{2pqs}} dx + \frac{e^{-\frac{l^2}{2pqs}}}{\sqrt{2\pi p q s}},$$

welche noch dadurch vereinfacht werden kann, daß man mittels der Beziehung

$$\frac{x}{\sqrt{2pqs}} = t$$

die neue Veränderliche t einführt. Man findet

6) $$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{l}{\sqrt{2pqs}}} e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\frac{l^2}{2pqs}}}{\sqrt{2\pi p q s}}.$$

Setzt man zur weiteren Vereinfachung $\frac{l}{\sqrt{2pqs}} = \Theta$, so ergibt sich:

$$7) \qquad P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\Theta} e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\Theta^2}}{\sqrt{2\pi pqs}}.$$

Der Wert des Integrals $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\Theta} e^{-t^2} dt$ kann in verschiedener Weise ermittelt werden; das Wesentlichste hierüber ist im ersten Bande, Punkt 10 des II. Abschnittes enthalten. Die Tabelle I gibt die Werte des Integrals $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\Theta} e^{-t^2} dt$ für das Argument Θ von 0 bis 4·8 an. Bemerkt sei noch, daß die Werte der Integrale

$$\int_0^{\Theta} e^{-t^2} dt \text{ und } \int_{\Theta}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

durch die Relation

$$\int_0^{\Theta} e^{-t^2} dt + \int_{\Theta}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

miteinander verknüpft sind.

Aus dem bisher Gesagten ist einleuchtend, daß der Wert P die Wahrscheinlichkeit dafür darstellt, daß sich die Wiederholungszahl von E bei s Versuchen in den Grenzen $ps - l$ und $ps + l$ bewegt. Im Ausdrucke für P kommt zwar l nicht vor; dieses hängt jedoch mit Θ durch die Beziehung $\frac{l}{\sqrt{2pqs}} = \Theta$ zusammen, so daß man sagen kann: P ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich die Wiederholungszahl m von E in den Grenzen

$$ps - \Theta\sqrt{2pqs} \quad \text{und} \quad ps + \Theta\sqrt{2pqs},$$

die Wiederholungszahl n von F in den Grenzen

$$qs - \Theta\sqrt{2pqs} \quad \text{und} \quad qs + \Theta\sqrt{2pqs}$$

bewegt.

Neben der Wiederholungszahl eines Ereignisses ist auch dessen **relative Häufigkeit** von Wichtigkeit, nämlich das Verhältnis seiner Wiederholungszahl zur Gesamtzahl — Häufigkeit — der gemachten Versuche. Die relative Häufigkeit des Versuches E ist also gleich $\frac{m}{s}$.

Mit Rücksicht darauf kann man daher auch sagen: Der Wert P drückt die Wahrscheinlichkeit dafür aus, daß die relative Häufigkeit $\frac{m}{s}$ des Ereignisses E zwischen den Grenzen $p - \frac{l}{s}$ und $p + \frac{l}{s}$, dementsprechend jene $\frac{n}{s}$ des Ereignisses F zwischen den Grenzen $q - \frac{l}{s}$ und $q + \frac{l}{s}$ liegt. Oder auch: P drückt die Wahrscheinlichkeit dafür aus, daß sich die relative Häufigkeit $\frac{m}{s}$ von E in den Grenzen

$$p - \Theta\sqrt{\frac{2pq}{s}} \quad \text{und} \quad p + \Theta\sqrt{\frac{2pq}{s}},$$

die relative Häufigkeit $\frac{n}{s}$ von F in den Grenzen

$$q - \Theta\sqrt{\frac{2pq}{s}} \quad \text{und} \quad q + \Theta\sqrt{\frac{2pq}{s}}$$

bewegt.

8. Formulierung des Bernoullischen Theorems.

Der Inhalt dessen, was in der gegenwärtigen Literatur unter dem Namen des Bernoullischen Theorems verstanden wird, hat erst durch Laplace jene endgültige Formulierung erfahren, in der es nun vorgeführt werden soll.

Wenn über zwei entgegengesetzte Ereignisse E und F, deren Wahrscheinlichkeiten p und q konstant sind, s Versuche angestellt werden, so ist unter allen möglichen Ergebnissen dasjenige am wahrscheinlichsten, in welchem das Verhältnis $m:n$ der Wiederholungszahlen von E und F dem Verhältnis $p:q$ der Wahrscheinlichkeiten gleich oder am nächsten ist.

Unter der Voraussetzung, daß die Zahl s der Versuche groß ist, wird die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Wiederholungszahl m von E zwischen die Grenzen

$$1) \qquad ps - \Theta\sqrt{2pqs} \quad \text{und} \quad ps + \Theta\sqrt{2pqs},$$

also das Verhältnis $\frac{m}{s}$ dieser Wiederholungszahl zur Anzahl der Versuche, d. i. die relative Häufigkeit des Ereignisses E zwischen die Grenzen

$$2) \qquad p - \Theta\sqrt{\frac{2pq}{s}} \quad \text{und} \quad p + \Theta\sqrt{\frac{2pq}{s}}$$

falle, durch

3) $$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\Theta} e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\Theta^2}}{\sqrt{2\pi p q s}}$$

ausgedrückt.

Man erkennt: das Intervall der Grenzen für die Wiederholungszahl m beträgt $J = 2\,\Theta\sqrt{2pqs}$; jenes für die Grenzen der relativen Häufigkeit $\frac{m}{s}$ hingegen $i = 2\,\Theta\sqrt{\frac{2pq}{s}}$.

Um in den Sinn des Theorems von Bernoulli tiefer einzudringen, sei zunächst bemerkt, daß der Wert des ersten Gliedes auf der rechten Seite von 3) selbst für mäßig große Werte von Θ der Einheit sehr nahe ist und schon bei $\Theta = 4$ sich außerordentlich wenig von ihr unterscheidet; das zweite Glied liefert dann nur mehr einen sehr geringen Beitrag zu P, der ohne Schaden für die Richtigkeit der nachfolgenden Schlüsse vernachlässigt werden kann.

Aus den Ansätzen 1) und 2) ergibt sich nun:

Die einer gegebenen Wahrscheinlichkeit P, d. h. die einem bereits festgelegten Θ entsprechenden Grenzen 1) der Wiederholungszahl m erweitern sich, wie der Ausdruck für J ersehen läßt, mit wachsender Anzahl der Versuche, jedoch nur im Verhältnisse von $\sqrt{s}$.

Die einer gegebenen Wahrscheinlichkeit P, d. h. die einem bereits festgelegten Θ entsprechenden Grenzen 2) des Verhältnisses $\frac{m}{s}$, d. i. der relativen Häufigkeit verengen sich, wie der Ausdruck für i ersehen läßt, mit wachsender Anzahl der Versuche und können durch entsprechende Vergrößerung von s beliebig eng gemacht werden.

Es ist möglich, die Zahl s der Versuche so groß zu wählen, daß man mit einer der Einheit beliebig nahen Wahrscheinlichkeit (man braucht nur s entsprechend groß zu wählen) erwarten darf, es werde das Verhältnis $\frac{m}{s}$, d. i. die relative Häufigkeit, nicht mehr als innerhalb beliebig eng festgesetzter Grenzen von p abweichen.

Mit anderen Worten:

a) bleibt Θ, und infolge dessen auch P konstant, so ziehen sich die Grenzen $p \mp \Theta\sqrt{\frac{2pq}{s}}$ immer enger zusammen, das Intervall i wird immer kleiner, und zwar in dem Maße als s wächst;

b) bleiben die Grenzen $p \mp \Theta\sqrt{\frac{2pq}{s}}$ oder das Intervall i

konstant und wächst s, so muß gleichzeitig auch Θ zunehmen; dann aber nähert sich die Wahrscheinlichkeit P immer mehr der Einheit oder der Gewißheit.

Während also die Grenzen $p \mp \Theta\sqrt{\frac{2pq}{s}}$, zwischen welchen das unbekannte Verhältnis $\frac{m}{s}$, d. i. die relative Häufigkeit enthalten ist, konstant bleiben, nähert sich die Wahrscheinlichkeit P, daß $\frac{m}{s}$ zwischen jene Grenzen fallen wird, der Einheit in dem Maße als $\sqrt{s}$, d. i. die Zahl der Versuche, wächst. Während hingegen die Wahrscheinlichkeit, daß das Verhältnis $\frac{m}{s}$ zwischen den Grenzen $p \mp \Theta\sqrt{\frac{2pq}{s}}$ enthalten ist, konstant bleibt, zieht die immer weiter fortgesetzte Wiederholung der Versuche diese Grenzen enger zusammen.

Es muß ausdrücklich hervorgehoben werden, daß das Bernoullische Theorem nur Wahrscheinlichkeitsaussagen enthält und daher nur die Erwartungsbildung regelt, daß es also, wie jeder Satz der Wahrscheinlichkeitstheorie, über das wirkliche Geschehen keinen Aufschluß gibt. Wenn also mit einer der Einheit noch so nahen Wahrscheinlichkeit zu erwarten ist, die relative Häufigkeit $\frac{m}{s}$ werde innerhalb bestimmter enger, p umgebender Grenzen fallen so kann eine wirklich ausgeführte Versuchsreihe doch ein Verhältnis $\frac{m}{s}$, d. i. eine relative Häufigkeit ergeben, das weit über jene Grenzen hinausfällt, ohne daß hieraus ein Widerspruch mit dem genannten Theorem gefolgert werden dürfte.

Resumé. Faßt man nochmals den Inhalt des Theorems von Bernoulli kurz zusammen, so kann man sagen: Dieses Theorem betrifft die Erwartungsbildung in Bezug auf das Ergebnis einer großen Anzahl s gleichartiger Beobachtungen, deren jede eines von zwei einander ausschließenden Ereignissen E, F mit den durch die ganze Beobachtungsreihe konstant bleibenden Wahrscheinlichkeiten p, q, hervorbringt. Es enthält zwei Aussagen: Die eine bezieht sich auf die Wiederholungszahlen m, n der beiden Ereignisse in der wahrscheinlichsten Kombination, die andere auf die Wahrscheinlichkeit, daß die wirklich sich einstellenden Wiederholungszahlen oder deren Verhältnisse zu s von den wahrscheinlichsten Werten nicht mehr als innerhalb vorgezeichneter Grenzen abweichen.

Während die Begründung der ersten Aussage in der Feststellung des größten Gliedes der Entwicklung von $(p+q)^s$ be-

steht und in voller Strenge durchgeführt werden kann, erfordert die Erledigung des zweiten Teiles die Summierung einer Gliedergruppe jener Entwicklung, deren Mitte das größte Glied einnimmt, eine Aufgabe, welche mit Rücksicht auf die Rechenarbeit, die ihre strenge Ausführung verlangen würde, nur mit Hilfe von Näherungsmethoden zu bewältigen ist.

Nach der von Laplace dem Bernoullischen Theorem gegebenen endgültigen Form ist jene Kombination die wahrscheinlichste, in welcher das Verhältnis der Wiederholungzahlen m, n von E, F dem Verhältnisse der respektiven Wahrscheinlichkeit p, q gleich oder am nächsten ist, und es ist ferner mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\Theta} e^{-t^2}\,dt + \frac{e^{-\Theta^2}}{\sqrt{2\pi p q s}}$$

zu erwarten, daß die Verhältnisse $\frac{m}{s}$, $\frac{n}{s}$ innerhalb der Grenzen:

$$p \mp \Theta\sqrt{\frac{2pq}{s}}, \quad q \mp \Theta\sqrt{\frac{2pq}{s}}$$

zu liegen kommen.

Es sind mehrfach Versuchsreihen angestellt oder vorhandene dazu benützt worden, um den Bernoullischen Satz zu verifizieren, oder richtiger gesagt, um zu zeigen, daß das wirkliche Geschehen tatsächlich innerhalb enger Grenzen den durch die apriorischen Wahrscheinlichkeiten bezeichneten Verhältnissen sich anpaßt.

9. Ausführung der Rechnungen.

Für P wurde der Ausdruck gefunden

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\Theta} e^{-t^2}\,dt + \frac{e^{-\Theta^2}}{\sqrt{2\pi p q s}};$$

derselbe besteht aus 2 Teilen, nämlich aus einem Integral und einem integralfreien Teile.

Die Berechnung von P bei gegebenem Θ erfordert die Auswertung des Integrals

$$\Phi(\Theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\Theta} e^{-t^2}\,dt, \quad \text{Integral von Laplace,}$$

das eine höhere Transzendente vorstellt, die, wie im I. Bande, Punkt 10 des II. Abschnittes bereits gesagt wurde, nur mittels unendlicher

Rechnungsprozesse darstellbar ist. Die Tabelle I enthält die Werte dieser Funktion berechnet für das Argument Θ.

Der zweite Teil von P, nämlich

$$\Psi(\Theta) = \frac{e^{-\Theta^2}}{\sqrt{2\pi p q s}}$$

hat bei einigermaßen hohem Θ und großem s einen untergeordneten Einfluß und wird in manchen der neueren Schriften nicht geführt, so daß P durch das Integralglied, den prävalierenden Teil, allein ausgedrückt erscheint.

Man könnte indessen, um bloß mit der Tabelle I auszukommen und dabei doch den Wert dieses Gliedes zu berücksichtigen, dies durch eine Abänderung der Integralgrenze zu bewerkstelligen suchen. Es würde sich dann darum handeln, an die Stelle der Darstellung

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{l}{\sqrt{2pqs}}} e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\frac{l^2}{2pqs}}}{\sqrt{2\pi p q s}}$$

eine andere

$$P' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{l+\delta}{\sqrt{2pqs}}} e^{-t^2} dt$$

mit möglichster Wahrung des Wertes zu setzen. Entwickelt man den letzten Ausdruck nach Potenzen von δ und bleibt bei der ersten Potenz stehen, so wird

$$P' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{l}{\sqrt{2pqs}}} e^{-t^2} dt + 2\delta \frac{e^{-\frac{l^2}{2pqs}}}{\sqrt{2\pi p q s}}.$$

Dieser Ausdruck wird wie folgt erhalten: Man setze

$$P' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{l+\delta}{\sqrt{2pqs}}} e^{-t^2} dt = \Omega\left(\frac{l-\delta}{\sqrt{2pqs}}\right) = \Omega\left(\frac{l}{\sqrt{2pqs}} + \frac{\delta}{\sqrt{2pqs}}\right) =$$

$$= \Omega\left(\frac{l}{\sqrt{2pqs}} + \tau\right),$$

wobei $\tau = \frac{\delta}{\sqrt{2pqs}}$ ist. Die Entwicklung nach Taylor gibt, wenn mit dem Gliede, das τ in der 1. Potenz enthält, abgebrochen wird:

$$\Omega\left(\frac{l}{\sqrt{2pqs}} + \tau\right) = \Omega\left(\frac{l}{\sqrt{2pqs}}\right) + \tau\,\Omega'\left(\frac{l}{\sqrt{2pqs}}\right), \text{ oder}$$

$$\Omega\left(\frac{l}{\sqrt{2pqs}}+\tau\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{l}{\sqrt{2pqs}}} e^{-t^2}dt+\frac{\delta}{\sqrt{2pqs}}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\left(\frac{l}{\sqrt{2pqs}}\right)^2}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{l}{\sqrt{2pqs}}} e^{-t^2}dt+2\delta\frac{e^{-\left(\frac{l}{\sqrt{2pqs}}\right)^2}}{\sqrt{2\pi pqs}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{l}{\sqrt{2pqs}}} e^{-t^2}dt+2\delta\frac{e^{-\frac{l^2}{2pqs}}}{\sqrt{2\pi pqs}}.$$

Soll $P'=P$ werden, so ist $\delta=\frac{1}{2}$ zu nehmen. Setzt man wieder $\frac{l+\frac{1}{2}}{\sqrt{2\pi pqs}}=\Theta$, so ändert sich der Ausdruck des Theorems dahin, daß

$$P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\Theta} e^{-t^2}dt$$

die Wahrscheinlichkeit für die Einhaltung der Grenzen

$$ps\mp\left(\Theta\sqrt{2pqs}-\frac{1}{2}\right)$$

seitens m und der Grenzen

$$p\mp\left(\Theta\sqrt{\frac{2pq}{s}}-\frac{1}{2s}\right)$$

seitens $\frac{m}{s}$ bedeutet.

Handelt es sich darum, zu gegebenem P das zugehörige Θ zu berechnen, so wird man aus Tabelle I durch Interpolation die Wurzel der Gleichung

$$\Phi(\Theta)=P$$

bestimmen; es erübrigt dann noch die an dieser Wurzel anzubringende Korrektur zu ermitteln, damit auch das zweite Glied von P Berücksichtigung finde. In den meisten Fällen wird man sich mit der Wurzel obiger Gleichung allein begnügen können.

10. Wahrscheinliche Abweichung.

Diejenigen Grenzen von m, beziehungsweise von $\frac{m}{s}$, welchen die Wahrscheinlichkeit $P=\frac{1}{2}$ zukommt, so daß es ebenso wahrscheinlich ist, der zur Beobachtung kommende Wert werde zwischen diese Grenzen oder er werde außerhalb derselben fallen, bezeichnet

man als **wahrscheinliche Grenzen**; die Hälfte ihres Intervalls heißt **wahrscheinliche Abweichung**.

Um zunächst einen Wert für letztere zu finden, hat man jenen Wert von Θ zu bestimmen, für welchen $P = \frac{1}{2}$ ist; er heiße ϱ, so daß

$$1)\qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\varrho} e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\varrho^2}}{\sqrt{2\pi p q s}} = \frac{1}{2}$$

wird. Dann ist

$\varrho\sqrt{2pqs}$ die wahrscheinliche Abweichung von m (und n),

$\varrho\sqrt{\frac{2pq}{s}}$ „ „ „ „ $\frac{m}{s}$ (und $\frac{n}{s}$).

Aus dem Ansatze

$$2)\qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\varrho_0} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}$$

ergibt sich

$$\varrho_0 = 0{\cdot}476\,936\,2762;$$

setzt man sodann

$$\varrho = \varrho_0 + \delta,$$

so hat zur Bestimmung von δ die Gleichung zu dienen:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\varrho_0+\delta} e^{-t^2} dt + \frac{e^{-(\varrho_0+\delta)^2}}{\sqrt{2\pi p q s}} = \frac{1}{2};$$

entwickelt man das erste Glied der linken Seite nach Potenzen von δ und bleibt bei der ersten Potenz stehen, so wird

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\varrho_0} e^{-t^2} dt - \frac{2\delta}{\sqrt{\pi}} e^{-\varrho_0^2} + \frac{e^{-(\varrho_0+\delta)^2}}{\sqrt{2\pi p q s}} = \frac{1}{2};$$

daraus aber ergibt sich mit Rücksicht auf die Bedeutung von ϱ_0, Gleichung 2), sowie in Anbetracht dessen, daß $e^{-\varrho_0^2}$ nur sehr wenig von $e^{-(\varrho_0+\delta)^2}$ verschieden ist,

$$\delta = -\frac{1}{2\sqrt{2pqs}}.$$

Hienach wäre

$$\varrho = 0{\cdot}476\,936 \ldots - \frac{1}{2\sqrt{2pqs}}$$

zu setzen; die wahrscheinlichen Grenzen von m würden

$$ps \mp (0{\cdot}476\,936\sqrt{2pqs} - \frac{1}{2}),$$

jene von $\frac{m}{s}$

$$p \mp (0{\cdot}476\,936\sqrt{\frac{2pq}{s} - \frac{1}{2s}})$$

sein. Indessen pflegt man den zweiten Teil von ϱ gegenüber dem ersten zu vernachlässigen und ϱ_0 für ϱ zu nehmen; dann entfällt in den beiden letzten Ansätzen das Glied $\frac{1}{2}$, beziehungsweise $\frac{1}{2s}$.

Um den ziffermäßigen Unterschied dieser zwei Rechnungsweisen beurteilen zu können, möge die Frage nach der wahrscheinlichen Abweichung der Wiederholungszahl m von Wappen in 4040 Würfen mit einer Münze gegenüber der wahrscheinlichsten Zahl 2020 und nach der wahrscheinlichen Abweichung des Verhältnisses $\frac{m}{s}$ gegenüber dem normalen Werte $\frac{1}{2}$ auf beide Arten beantwortet werden.

Die strenge Rechnung gibt für die erstgedachte Abweichung

$$0{\cdot}4769\sqrt{2020} - \frac{1}{2} = 20{\cdot}9\,\ldots,$$

also 20; für die Abweichung $\frac{m}{s} - \frac{1}{2}$

$$\frac{0{\cdot}4769}{\sqrt{8080}} - \frac{1}{8080} = 0{\cdot}052\,935;$$

nach der abgekürzten Rechnung erhält man

21·4, also 21, beziehungsweise 0·053 058.

11. Beispiele.

1. Beispiel. Mit einer Münze werden 4040 Würfe ausgeführt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Wiederholungszahl von Wappen nicht um mehr als 28 von der wahrscheinlichsten Zahl 2020 abweichen, also zwischen 1992 und 2048 liegen werde?

Man hat $\Theta = \frac{l}{\sqrt{2pqs}} = \frac{28}{\sqrt{2020}} = 0{\cdot}623$, denn $p = q = \frac{1}{2}$; ferner ist $P = \Phi(0{\cdot}623) + \frac{e^{-0{\cdot}623^2}}{\sqrt{2020\,\pi}}$; der Tabelle I entnimmt man $\Phi(0{\cdot}62) =$ $= 0{\cdot}619\,4114$, daraus ergibt sich durch Benützung der ersten und zweiten Differenz

$$\Phi(0{\cdot}623) = 0{\cdot}621\,7119;$$

der zweite Teil liefert nach logarithmischer Ausrechnung den Beitrag 0·008 5151; mithin ist

$$P = 0{\cdot}630\,2270.$$

Bei alleiniger Benützung der Tabelle I hätte man nach dem im Punkte 9 dieses Abschnittes entwickelten Verfahren mit

$$\Theta = \frac{l + \frac{1}{2}}{\sqrt{2\pi p q s}} = \frac{28{\cdot}5}{\sqrt{2020}} = 0{\cdot}634\,12.$$

zu rechnen und fände durch Interpolation

$$P = \Phi(0{\cdot}634\,12) = 0{\cdot}630\,1641,$$

also um 0·000 0629 weniger als durch die strenge Rechnung.

2. Beispiel. Welches sind die wahrscheinlichen Grenzen für die Wiederholungszahl einer bezeichneten Nummer in 2854 Lotterieziehungen?

Da die Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen einer bestimmten Nummer in einer Lotterieziehung $p = \frac{1}{18}$ ist,*) so hat man für die wahrscheinliche Abweichung den Wert

$$\varrho\sqrt{2pqs} = 0{\cdot}476936\sqrt{2 \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{17}{18} \cdot 2854} = 8{\cdot}2\,.....$$

Da die wahrscheinlichste Wiederholungszahl $\frac{1}{18} \cdot 2854$, d. i. 158 beträgt, so besteht die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ dafür, es werde sich die

*) Die Wahrscheinlichkeit, daß die bezeichnete Nummer im ersten Zuge erscheint, ist $\frac{1}{90}$. Die Wahrscheinlichkeit, daß sie im ersten Zuge nicht erscheint, wohl aber im zweiten Zuge, beträgt $\frac{89}{90} \cdot \frac{1}{89}$. Denn vor der Ziehung ist das Nichterscheinen der bezeichneten Nummer im ersten Zuge bloß eine Voraussetzung, deren Wahrscheinlichkeit $\frac{89}{90}$ ist. Da ferner vor Beginn der Ziehung die Voraussetzung, daß die bezeichnete Nummer erst im dritten Zuge erscheinen werde. die Wahrscheinlichkeit $\frac{89}{90} \cdot \frac{88}{89}$ besitzt, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß sie im dritten Zuge erscheint, wenn sie in den zwei ersten Zügen nicht kam, $\frac{89}{90} \cdot \frac{88}{89} \cdot \frac{1}{88}$. So weiter schließend, findet man

$$p = \frac{1}{90} + \frac{89}{90} \cdot \frac{1}{89} + \frac{89}{90} \cdot \frac{88}{89} \cdot \frac{1}{88} + \frac{89}{90} \cdot \frac{88}{89} \cdot \frac{87}{88} \cdot \frac{1}{87} + \frac{89}{90} \cdot \frac{88}{89} \cdot \frac{87}{88} \cdot \frac{86}{87} \cdot \frac{1}{86} =$$
$$= \frac{1}{90} + \frac{1}{90} + \frac{1}{90} + \frac{1}{90} + \frac{1}{90} = \frac{1}{18}.$$

bezeichnete Nummer nicht weniger als 150-mal und nicht öfter als 166-mal wiederholen. Wegen der Abrundung des Resultates auf eine ganze Zahl ist die Wahrscheinlichkeit um ein Geringes von $\frac{1}{2}$ verschieden, hier etwas kleiner.

3. Beispiel. Wie viele Versuche sind erforderlich, um mit der Wahrscheinlichkeit P erwarten zu dürfen, daß die Wiederholungszahl eines Ereignisses, dem im einzelnen Versuche die Wahrscheinlichkeit p zukommt, nicht mehr als um $\mathfrak{p}$ Prozent von dem wahrscheinlichsten Werte abweichen werde?

Die Lösung dieser Aufgabe vollzieht sich mittels der beiden Gleichungen

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\Theta} e^{-t^2} dt, \quad \Theta \sqrt{2pqs} = \frac{\mathfrak{p}}{100} s.$$

Nachdem man aus der ersten Θ bestimmt hat, ergibt sich aus der zweiten

$$s = 2pq \left(\frac{100\,\Theta}{\mathfrak{p}} \right)^2.$$

Will man z. B. mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{999}{1000}$ erwarten dürfen, daß die Zahl der weißen Kugeln, die man aus einer Urne mit fünf weißen und einer schwarzen Kugel in s Ziehungen erzielt, höchstens um 5% von ihrem wahrscheinlichsten Werte $\frac{5s}{6}$ abweiche, so suche man zuerst mit Hilfe der Tabelle I denjenigen Wert Θ, der

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\Theta} e^{-t^2} dt = 0{\cdot}999$$

ergibt; durch Benützung der ersten Differenz findet man

$$\Theta = 2{\cdot}32 + \frac{0{\cdot}000\,0345}{0{\cdot}000\,0507} \times 0{\cdot}01 = 2{\cdot}326\,84;$$

mit diesem Werte berechnet sich dann

$$s = 2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{232{\cdot}684}{5} \right)^2 = 601{\cdot}5 \ldots\ldots;$$

hienach sind 602 Ziehungen für den gedachten Zweck erforderlich.

12. Umkehrung des Theorems von Jakob Bernoulli.

Das Bernoullische Theorem regelt die Erwartungsbildung bezüglich der Wiederholungszahlen m und n zweier einander ausschließenden Ereignisse E und F in s Versuchen oder die Erwartungsbildung bezüglich der relativen Häufigkeiten $\frac{m}{s}$ und $\frac{n}{s}$, wenn die Wahrscheinlichkeiten p und q dieser beiden entgegengesetzten Ereignisse bekannt sind und während der Dauer der Versuche unverändert bleiben.

Man kann nun den Inhalt dieses Theorems umkehren und sagen: Das Bernoullische Theorem regelt auch die Erwartungsbildung in Bezug auf die unbekannten, aber unverändert bleibenden Wahrscheinlichkeiten p und q zweier entgegengesetzten Ereignisse E und F, wenn deren Wiederholungszahlen m und n in s Versuchen oder ihre relativen Häufigkeiten $\frac{m}{s}$ und $\frac{n}{s}$ bekannt sind, immer vorausgesetzt, daß s eine große Zahl ist. Dies ist somit eine völlige Umkehrung des Inhaltes des Bernoullischen Theorems; diese Umkehrung regelrecht formuliert lautet folgendermaßen:

Es ist mit der Wahrscheinlichkeit

$$1)\qquad P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\Theta} e^{-t^2} dt$$

zu erwarten, daß die unbekannte Wahrscheinlichkeit p des Ereignisses E zwischen den Grenzen

$$2)\qquad \frac{m}{s} - \Theta \sqrt{\frac{2pq}{s}} \text{ und } \frac{m}{s} + \Theta \sqrt{\frac{2pq}{s}}$$

und die unbekannte Wahrscheinlichkeit q des Ereignisses F zwischen den Grenzen

$$3)\qquad \frac{n}{s} - \Theta \sqrt{\frac{2pq}{s}} \text{ und } \frac{n}{s} + \Theta \sqrt{\frac{2pq}{s}}$$

liege. Diese unbekannten Wahrscheinlichkeiten erfüllen die notwendige Bedingung $p + q = 1$.

In dieser Form sind aber die Grenzen 2) und 3) für die Wahrscheinlichkeiten p und q unbrauchbar, weil diese Grenzen durch die unbekannten Wahrscheinlichkeiten p und q selbst ausgedrückt erscheinen.

Wenn aber die Zahl der Versuche groß ist, so ist p voraussichtlich nur wenig verschieden von $\frac{m}{s}$ und ebenso q wenig verschieden

von $\frac{n}{s}$. Setzt man nun in die Grenzen 2) und 3) für p und q diese Näherungswerte ein, so erhält man eine brauchbare Umkehrung für den Inhalt des Theorems von Jakob Bernoulli. Diese Umkehrung gibt dann jenes Theorem, welches man als „die Umkehrung des Theorems von Jakob Bernoulli" bezeichnet; dasselbe kann wie folgt ausgesprochen werden:

Wenn aus einer großen Anzahl s von Versuchen m-mal das Ereignis E und n-mal ein ihm entgegengesetztes Ereignis F hervorgegangen ist, wenn man ferner weiß, daß die Umstände, welche auf die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse Einfluß haben, während der ganzen Versuchsreihe unverändert geblieben sind, so darf man mit der Wahrscheinlichkeit

$$4)\qquad P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\Theta} e^{-t^2}\,dt$$

erwarten, daß die unbekannte Wahrscheinlichkeit p enthalten ist zwischen den Grenzen

$$5)\qquad \frac{m}{s}-\Theta\sqrt{\frac{2mn}{s^3}} \quad \text{und} \quad \frac{m}{s}+\Theta\sqrt{\frac{2mn}{s^3}}$$

und die unbekannte Wahrscheinlichkeit q zwischen den Grenzen

$$6)\qquad \frac{n}{s}-\Theta\sqrt{\frac{2mn}{s^3}} \quad \text{und} \quad \frac{n}{s}+\Theta\sqrt{\frac{2mn}{s^3}}.$$

Da das Intervall der Grenzen, $2\,\Theta\sqrt{\frac{2mn}{s^3}}$, von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{s}}$ ist, weil m, n im allgemeinen von der Ordnung der Zahl s sind, so konvergiert dieses Intervall, wie groß auch Θ, d. h. wie nahe auch P der Einheit angenommen wird, mit wachsendem s gegen Null. Man kann also die Zahl s der Beobachtungen so groß wählen, daß mit einer der Einheit beliebig nahen Wahrscheinlichkeit erwartet werden darf, die unbekannten Wahrscheinlichkeiten p und q liegen innerhalb beliebig eng festgesetzter Grenzen.

Mit wachsender Zahl der Versuche nähern sich die nach den Formeln 5) und 6) erhaltenen Grenzen bei jedem Θ dem Werte $\frac{m}{s}$, beziehungsweise $\frac{n}{s}$; anderseits nähert sich bei größer werdendem Θ das Integral 1) sehr rasch der Einheit.

Sowie unter der Voraussetzung, daß die Wahrscheinlichkeit p von E *bekannt* sei, von wahrscheinlichen Grenzen der relativen Häufigkeit $\frac{m}{s}$ von E in s Versuchen gesprochen wurde, so kann auch hier von wahrscheinlichen Grenzen der *unbekannten* Wahrscheinlichkeit p von E die Rede sein. Es sind nämlich im Sinne der Ausführungen im Punkte 10 dieses Abschnittes:

$$\frac{m}{s} - 0{\cdot}476\,936\sqrt{\frac{2\,m\,n}{s^3}} \quad \text{und} \quad \frac{m}{s} + 0{\cdot}476\,936\sqrt{\frac{2\,m\,n}{s^3}}$$

die wahrscheinlichen Grenzen von p, d. h. d e Grenzen, innerhalb deren sein Wert mit der Wahrscheinlichkeit $P = \frac{1}{2}$ zu erwarten ist. Ähnliches gilt für die Wahrscheinlichkeit q des Ereignisses F.

Die Möglichkeit, aus dem Ergebnis einer ausgedehnten Beobachtungsreihe einen Schluß auf die unbekannten Wahrscheinlichkeiten der beteiligten Ereignisse zu ziehen, ist der Grund der einstigen Ansicht, daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung Einsicht in Ereignisse gestatte, welche von sonstiger Beobachtung ausgeschlossen sind. So kann man z. B. aus den Ziehungen von schwarzen und weißen Kugeln aus einer Urne auf das Mischungsverhältnis der Kugeln schließen. Dies erfolgt auf Grund der schon hierüber angestellten Versuche und Erfahrungen, nicht aber auf Grund der Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Zusammenfassung. Die Umkehrung des Theorems von *Jakob Bernoulli* lehrt, wie man aus der Wiederholungszahl eines Ereignisses auf seine Wahrscheinlichkeit schließen kann, während das direkte *Bernoullische Theorem* aus der Wahrscheinlichkeit Schlüsse bezüglich der Wiederholungszahl zu ziehen gestattet.

Beispiel. *Aus einer Urne, welche 1000000 Kugeln enthält, und zwar weiße und schwarze in unbekanntem Mischungsverhältnisse, sind 800 Kugeln gezogen worden; davon waren 320 weiß und 480 schwarz. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Verhältnis der Anzahl der weißen Kugeln zu ihrer Gesamtzahl, dessen wahrscheinlichster Wert auf Grund der Beobachtung* $\frac{2}{5}$ *ist, zwischen die Grenzen* $\frac{15}{40}$ *und* $\frac{17}{40}$ *falle?*

Für das numerische Endresultat wird es hier gleichgültig sein, ob man sich die Kugeln nach jeder Ziehung zurückgelegt denkt oder nicht.

Aus dem Ansatze

$$\Theta \sqrt{\frac{2 \times 320 \times 480}{800^3}} = \frac{1}{40}$$

berechnet sich $\Theta = 1{\cdot}0205$, somit ist

$$P = \Phi(1{\cdot}0205) = 0{\cdot}851\,04.$$

Mit dieser Wahrscheinlichkeit ist anzunehmen, daß die Anzahl der weißen Kugeln in der Urne nicht unter 375 000 und nicht über 425 000 betrage.

III. Abschnitt.

Wahrscheinlichkeiten auf Grund der Erfahrung.

A. Wahrscheinlichkeit der möglichen Ursachen eines beobachteten Ereignisses.

1. Definition der Wahrscheinlichkeit a priori und der Wahrscheinlichkeit a posteriori.

Wahrscheinlichkeit a priori nennt man eine Wahrscheinlichkeit, die auf Grund gegebener Umstände in voraus berechnet wird.

Unter Wahrscheinlichkeit a posteriori versteht man eine Wahrscheinlichkeit, die auf Grund vorhergegangener Versuche oder Erfahrungen über das betreffende Ereignis ermittelt wird.

Ist nämlich ein Ereignis von verschiedenen Ursachen abhängig, welche den Eintritt desselben teils begünstigen, teils hindern, so wird in einer Reihe von Versuchen ein Auftreten eine gewisse Anzahl male beobachtet werden, z. B. bei s Versuchen m-mal; hieraus läßt sich, wie gezeigt werden wird, ein Schluß auf die Wahrscheinlichkeit ziehen, welche dem Ereignisse während der Versuche zukam. Dieser Schluß beruht auf der Beurteilung der Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Ursachen, welchen ein beobachtetes Ereignis zugeschrieben werden kann.

2. Ursachen oder Entstehungsmodi eines beobachteten Ereignisses. Annahmen oder Hypothesen über die einem beobachteten Ereignisse zugrunde liegenden Umstände.

Es ist in der Wahrscheinlichkeitstheorie üblich geworden, die für die Erwartungsbildung maßgebenden Umstände im Hinblick auf ein ungewisses Ereignis seine Ursache zu nennen. In diesem Sinne spricht man auch von den möglichen Ursachen eines beobachteten Ereignisses und meint darunter die verschiedenen Bedingungs-

komplexe, aus welchen das Ereignis hervorgegangen sein kann. Es besteht hier ein Widerspruch mit dem gewöhnlichen Sprachgebrauch, indem unter Ursache nicht das verstanden wird, was dem Ereignisse das Eintreffen, die Existenz, mit Notwendigkeit verleiht, sondern etwas, was sie ihm verleihen kann. Am zutreffendsten wäre es wohl, von Annahmen oder Hypothesen über die dem beobachteten Ereignisse zugrunde liegenden Umstände zu sprechen; in vielen Fällen erweist sich die Bezeichnung Entstehungsmodi des beobachteten Ereignisses als zutreffend.

Es soll nun dasjenige Theorem in seinen verschiedenen Formen abgeleitet werden, auf welchem die Beurteilung der Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Ursachen beruht, denen ein beobachtetes Ereignis zugeschrieben werden kann. Die Ableitung soll an schematischen Problemen vorgenommen werden, um deutlich erkennen zu lassen, daß sie keiner neuen Prinzipe bedarf und lediglich auf der Wahrscheinlichkeitsdefinition beruht; mit anderen Worten, daß die aposteriorische Wahrscheinlichkeitsrechnung mit denselben logischen Schlüssen operiert wie die apriorische und sich nur in den Grundlagen von dieser unterscheidet.

3. Theorem von Bayes für den Fall, daß die Ursachen a priori gleichmöglich sind.

Man stellt folgende Aufgabe zur Lösung:

Es liegen n äußerlich gleiche Urnen $U_1, U_2, \ldots, U_n$ von folgender Füllung vor:

U_1 enthält c_1 Kugeln, darunter a_1 weiße;
U_2 „ c_2 „ , „ a_2 „ ;
. . . .
U_n „ c_n „ , „ a_n „ ;

man hat aus einer der Urnen eine Kugel gezogen und sie weiß gefunden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Kugel aus der Urne U_i stamme?

Für das beobachtete Ereignis gibt es n mögliche Entstehungsmodi oder Ursachen, dargestellt durch die n Urnen; die Ursachen sind a priori, d. h. vor der Ziehung gleichmöglich, weil für jede Urne die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ besteht, daß man sie wählen werde.

Um die Lösung der Aufgabe auf die Bestimmung einer Wahrscheinlichkeit im bisher geläufigen Sinne zurückzuführen, gestalte man die Bedingungen folgendermaßen um.

Zunächst bringe man die Urnen auf gleiche Kugelzahl, ohne das Mischungsverhältnis in Ansehung der weißen Kugeln zu ändern. Ist v das kleinste gemeinschaftliche Vielfache (oder ein Vielfaches) der Zahlen $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n$ und ist

$$1)\qquad v = \gamma_1 c_1 = \gamma_2 c_2 = \cdots\cdots = \gamma_n c_n,$$

so enthalten die Urnen je v Kugeln und darunter

$$\gamma_1 a_1, \quad \gamma_2 a_2, \ldots\ldots, \gamma_n a_n$$

weiße.

Nun dürfen, ohne daß die ursprüngliche Gleichmöglichkeit der Einzelfälle gestört würde, die Inhalte der Urnen in einer Urne U vereinigt werden; vorher jedoch sollen die Kugeln jeder Urne mit der gleichen Nummer versehen werden, welche die Urne trägt, um sie auch jetzt noch nach ihrer Abstammung unterscheiden zu können.

Die ursprünglich gestellte Frage ist jetzt identisch mit der folgenden: Eine aus der Urne U gezogene Kugel war weiß; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie mit der Nummer i bezeichnet sei?

Aber auch diese Frage kann vermöge des Umstandes, daß die Farbe der gezogenen Kugel bekannt ist, durch eine andere ersetzt werden: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne, in die man aus U nur die weißen Kugeln gelegt hat, eine Kugel mit der Nummer i zu ziehen?

Die Antwort hierauf ist auf Grund der Wahrscheinlichkeitsdefinition gegeben durch:

$$P_i = \frac{\gamma_i a_i}{\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n}.$$

Ersetzt man die γ durch ihre Werte aus der Relation 1), so wird

$$P_i = \frac{v\frac{a_i}{c_i}}{v\frac{a_1}{c_1} + v\frac{a_2}{c_2} + \cdots\cdots + v\frac{a_n}{c_n}} = \frac{\frac{a_i}{c_i}}{\frac{a_1}{c_1} + \frac{a_2}{c_2} + \cdots\cdots + \frac{a_n}{c_n}};$$

nun ist aber $\frac{a_i}{c_i} = p_i$ die Wahrscheinlichkeit, aus der Urne U_i eine weiße Kugel zu ziehen; demnach ist schließlich die Lösung für das ursprünglich gestellte Problem:

$$2)\qquad P_i = \frac{p_i}{p_1 + p_2 + \cdots\cdots + p_n} = \frac{p_i}{\sum_1^n p_i}.$$

Durch Abstraktion ergibt sich hieraus das Theorem:

Wenn ein beobachtetes Ereignis E mehreren a priori gleichmöglichen Ursachen zugeschrieben werden kann, jedoch so, daß eine von ihnen notwendig wirksam sein mußte, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Ursache U_i es war, gleich der Wahrscheinlichkeit, mit welcher das Ereignis aus ihr zu erwarten ist, geteilt durch die Summe der auf alle Ursachen bezogenen Wahrscheinlichkeiten dieses Ereignisses.

Hieraus ergibt sich die Tatsache, daß die Wahrscheinlichkeit einer Ursache proportional ist der Wahrscheinlichkeit, welche sie dem beobachteten Ereignisse verleiht; daraus folgt weiter, daß die größte Wahrscheinlichkeit jener Ursache zukommt, aus welcher unter allen Ursachen das beobachtete Ereignis mit der größten Wahrscheinlichkeit zu erwarten ist.

Für die totale Wahrscheinlichkeit P, daß entweder die Ursache U_α oder U_β oder U_γ als Ursache eines Ereignisses E anzusehen ist, gilt

$$P = \frac{p_\alpha + p_\beta + p_\gamma}{\sum_1^n i\, p_i}.$$

4. Beispiele.

1. Beispiel. Eine Urne enthält n Kugeln, welche nur weiß oder schwarz sein können. Bei einer vorgenommenen Ziehung erscheint eine weiße Kugel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Urne k weiße Kugeln enthält?

Die Urne kann enthalten:

1	weiße Kugel	und	$n-1$	schwarze	Kugeln,
2	„ Kugeln	„	$n-2$	„	„ ,
3	„	„	$n-3$	„	„ ,
.....					
k	„	„	$n-k$	„	„ ,
....., endlich nur					
n	„	„ .			

Der Fall, daß sich in der Urne nur schwarze Kugeln befinden, wurde außer Acht gelassen, da er bei dem eingetroffenen Ereignisse — Ziehung einer weißen Kugel — unmöglich ist.

Die den möglichen Ursachen entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für das Ziehen einer weißen Kugel sind dann beziehungsweise

$$p_1 = \frac{1}{n},\quad p_2 = \frac{2}{n},\quad p_3 = \frac{3}{n}, \ldots\ldots, p_k = \frac{k}{n}, \ldots\ldots, p_n = \frac{n}{n}.$$

Es ist sonach die Wahrscheinlichkeit, daß die Urne k weiße Kugeln enthält,

$$P_k = \frac{\frac{k}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\cdots+\frac{k}{n}+\cdots+\frac{n}{n}} = \frac{k}{1+2+3+\cdots+k+\cdots+n},$$

oder weil $1+2+\cdots+k+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$ ist,

$$P_k = \frac{2k}{n(n+1)}.$$

Die größte Wahrscheinlichkeit ergibt sich dafür, daß die Urne n weiße Kugeln enthält; diese Wahrscheinlichkeit beträgt

$$P_n = \frac{2}{n+1}.$$

Die wahrscheinlichste Hypothese entspricht daher der Urne mit lauter weißen Kugeln.

Für $k = 1$ erhält man die Wahrscheinlichkeit P_1, daß von den n Kugeln in der Urne nur eine von weißer Farbe ist; es ist:

$$P_1 = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots\cdots+\frac{n}{n}} = \frac{2}{n(n+1)}.$$

2. Beispiel. Eine Urne enthält höchstens 4 Kugeln, welche nur weiß oder schwarz sein können. Man hat zwei Ziehungen mit Zurücklegung der Kugel gemacht; hiebei erschien zuerst eine weiße und dann eine schwarze Kugel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Urne gerade soviel weiße als schwarze Kugeln enthält?

Dem beobachteten Ereignis E (1 weiß, 1 schwarz) können sechs Ursachen zugrunde gelegt werden, nämlich

U_1:	1	weiße,	3	schwarze	Kugeln,
U_2:	2	„ ,	2	„	„ ,
U_3:	3	„ ,	1	„	Kugel,
U_4:	1	„ ,	2	„	Kugeln,
U_5:	2	„ ,	1	„	Kugel,
U_6:	1	„ ,	1	„	„ .

Die Wahrscheinlichkeiten von E nach diesen 6 Ursachen sind:

$$p_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}, \quad p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad p_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16},$$

$$p_4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}, \quad p_5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}, \quad p_6 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Daß die Urne ebensoviel weiße als schwarze Kugeln enthält, ist nur auf 2 Arten möglich, nämlich nur unter Zugrundelegung der Ursachen U_2 und U_6. Die Wahrscheinlichkeiten von E nach diesen zwei Ursachen sind

$$P_2 = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{4}}, \quad P_6 = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{4}}.$$

Da nun das Ereignis E auf zwei einander ausschließende Arten eintreten kann, so ist seine Wahrscheinlichkeit

$$P = P_2 + P_6 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{8} + \frac{4}{9}} = \frac{36}{95}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in der Urne ebensoviel weiße als schwarze Kugeln enthalten sind, beträgt also $\frac{36}{95}$.

5. Theorem von Bayes für den Fall, daß die Ursachen a priori verschiedene Wahrscheinlichkeiten besitzen.

Dieses Theorem behandelt die Lösung des folgenden Problems:

Es liegen äußerlich gleiche Urnen von folgender Füllung vor:

n_1 Urnen U_1 mit je c_1 Kugeln; von den c_1 Kugeln sind a_1 weiße;
n_2 „ U_2 „ „ c_2 „ ; „ „ c_2 „ „ a_2 „ ;
. . . .
n_n „ U_n „ „ c_n „ ; „ „ c_n „ „ a_n „ ;

sämtliche Urnen stehen, wie es der Zufall gibt, vermengt da; man hat aus einer der Urnen eine Kugel gezogen und sie weiß gefunden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Kugel aus einer der Urnen U_i stamme?

Der Unterschied gegenüber dem früheren Falle besteht darin, daß von jeder der Urnengattung U_1, U_2, ..., U_n mehrere vorhanden sind.

Für das beobachtete Ereignis gibt es n Entstehungsmodi, dargestellt durch die n Gruppen gleichbezeichneter Urnen; weil die Anzahl der Urnen in den n Gruppen ungleich ist, so bestehen a priori verschiedene Wahrscheinlichkeitsgrade der Ursachen.

Die Umgestaltung der Bedingungen der Aufgabe für eine möglichst einfache Lösung derselben erfolgt analog wie in dem im Punkte 3 dieses Abschnittes behandelten Falle.

Zunächst bringe man die Urnen auf gleiche Kugelzahl, ohne das Mischungsverhältnis in Ansehung der weißen Kugeln zu ändern. Jede Urne wird dann $v = \gamma_1 c_1 = \gamma_2 c_2 = \cdots = \gamma_n c_n$ Kugeln enthalten, darunter $\gamma_i a_i$ weiße Kugeln in jeder Urne der Gruppe i.

Nun dürfen die Inhalte sämtlicher Urnen in einer Urne U vereinigt werden; vorher jedoch werden die Kugeln jeder Urnengruppe mit der gleichen Nummer versehen, welche die Gruppe trägt. Die Urne U wird hienach $(n_1 + n_2 + \cdots\cdots + n_n)\, v$ Kugeln enthalten. Mit Rücksicht darauf, daß die Farbe der gezogenen Kugel bekannt ist, kann man die weißen Kugeln aus der Urne U ausscheiden und mit denselben eine andere Urne füllen; diese enthält alsdann

$$n_1 \gamma_1 a_1 + n_2 \gamma_2 a_2 + \cdots\cdots + n_n \gamma_n a_n$$

weiße Kugeln. Nun hat man sich die Frage nach der Wahrscheinlichkeit zu stellen, daß ein Zug eine mit der Nummer i bezeichnete Kugel bringe.

Diese Wahrscheinlichkeit ist

$$P_i = \frac{n_i \gamma_i a_i}{n_1 \gamma_1 a_1 + n_2 \gamma_2 a_2 + \cdots\cdots + n_n \gamma_n a_n}$$

und läßt sich, wenn man die γ ausscheidet, wie folgt schreiben:

$$P_i = \frac{n_i \frac{v}{c_i} a_i}{n_1 \frac{v}{c_1} a_1 + n_2 \frac{v}{c_2} a_2 + \cdots\cdots\cdots + n_n \frac{v}{c_n} a_n} =$$

$$= \frac{n_i \frac{a_i}{c_i}}{n_1 \frac{a_1}{c_1} + n_2 \frac{a_2}{c_2} + \cdots\cdots + n_n \frac{a_n}{c_n}}.$$

Bezeichnet man mit N die Anzahl aller Urnen, ist also

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_n = \sum_i^n n_i = N,$$

so kann man auch schreiben:

$$P_i = \frac{\frac{n_i}{N}\frac{a_i}{c_i}}{\frac{n_1}{N}\frac{a_1}{c_1} + \frac{n_2}{N}\frac{a_2}{c_2} + \cdots\cdots + \frac{n_n}{N}\frac{a_n}{c_n}}.$$

Nun ist $\frac{n_i}{N} = \omega_i$ die Wahrscheinlichkeit, eine mit der Nummer i versehene Urne zu ergreifen, also die apriorische Wahrscheinlichkeit der Ursache, um deren Wahrscheinlichkeit a posteriori gefragt wird, und $\frac{a_i}{c_i} = p_i$ die Wahrscheinlichkeit, welche diese Ursache dem beobachteten Ereignisse verleiht. Die Lösung des gestellten Problems ist also durch

$$P_i = \frac{\omega_i p_i}{\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \cdots\cdots + \omega_n p_n} = \frac{\omega_i p_i}{\sum_1^n \omega_i p_i}$$

gegeben.

Das im Punkte 3 dieses Abschnittes formulierte Theorem erfährt also eine Modifikation dahin, daß die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses nach einer Ursache jedesmal mit der apriorischen Wahrscheinlichkeit der Ursache multipliziert in die Formel eingeht. Die größte Wahrscheinlichkeit kommt jener Ursache zu, für welche $\omega_i p_i$ ein Maximum ist.

Das abgeleitete Theorem läßt sich folgendermaßen aussprechen:

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine bestimmte Ursache es war, welche ein Ereignis ins Leben rief, ist gleich dem Produkte aus der apriorischen Wahrscheinlichkeit dieser Ursache und der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses zufolge dieser Ursache, dividiert durch die Summe solcher Produkte, ausgedehnt auf alle bei dem Ereignisse möglich gewesenen Ursachen.

Für die totale Wahrscheinlichkeit P, daß entweder die Ursache U_α oder U_β oder U_γ als Ursache eines Ereignisses anzusehen ist, gilt die Gleichung

$$P = \frac{\omega_\alpha p_\alpha + \omega_\beta p_\beta + \omega_\gamma p_\gamma}{\sum_1^n \omega_i p_i}.$$

Anwendung des gefundenen Resultates auf den speziellen Fall, daß nur zwei Ursachen vorliegen.

Es liegen N äußerlich gleiche Urnen vor; n_1 dieser Urnen bilden die Gruppe U_1 und die übrigen $N-n_1$ Urnen die Gruppe U_2. Innerhalb einer jeden Gruppe sind die Urnen gleich gefüllt, und zwar enthält

jede der n_1 Urnen c_1 Kugeln; von den c_1 Kugeln sind a_1 weiße;
„ „ $N-n_1$ „ c_2 „ ; „ „ c_2 „ „ a_2 „ ;

sämtliche N Urnen stehen, wie es der Zufall gibt, vermengt da; man greift aufs Geratewohl in eine der N Urnen und zieht eine Kugel; dieselbe sei weiß. Es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß die gezogene Kugel aus der Urnengruppe U_1 herrührt.

Das beobachtete Ereignis besteht in dem Erscheinen einer weißen Kugel. Das Eintreffen dieses Ereignisses ist aus zwei Ursachen (Urnengruppe U_1 und Urnengruppe U_2) möglich. Zunächst soll die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, welche jede dieser Ursachen vor dem Versuche besitzt. Die Zahl aller gleich möglichen Fälle — Erfassen einer der N Urnen — beträgt N. Von diesen Fällen sind n_1 der Urnengruppe U_1 und $N-n_1$ der Urnengruppe U_2 günstig. Hienach ist die apriorische Wahrscheinlichkeit von U_1 ausgedrückt durch $\omega_1 = \frac{n_1}{N}$ und die apriorische Wahrscheinlichkeit von U_2 gegeben durch $\omega_2 = \frac{N-n_1}{N}$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine der Urnengruppe U_1 entnommene Kugel weiß sei, ist

$$p_1 = \frac{1}{n_1}\frac{a_1}{c_1} + \frac{1}{n_1}\frac{a_1}{c_1} + \ldots\ldots + \frac{1}{n_1}\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_1}{c_1}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne der Urnengruppe U_2 eine weiße Kugel zu ziehen, ist

$$p_2 = \frac{a_2}{c_2}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß die aufs Geratewohl aus einer der N Urnen gezogene weiße Kugel der Urnengruppe U_1 entstammt, ist sonach

$$P_1 = \frac{\omega_1 p_1}{\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2} = \frac{\frac{n_1}{N}\frac{a_1}{c_1}}{\frac{n_1}{N}\frac{a_1}{c_1} + \frac{N-n_1}{N}\frac{a_2}{c_2}} = \frac{n_1 \frac{a_1}{c_1}}{n_1 \frac{a_1}{c_1} + (N-n_1)\frac{a_2}{c_2}};$$

die Wahrscheinlichkeit, daß die gezogene weiße Kugel der Urnengruppe U_2 entstammt, beträgt

$$P_2 = \frac{\omega_2 p_2}{\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2} = \frac{(N - n_1)\frac{a_2}{c_2}}{n_1 \frac{a_1}{c_1} + (N - n_1)\frac{a_2}{c_2}}.$$

Zusammenfassung. Kann ein beobachtetes Ereignis E aus einer von den n unabhängigen Ursachen U_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ hervorgegangen sein und besteht für die Existenz dieser Ursachen a priori gleiche Wahrscheinlichkeit $(= \frac{1}{n})$, so kommt der Existenz der Ursache U_i auf Grund der Beobachtung die Wahrscheinlichkeit

$$P_i = \frac{p_i}{\sum_1^n{}_i\, p_i}$$

zu, wenn p_i die Wahrscheinlichkeit von E bei Existenz der Ursache U_i bedeutet. Hat diese jedoch a priori die Wahrscheinlichkeit ω_i, so kommt ihr a posteriori die Wahrscheinlichkeit:

$$P_i = \frac{\omega_i p_i}{\sum_1^n{}_i\, \omega_i p_i}$$

zu. Dies sind die beiden Formen des Theorems von Bayes für den Fall einer beschränkten Anzahl von Ursachen.

6. Beispiele. Bemerkungen über die Wahrscheinlichkeiten von Ursachen.

Bei den folgenden zwei Beispielen mit teilweise gleichlautendem Texte ist auf den Entstehungsmodus der Urnenfüllung wohl zu achten. Anschließend an diese Beispiele sollen einige Bemerkungen über die Wahrscheinlichkeiten von Ursachen geknüpft werden.

1. Beispiel. Eine Urne enthält 5 Kugeln, die nur weiß oder schwarz sein können; über den Hergang der Füllung der Urne ist nichts bekannt. Dagegen weiß man, daß in 2 Ziehungen, wobei die gezogene Kugel nicht zurückgelegt wurde. immer eine weiße Kugel erschienen ist.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Urne 2 weiße und 3 schwarze Kugeln enthält?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Urne mehr weiße als schwarze Kugeln enthält?

Bei der Lösung der Aufgabe ist zu beachten, daß mit Rücksicht auf die vorliegende Erfahrung vier Annahmen über die Füllung der Urne gemacht werden können, welche enthalten sind in dem Schema:

U_1:	2	weiße	Kugeln	und	3	schwarze Kugeln,
U_2:	3	„	„	„	2	„ „ ,
U_3:	4	„	„	„	1	„ Kugel,
U_4:	5	„	„	„	keine	„ „ .

Diesen Annahmen entsprechen die Wahrscheinlichkeiten des beobachteten Ereignisses

$$p_1 = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20}, \quad p_2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20}, \quad p_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{12}{20}, \quad p_4 = \frac{20}{20}.$$

Die Frage *a)* ist nach der Wahrscheinlichkeit der Existenz der ersten Füllung (der Annahme U_1) gerichtet, hat also

$$P_1 = \frac{2}{2+6+12+20} = \frac{1}{20}$$

zum Ergebnis.

Die Frage *b)* betrifft die vollständige Wahrscheinlichkeit und ist im vorliegenden Falle durch die Summe von P_2, P_3 und P_4 beantwortet; daher hat man:

$$P = \frac{6+12+20}{2+6+12+20} = \frac{19}{20}.$$

2. Beispiel. In eine Urne wurden 5 Kugeln durch Auslosung mit einer Münze eingebracht: so oft Wappen fiel, wurde eine weiße, so oft Schrift fiel, eine schwarze Kugel eingelegt. Eine darauffolgende Ausführung von 2 Ziehungen, wobei die gezogene Kugel nicht zurückgelegt wurde, ergab jedesmal eine weiße Kugel.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Urne 2 weiße und 3 schwarze Kugeln enthält?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Urne mehr weiße als schwarze Kugeln enthält?

Man hat hier zweierlei Wissen zu unterscheiden, und zwar einerseits wie die Füllung der Urne und anderseits wie die Beobachtungsreihe zustande kam.

Über die Art der Urnenfüllung können folgende Hypothesen gemacht, das ist es können ihr folgende Ursachen zugrunde gelegt werden:

U_1:	2	weiße Kugeln	und	3	schwarze	Kugeln,
U_2:	3	„	„	2	„	„ ,
U_3:	4	„	„	1	„	Kugel,
U_4:	5	„	„	keine	„	„ .

Die Ursache U_1 ist beispielsweise identisch damit, daß beim 5-maligen Aufwerfen der Münze 2-mal Wappen und 3-mal Schrift fiel.

Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ursachen sind als apriorische Wahrscheinlichkeiten zu bezeichnen, denn sie können, bevor noch das Ereignis bekannt ist, bestimmt werden. Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ursachen lauten nun:

$$\omega_1 = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 10\left(\frac{1}{2}\right)^5, \quad \omega_2 = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 10\left(\frac{1}{2}\right)^5,$$

$$\omega_3 = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 5\left(\frac{1}{2}\right)^5, \quad \omega_4 = \binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

Nun sind die Wahrscheinlichkeiten des beobachteten Ereignisses nach den einzelnen Ursachen zu bestimmen; das sind apriorische Wahrscheinlichkeiten. Man findet

$$p_1 = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{2}{20}, \quad p_2 = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{6}{20}, \quad p_3 = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{12}{20}, \quad p_4 = \frac{20}{20}.$$

Zu *a)*. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Urne 2 weiße und 3 schwarze Kugeln enthalte, ist

$$P_1 = \frac{10.2}{10.2 + 10.6 + 5.12 + 20} = \frac{20}{160} = \frac{1}{8}.$$

Zu *b)*. Dem Überwiegen der weißen Kugeln sind nur die Ursachen U_2, U_3 und U_4 günstig; man hat somit für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{10.6 + 5.12 + 20}{10.2 + 10.6 + 5.12 + 20} = \frac{140}{160} = \frac{7}{8}.$$

Da $\omega_1 p_1 : \omega_2 p_2 : \omega_3 p_3 : \omega_4 p_4 = 20 : 60 : 60 : 20 = 1 : 3 : 3 : 1$, so erkennt man, daß die größte Wahrscheinlichkeit den Ursachen U_2 und U_3 zukommt; diese sind somit die wahrscheinlichsten.

Für die Wahrscheinlichkeit, daß die Urne 2 weiße und 3 schwarze Kugeln enthält, wurde im 1. Beispiele der Wert $\frac{1}{20}$, im 2. Beispiele dagegen der Wert $\frac{1}{8}$ gefunden. Den Resultaten der beiden Beispiele kommt also nicht derselbe Erkenntniswert zu. Der Grund hiefür wird aus folgenden Bemerkungen klar:

Wenn man im 1. Beispiele die verschiedenen Füllungsarten (Ursachen) als gleich wahrscheinlich annimmt, so stützt man sich auf ein absolutes Nichtwissen; während beim 2. Beispiel in allen Teilen der Rechnung ein Wissen die Grundlage bildet.

Man denke sich die Person A in einem Zimmer und eine zweite Person B, welche die in großer Anzahl vorhandenen Urnen nach der Vorschrift des 1. Beispiels füllt, in einem Nebenzimmer. B bringt jede gefüllte Urne dem A. Die Person A glaubt der von B gegebenen Versicherung, daß jede Urne nur 5 Kugeln enthält, welche nur schwarz oder weiß sind. A macht nun aus jeder Urne zwei Ziehungen, ohne die gezogene Kugel zurückzulegen und scheidet jene Urnen aus, welche zweimal weiß ergaben. Kann man den Schluß machen, daß von diesen ausgeschiedenen Urnen nahe $\frac{1}{20}$ mit 2 weißen und 3 schwarzen Kugeln gefüllt sein werden?

Für diesen Schluß besteht kein innerer Grund, da man nicht weiß, wie die Urnen gefüllt worden sind. Er hätte nur dann Berechtigung, wenn man wüßte, daß bei der Füllung alle möglichen Kombinationen, nämlich zwei weiß, drei schwarz; drei weiß, zwei schwarz; vier weiß, eine schwarz; fünf weiß, keine schwarz gleichmäßig berücksichtigt worden sind. Ist dieses Wissen nicht vorhanden, dann kann der Schluß irreführen.

Es ist beispielsweise nicht ausgeschlossen, daß B absichtlich die Urnen mit mehr weißen als schwarzen Kugeln gefüllt hat. Dadurch träfe die vorausgesetzte Gleichmöglichkeit der Kombinationen nicht mehr zu.

Erfolgt die Füllung der Urnen durch Auslosung mit einer Münze wie im 2. Beispiel, so ist der Willkür, dem Raffinement, der Leidenschaft der Person, welche nach dieser Vorschrift die Urnen füllt, kein Spielraum gegeben. In diesem Falle kann man demnach sagen:

Wenn man eine sehr große Anzahl von Urnen in der beschriebenen Weise füllt; wenn man aus jeder zwei Ziehungen in der angegebenen Weise macht und diejenigen bei Seite stellt, aus welchen zweimal weiß zum Vorscheine kam, so ist es sehr wahrscheinlich, daß nahe $\frac{1}{8}$ dieser Urnen mit 2 weißen und 3 schwarzen Kugeln gefüllt sein werden.

In allen Fällen, wo das apriorische Wahrscheinlichkeitsgesetz der Ursachen bekannt ist, haben die nach der Regel von Bayes ermittelten Wahrscheinlichkeiten dieselbe Berechtigung und Bedeutung, wie a priori bestimmte Wahrscheinlichkeiten.

Wo jedoch die Kenntnis dieses Gesetzes mangelt und man genötigt ist, den Hypothesen gleiche apriorische Wahrscheinlichkeit zuzuschreiben, sind die Resultate nicht kritiklos hinzunehmen. Die schablonenhafte Anwendung der Regel von Bayes kann hier zu Ergebnissen führen, die keinen inneren Wert besitzen und gegen deren Anerkennung sich der gemeine Verstand sträubt.

7. Theorem von Bayes bei unbegrenzter Menge möglicher Ursachen.

Jene Form, in welcher die Frage nach der Wahrscheinlichkeit einer speziellen Ursache oder eines Ursachenkomplexes für ein beobachtetes Ereignis in den Anwendungen sich am häufigsten einstellt, läßt sich aus dem folgenden Schema entnehmen.

Zwei einfache Ereignisse e und f, die einander entgegengesetzt sind, bilden in irgend einer bestimmten Zusammensetzung das Ereignis B. Die Wahrscheinlichkeiten von e und f sind von vornherein unbekannt. Ist x die Wahrscheinlichkeit von e, so ist $1-x$ jene von f.

Der beobachtete Erfolg, das Ereignis B, bestehe in dem m-maligen Eintreffen von e und dem n-maligen Eintreffen von f in $s=m+n$ Versuchen; dem Ereignisse kann von vornherein jede Wahrscheinlichkeit zwischen 0 und 1 zugeschrieben werden. Über die Umstände, welche auf diese Wahrscheinlichkeit Einfluß haben, sei entweder gar nichts bekannt, so daß man genötigt ist, allen Werten aus dem bezeichneten Intervalle gleichen Möglichkeitsgrad beizulegen, oder aber es bestehe nach dieser Richtung ein solches Wissen, daß man den Wahrscheinlichkeitsgrad für jeden Wert a priori anzugeben imstande ist.

Die Annahme eines Wertes x für die Wahrscheinlichkeit von B ist hier als eine Ursache des beobachteten Ereignisses aufzufassen; es gibt also der Ursachen eine unendliche Menge, weil die Anzahl der reellen Werte in einem Intervall unendlich groß ist. Mit der Annahme eines Wertes x ist aber eine Hypothese über die Natur der zugrunde liegenden Umstände in der Regel nicht gemacht; nur ein allgemeines Bild ist hiefür geschaffen, indem man sagen kann, es verhalte sich mit dem Ereignis in Bezug auf seine Verwirklichung so, wie mit dem Ziehen einer weißen Kugel aus einer Urne, welche mit einer unendlichen Menge weißer und schwarzer Kugeln in dem durch die Zahl x gekennzeichneten Mischungsverhältnisse gefüllt ist. Die Menge der Kugeln muß als unendlich vorausgesetzt werden, damit das Mischungsverhältnis eines jeden Wertes fähig sei.

Für das beobachtete Ereignis entspringt aus x die Wahrscheinlichkeit

$$y = x^m (1 - x)^n;$$

mithin wäre bei gleicher apriorischer Wahrscheinlichkeit aller Werte von x die aposteriorische Wahrscheinlichkeit des besonderen Wertes x gleich

$$\frac{y}{\sum\limits_{0}^{1} {}_i\, y_i}.$$

Ein solcher Ausdruck ist aber für die Rechnung ungeeignet, da die Summe im Nenner sich über alle Werte des Intervalles (0,1) zu erstrecken hätte; er zeigt nur die von vornherein erkennbare Tatsache an, daß die Wahrscheinlichkeit eines individuellen Wertes x von Null nicht zu unterscheiden ist.

Hier ist also eine Modifikation der Fragestellung notwendig und diese soll darin bestehen, daß man nach der Wahrscheinlichkeit eines Wertes aus dem Intervalle $(x, x + dx)$ fragt; diese wird der Größe dx des Intervalls und dem zugehörigen Werte von y, der in diesem Intervall als konstant erachtet werden kann, proportional, also durch

$$k y \, dx$$

darstellbar sein; berücksichtigt man, daß die auf alle Intervalle bezogene Summe dieser Ausdrücke den Wert 1 haben muß, so folgt aus der Gleichung

$$k \int_0^1 y \, dx = 1$$

für k die Bestimmung:

$$k = \frac{1}{\int_0^1 y \, dx}$$

und hiemit ergibt sich für die beschriebene Wahrscheinlichkeit der Ausdruck

$$1) \qquad p_x = \frac{y \, dx}{\int_0^1 y \, dx}.$$

Der Ausdruck für p_x ist zwar auch unendlich klein, aber der Rechnung schon zugänglich. Derjenige Wert von x, welcher y zu einem Maximum macht, wird als der wahrscheinlichste Wert

oder als **Wahrscheinlichkeit** von B nach der **wahrscheinlichsten Hypothese** bezeichnet.

Die Wahrscheinlichkeit, daß x in ein endliches Intervall (α, β) falle, ist daraus

$$2)\qquad P = \frac{\int_\alpha^\beta y\,dx}{\int_0^1 y\,dx}.$$

Das Integral im Nenner des Ausdruckes für P ist angebbar; es ist nämlich [siehe Punkt 10 B) dieses Abschnittes]:

$$\int_0^1 y\,dx = \int_0^1 x^m (1-x)^n\,dx = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!};$$

hiemit geht 2) über in

$$P = \frac{(m+n+1)!}{m!\,n!} \int_\alpha^\beta y\,dx$$

Beispiel. Für $m=1$, $n=2$; $\alpha=0$, $\beta=\frac{1}{2}$ erhält man:

$$P = \frac{4!}{1!\,2!} \int_0^{\frac{1}{2}} x(1-x)^2\,dx = 12 \int_0^{\frac{1}{2}} (x - 2x^2 + x^3)\,dx = \frac{11}{16}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß x in das Intervall $(0, \frac{1}{2})$ falle, beträgt somit $\frac{11}{16}$. Es ist daher wahrscheinlicher, daß $y = x(1-x)^2$ kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, als daß es diesen Wert überschreitet. Mit anderen Worten, es ist wahrscheinlicher, daß beim nächsten Versuche das Ereignis e nicht eintrifft, als daß es eintrifft.

In dem Falle, daß man die Wahrscheinlichkeit einer Ursache anzugeben imstande ist — sie heiße z und wird eine Funktion von x sein — erfahren die Formeln 1) und 2) eine ähnliche Änderung, wie sie beim Theorem von Bayes notwendig war, beim Übergange von dem Fall, in welchem die Ursachen a priori gleichmöglich sind, zu dem Fall, in welchem die Ursachen a priori verschiedene Wahrscheinlichkeit besitzen. Ist also z die apriorische Wahrscheinlichkeit der Ursache, nämlich des Wertes x, ferner y die Wahrscheinlichkeit, welche diese Ursache, der Wert x, dem beobachteten Ereignisse B verleiht, so ist die Wahrscheinlichkeit des eingetretenen Ereignisses B, welche der Annahme x entspringt, gegeben durch

3) $$p_x = \frac{z y \, d x}{\int_0^1 z y \, d x}$$

und die Wahrscheinlichkeit, daß die Ursache, also der Wert x, zwischen den Grenzen α und β liegt

$$P = \frac{\int_\alpha^\beta z y \, d x}{\int_0^1 z y \, d x}.$$

Derjenige Wert von x, welcher p_x, d. h. zy zu einem Maximum macht, wird auch hier als die Wahrscheinlichkeit von B nach der wahrscheinlichsten Hypothese bezeichnet.

8. Ursachen, welche den Eintritt eines Ereignisses begünstigen.

Hat ein Ereignis eine Wahrscheinlichkeit größer als $\frac{1}{2}$ für den einmaligen Eintritt, so sagt man, es existiert eine Ursache, welche den Eintritt begünstigt. So ist z. B., wenn man aus einer Urne, die 3 weiße und 2 schwarze Kugeln enthält, Kugeln zieht, die Wahrscheinlichkeit, eine weiße zu ergreifen, $\frac{3}{5} > \frac{1}{2}$; es ist also wahrscheinlicher, eine weiße Kugel zu ziehen, als eine schwarze. Das öftere Ziehen einer weißen Kugel hat also eine Ursache, eben die, daß 3 weiße und bloß 2 schwarze Kugeln vorhanden sind. Würde man nicht wissen, wieviel weiße und wieviel schwarze Kugeln die Urne enthält, würde man aber nach einer Reihe von Zügen finden, daß mehr weiße als schwarze Kugeln gezogen wurden, so würde man schließen, daß der Zug einer weißen Kugel gegenüber dem Zuge einer schwarzen Kugel begünstigt ist, daß also eine Ursache existiert, welche das öftere Erscheinen einer weißen Kugel bewirkt. Diese Ursache würde man einfach dahin deuten, daß die Urne mehr weiße als schwarze Kugeln enthält, daß also die Wahrscheinlichkeit für den Zug einer weißen Kugel größer als $\frac{1}{2}$ ist.

Ist beispielsweise y die auf x basierende Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses B, so hat man, bei Voraussetzung gleicher apriorischer Wahrscheinlichkeit aller Werte von x, für die aposteriorische

Wahrscheinlichkeit, daß x in ein endliches Intervall (α, β) falle, den Ausdruck

$$P = \frac{\int_\alpha^\beta y\,dx}{\int_0^1 y\,dx};$$

soll eine Ursache den Eintritt des Ereignisses begünstigen, so muß $x > \frac{1}{2}$, also zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegen; man erhält also für die Wahrscheinlichkeit der Begünstigung des Eintrittes des Ereignisses

$$P = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 y\,dx}{\int_0^1 y\,dx}.$$

Beispiel. Über den Inhalt einer Urne ist weder der Menge der Kugeln nach, noch in Bezug auf deren Farbenverhältnis etwas näheres bekannt. Man hat n Ziehungen, und zwar immer mit Zurücklegung der Kugel gemacht und jedesmal eine weiße Kugel ergriffen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Urne weiße Kugeln in der Überzahl enthält?

Die beiden einfachen Ereignisse, die hier mitspielen, sind:

e Ziehen einer weißen Kugel und
f Ziehen einer nicht weißen Kugel;

die Wahrscheinlichkeit von e sei x, dann ist die von f offenbar $1 - x$.

Da man weder über die Menge der Kugeln noch über das Farbenverhältnis derselben Näheres weiß, so ist x eines jeden Wertes aus dem Intervalle (0, 1) fähig. Das beobachtete Ereignis B ist zusammengesetzt aus dem n-maligen Eintreffen des Ereignisses e, es ist also $y = x^n$. Da weiße Kugeln in der Überzahl sein sollen, so muß x zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegen. Man hat also für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 x^n\,dx}{\int_0^1 x^n\,dx} = \frac{\left\{\frac{x^{n+1}}{n+1}\right\}_{\frac{1}{2}}^1}{\left\{\frac{x^{n+1}}{n+1}\right\}_0^1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1};$$

sie nähert sich um so mehr der Einheit, je größer n ist. Für $n = 4$ erhält man $P = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$.

9. Die wahrscheinlichste Hypothese.

Die wahrscheinlichste Hypothese über die bedingenden Umstände des beobachteten Ereignisses B ist durch jenen Wert von x gekennzeichnet, welcher p_x, d. h. welcher y, beziehungsweise $z\,y$ zum Maximum macht. Man nennt diesen Wert — er heiße a — die Wahrscheinlichkeit von B nach der wahrscheinlichsten Hypothese.

Aus $y = x^m (1-x)^n$ ergibt sich durch Nullsetzen des ersten Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = m\,x^{m-1}(1-x)^n - n\,x^m (1-x)^{n-1} =$$
$$= x^{m-1}(1-x)^{n-1}\left\{m(1-x) - n\,x\right\} = 0;$$

nun kann x nicht gleich Null werden, weil das Ereignis e m-mal beobachtet wurde und weil das Ereignis f n-mal beobachtet wurde, kann auch $1-x$ nicht verschwinden; soll also die letzte Gleichung erfüllt werden, so hat man zu setzen:

$$m(1-x) - n\,x = 0;$$

daraus folgt

$$1) \qquad x = a = \frac{m}{m+n} = \frac{m}{s}, \quad m + n = s.$$

Der wahrscheinlichste Wert setzt sich zusammen aus der Zahl m der Wiederholungen von e als Zähler und der Gesamtzahl s der Versuche als Nenner. Hiemit berechnet sich der maximale Wert von y mit

$$2) \qquad M = \frac{m^m\,n^n}{s^s}.$$

Es soll nun das Verhalten von y in der Umgebung des Maximums unter der Voraussetzung geprüft werden, daß s eine große Zahl ist. Zu dem Ende setze man

$$x = \frac{m}{s} + \xi, \text{ wodurch } 1 - x = 1 - \frac{m}{s} - \xi = \frac{s-m}{s} - \xi = \frac{n}{s} - \xi$$

und damit

$$y = \left(\frac{m}{s} + \xi\right)^m \left(\frac{n}{s} - \xi\right)^n = M\left(1 + \frac{s}{m}\xi\right)^m \left(1 - \frac{s}{n}\xi\right)^n = M\,Q$$

wird. Je kleiner ξ, um so mehr ist es gestattet, die nach der bekannten Reihe

$$l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\cdots, \quad -1 < x \leqq +1,$$

ausgeführte Entwicklung:

$$lQ = m\, l\left(1 + \frac{s}{m}\xi\right) + n\, l\left(1 - \frac{s}{n}\xi\right) =$$

$$= m\left(\frac{s}{m}\xi - \frac{s^2}{2m^2}\xi^2 + \cdots\cdots\right) + n\left(-\frac{s}{n}\xi - \frac{s^2}{2n^2}\xi^2 - \cdots\cdots\right)$$

bei der zweiten Potenz des Argumentes ξ abzubrechen; es wird dann

$$lQ = -\frac{s^3}{2mn}\xi^2 \quad \text{und somit} \quad Q = e^{-\frac{s^3}{2mn}\xi^2};$$

bei Berücksichtigung der Glieder mit ξ^3 träte im Exponenten das Glied $\frac{s^3(n^2-m^2)}{3m^2n^2}\xi^3$ hinzu, welches bei großem s (und m, n) auf den Wert der Exponentialgröße nur unerheblichen Einfluß nimmt.

Der Ansatz

$$y = M e^{-\frac{s^3}{2mn}\xi^2}$$

zeigt nun, daß y in der Umgebung von a anfangs langsam, bald aber sehr rasch abnimmt und Werte erlangt, die im Vergleich zu M außerordentlich gering sind. Zur Erläuterung dieses Ergebnisses mögen folgende Angaben dienen: Für $m = 300$, $n = 200$ ($s = 500$) ist $a = \frac{3}{5}$ und es findet sich, daß

für $\xi = \pm\frac{1}{100}$ $\quad y = 0{\cdot}901\,07\, M$,

„ $\xi = \pm\frac{5}{100}$ $\quad y = 0{\cdot}073\,965\, M$,

„ $\xi = \pm\frac{1}{10}$ $\quad y = 0{\cdot}000\,029\,929\, M$,

„ $\xi = \pm\frac{1}{5}$ $\quad y = 0{\cdot}000\,000\,000\,000\,000\,000\,802\,41\, M$.

Wenn auch die Rechnung bei so großem ξ nicht mehr sehr scharf ist, so zeigt sie doch, daß Annahmen von x, die nur einigermaßen von der wahrscheinlichsten Annahme a abweichen, im Vergleiche zu dieser eine überaus geringe Wahrscheinlichkeit für sich haben.

Was den Maximalwert M von y selbst betrifft, so ist er außerordentlich klein und im vorliegenden Falle erst an der 147. Dezimalstelle mit einer bedeutsamen Ziffer besetzt.

10. Bestimmung der Wahrscheinlichkeit P dafür, daß die Wahrscheinlichkeit p für das Eintreffen des Ereignisses e zwischen den Grenzen $\frac{m}{s} \mp \delta$ liegt. Umkehrung des Theorems von Jakob Bernoulli.

A) Bestimmung des Ausdruckes für die Wahrscheinlichkeit P.

Der beobachtete Erfolg bestehe in dem m-maligen Eintreffen des Ereignisses e und in dem n-maligen Eintreffen des entgegengesetzten Ereignisses f in $m + n = s$ Versuchen, dabei die Unveränderlichkeit der bedingenden Umstände vorausgesetzt; die unbekannten, zur Einheit sich ergänzenden Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse e, f seien p, q.

Die Wahrscheinlichkeit, daß p zwischen die Grenzen $\frac{m}{s} - \delta$ und $\frac{m}{s} + \delta$ falle, von dem wahrscheinlichsten Werte $\frac{m}{s}$ also höchstens um δ nach der einen oder andern Seite abweiche, ist, gleiche apriorische Wahrscheinlichkeit der möglichen Hypothesen vorausgesetzt, nach Formel 2) des Punktes 7 dieses Abschnittes

$$P = \frac{\int_{\frac{m}{s}-\delta}^{\frac{m}{s}+\delta} y\,dx}{\int_0^1 y\,dx},$$

darin $y = x^m (1 - x)^n$ gesetzt. Es handelt sich also um die Bestimmung des im Nenner und im Zähler stehenden Integrals. Zunächst soll das Integral im Nenner und dann das Zählerintegral bestimmt werden.

B) Berechnung des Integrals $J_{m,n} = \int_0^1 x^m (1 - x)^n \,dx$, worin m und n ganze positive Zahlen bedeuten.

Durch partielle Integration erhält man, wenn

$$u = (1 - x)^n, \qquad dv = x^m\,dx, \text{ also}$$

$$du = -n(1 - x)^{n-1}\,dx, \qquad v = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

gesetzt wird:

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx = \left\{ \frac{x^{m+1}(1-x)^n}{m+1} \right\}_0^1 + \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1} dx =$$

$$= \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1} dx,$$

oder

$$J_{m,n} = \frac{n}{m+1} J_{m+1,\,n-1};$$

daher ist

$$J_{m+1,\,n-1} = \frac{n-1}{m+2} J_{m+2,\,n-2},$$

$$J_{m+2,\,n-2} = \frac{n-2}{m+3} J_{m+3,\,n-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$J_{m+n-1,\,1} = \frac{1}{m+n} J_{m+n,\,0}.$$

Durch Multiplikation dieser Gleichungen folgt

$$J_{m,n} = \frac{n}{m+1} \cdot \frac{n-1}{m+2} \cdot \frac{n-2}{m+3} \cdots\cdots \frac{1}{m+n} \cdot J_{m+n,\,0}.$$

Nun ist

$$J_{m+n,\,0} = \int_0^1 x^{m+n} dx = \frac{1}{m+n+1},$$

also ergibt sich

$$J_{m,n} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1}{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots\ldots(m+n+1)} =$$

$$= \frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots(n-1)\,n}{(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+n+1)} =$$

$$= \frac{1.2.3\ldots\ldots m.1.2.3\ldots\ldots n}{1.2.3\ldots\ldots\ldots(m+n+1)} = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}.$$

Man hat also

$$J_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}.$$

Beispiel. Es ist

$$\int_0^1 x^5 (1-x)^3 dx = \frac{5!\,3!}{9!} = \frac{1.2.3}{6.7.8.9} = \frac{1}{504}.$$

C) Näherungsweise Darstellung des Integrals $\int_{\frac{m}{s}-\delta}^{\frac{m}{s}+\delta} x^m (1-x)^n dx$ durch ein anderes Integral.

Man führe in dasselbe eine neue Veränderliche mittels der Beziehung

$$x = \frac{m}{s} + \xi$$

ein; dadurch wird

$$\int_{\frac{m}{s}-\delta}^{\frac{m}{s}+\delta} x^m (1-x)^n dx = \int_{-\delta}^{\delta} \left(\frac{m}{s}+\xi\right)^m \left(\frac{n}{s}-\xi\right)^n d\xi;$$

hiefür kann unter der Voraussetzung, daß die Grenzen des Integrals klein seien, nach den Entwicklungen des Punktes 9 dieses Abschnittes mit großer Annäherung

$$\frac{m^m n^n}{s^s} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{s^3}{2mn}\xi^2} d\xi$$

geschrieben werden.

D) Berechnung von *P*. Umkehrung des Theorems von Jakob Bernoulli.

Man findet also mit Rücksicht auf *B)* und *C)* für die Wahrscheinlichkeit, daß p zwischen die Grenzen $\frac{m}{s} - \delta$ und $\frac{m}{s} + \delta$ falle,

$$P = \frac{(s+1)!}{m!\,n!} \cdot \frac{m^m n^n}{s^s} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{s^3}{2mn}\xi^2} d\xi.$$

Dieser Ausdruck ist für die Rechnung noch immer zu kompliziert. Die weitere Vereinfachung erfolgt dadurch, daß man die Fakultäten durch die Stirlingsche Formel ausdrückt. Man erhält:

$$\frac{(s+1)!}{m!\,n!} = \frac{(s+1)\,.\,s!}{m!\,n!} = \frac{(s+1)\,.\,s^s e^{-s}\sqrt{2\pi s}}{m^m e^{-m}\sqrt{2\pi m}\,.\,n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} =$$

$$= (s+1)\frac{s^s\sqrt{s}}{m^m n^n \sqrt{2\pi m n}}.$$

Je größer s ist, mit umso größerer Annäherung kann s für $s+1$, also auch

$$\frac{s^s}{m^m n^n}\sqrt{\frac{s^3}{2\pi m n}}$$

für $\frac{(s+1)\, s^s \sqrt{s}}{m^m\, n^n \sqrt{2\pi m n}}$ gesetzt werden. Dann aber geht der Wert für P über in

$$P = \sqrt{\frac{s^3}{2\pi m n}} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{s^3}{2mn}\xi^2}\, d\xi.$$

Führt man hierin mittels der Substitution $\sqrt{\frac{s^3}{2mn}} \cdot \xi = t$ die neue Veränderliche t ein, so wird $d\xi = \sqrt{\frac{2mn}{s^3}}\, dt$ und

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\delta\sqrt{\frac{s^3}{2mn}}}^{\delta\sqrt{\frac{s^3}{2mn}}} e^{-t^2}\, dt.$$

Bezeichnet man $\delta \sqrt{\frac{s^3}{2mn}}$ mit Θ, so folgt

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\Theta}^{\Theta} e^{-t^2}\, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\Theta} e^{-t^2}\, dt.$$

Man kann hienach den Satz aussprechen: Es ist mit der Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\Theta} e^{-t^2}\, dt$$

zu erwarten, daß die unbekannte Wahrscheinlichkeit p des Ereignisses e zwischen den Grenzen

$$\frac{m}{s} - \delta \quad \text{und} \quad \frac{m}{s} + \delta$$

liege. Da

$$\delta \sqrt{\frac{s^3}{2mn}} = \Theta, \quad \text{also} \quad \delta = \Theta \sqrt{\frac{2mn}{s^3}},$$

so drückt P die Wahrscheinlichkeit aus, daß die unbekannte Wahrscheinlichkeit p des Ereignisses e zwischen die Grenzen

$$\frac{m}{s} - \Theta \sqrt{\frac{2mn}{s^3}} \quad \text{und} \quad \frac{m}{s} + \Theta \sqrt{\frac{2mn}{s^3}}$$

fällt.

Beispielsweise für $\Theta = 3$ erhält P bereits nahezu den Wert 1. Folglich kann man es fast als sicher ansehen, daß die Wahrscheinlichkeit p zwischen den Grenzen

$$\frac{m}{s} - 3\sqrt{2}\sqrt{\frac{m\,n}{s^3}} \quad \text{und} \quad \frac{m}{s} + 3\sqrt{2}\sqrt{\frac{m\,n}{s^3}}$$

eingeschlossen ist.

Da das Intervall der Grenzen, $2\,\Theta\sqrt{\frac{2\,m\,n}{s^3}}$, von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{s}}$ ist, weil m und n im allgemeinen von der Ordnung der Zahl s sind, so konvergiert es, wie groß auch Θ, d. h. wie nahe auch P der Einheit angenommen wird, mit wachsendem s gegen Null. Man kann also die Anzahl s der Beobachtungen so groß wählen, daß mit einer der Einheit beliebig nahen Wahrscheinlichkeit erwartet werden darf, die unbekannte Wahrscheinlichkeit p liege innerhalb beliebig eng festgesetzter Grenzen. In diesem Ausspruche liegt wieder die Umkehrung des Theorems von Jakob Bernoulli, zu welcher man auf dem Wege über das Theorem von Bayes gelangte.

Bisher wurde angenommen, daß m und n große Zahlen sind, es wurden also die Fälle ausgeschlossen, in welchen das Verhältnis $\frac{m}{s}$ bei unbegrenztem Wachstum der Zahl der Versuche gegen 1 oder 0 konvergiert. Diese beiden speziellen Fälle sind dadurch gekennzeichnet, daß im ersten Falle nur das Ereignis e, im zweiten nur das entgegengesetzte Ereignis f eintritt. Es soll der erste dieser Fälle näher betrachtet werden.

Wenn bei s Versuchen das Ereignis e s-mal eintrifft, dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich x um weniger als ε von der Einheit unterscheidet, nach Gleichung 2) des Punktes 7 dieses Abschnittes

$$P = \frac{\int_{1-\varepsilon}^{1} x^s\,d\,x}{\int_{0}^{1} x^s\,d\,x} = 1 - (1-\varepsilon)^{s+1}.$$

Bei unbegrenztem Wachsen von s nähert sich obiger Ausdruck bei jedem noch so kleinen Wert ε der Einheit; also gilt auch für diesen Fall die Umkehrung des Theorems von Jakob Bernoulli.

Die Untersuchung des zweiten Falles führt zu demselben Schlusse.

E) Wahrscheinliche Grenzen der unbekannten Wahrscheinlichkeit p des Ereignisses e.

Setzt man $P = \frac{1}{2}$, so erhält man aus

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\Theta} e^{-t^2}\,d\,t$$

mit Hilfe der Tabelle I für Θ den Wert 0·476 936 2762. Es ist daher 1 gegen 1 anzunehmen, daß die unbekannte Wahrscheinlichkeit p von e zwischen den Grenzen

$$\frac{m}{s} - 0{\cdot}476\,936\sqrt{\frac{2mn}{s^3}} \quad \text{und} \quad \frac{m}{s} + 0{\cdot}476\,936\sqrt{\frac{2mn}{s^3}}$$

oder zwischen den Grenzen

$$\frac{m}{s} - 0{\cdot}6745\sqrt{\frac{mn}{s^3}} \quad \text{und} \quad \frac{m}{s} + 0{\cdot}6745\sqrt{\frac{mn}{s^3}}$$

liegt; man kann auch sagen, innerhalb dieser Grenzen ist der Wert von p mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zu erwarten. Diese Grenzen bezeichnet man als die wahrscheinlichen Grenzen der gesuchten Wahrscheinlichkeit. Es ist also ebenso wahrscheinlich, daß der Wert der unbekannten Wahrscheinlichkeit p zwischen den wahrscheinlichen Grenzen liegt als außerhalb dieser Grenzen. Die Hälfte des Intervalls der wahrscheinlichen Grenzen heißt wahrscheinliche Abweichung.

F) Präzision der gewonnenen Bestimmung $\frac{m}{s}$ für p.

Zwei Versuchsreihen, mögen sie sich auf dieselbe oder auf verschiedene Materien beziehen, sind in Bezug auf die Weite der Grenzen, innerhalb welcher sie die Abweichung $\frac{m}{s} - p$ mit gegebener Wahrscheinlichkeit P erwarten lassen, mit einander vergleichbar.

Um diese Vorstellung zu präzisieren, denke man sich zwei Beobachtungs- oder Versuchsreihen; die eine beziehe sich auf die Ereignisse e, f, denen im ganzen Verlaufe der s Versuche die unbekannten Wahrscheinlichkeiten p, q zukommen; die andere betreffe die Ereignisse e', f' mit den gleichfalls unbekannten Wahrscheinlichkeiten p', q' und umfasse s' Versuche. Die Wiederholungszahl von e sei m, die von e' sei m'. Alsdann ist mit der Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\Theta} e^{-t^2}\,dt$$

zu erwarten, daß einerseitseits

$$-\Theta\sqrt{\frac{2mn}{s^3}} < p - \frac{m}{s} < \Theta\sqrt{\frac{2mn}{s^3}}$$

und anderseits

$$-\Theta\sqrt{\frac{2m'n'}{s'^3}} < p' - \frac{m'}{s'} < \Theta\sqrt{\frac{2m'n'}{s'^3}}.$$

Die Weite dieser Intervalle ist

$$2\Theta\sqrt{\frac{2mn}{s^3}}, \quad 2\Theta\sqrt{\frac{2m'n'}{s'^3}}$$

und hängt bei gegebenem P, also bei festem Θ nur von dem Wurzelausdruck ab. Je enger nun das Intervall, je näherliegend an das Verhältnis $\frac{m}{s}$ der Wert p mit gegebener Wahrscheinlichkeit zu erwarten ist, für desto genauer wird man die betreffenden Versuche erklären. Die Genauigkeit wächst also mit der Abnahme von $\sqrt{\frac{2mn}{s^3}}$ oder sie wächst mit dem Wachsen von

$$h = \sqrt{\frac{s^3}{2mn}}$$

und man kann übereinkommen, diesen Ausdruck geradezu als das Maß der Präzision der durch die Erfahrung gewonnenen Bestimmung $\frac{m}{s}$ für p aufzufassen.

Die Präzision wächst sonach wie die Quadratwurzel aus der 3. Potenz der Anzahl der Versuche und ist umso größer, je kleiner das Produkt mn ist.*)

Zur Ausführung der hier auftretenden Rechnungen bedient man sich der Tabelle I.

B. Wahrscheinlichkeit künftiger Ereignisse auf Grund von Beobachtungen.

11. Aposteriorische Wahrscheinlichkeit eines zu gewärtigenden Ereignisses.

Eine aus Versuchen oder Beobachtungen für ein zufälliges Ereignis abgeleitete Wahrscheinlichkeit wird als empirische oder als Erfahrungswahrscheinlichkeit bezeichnet. Die Theorie bietet zwei Methoden ihrer Bestimmung dar.

Die eine Methode besteht darin, daß man dem Ereignis diejenige Wahrscheinlichkeit zuschreibt, welche sich aus der wahrschein-

*) Bekanntlich wird das Produkt mn, wobei $m + n = s$ ist, ein Maximum für $m = n = \frac{s}{2}$.

lichsten Hypothese über das beobachtete Ereignis dafür ergibt. Man nennt diese Wahrscheinlichkeit die Wahrscheinlichkeit nach der wahrscheinlichsten Ursache bestimmte. Ihre Berechnung erfordert die Anwendung der Bayesschen Regel.

Die andere Methode besteht darin, daß man alle Hypothesen, die mit dem beobachteten Ereignis vereinbar sind, bei der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit des künftigen Ereignisses mitwirken läßt, jede entsprechend dem Grade ihrer eigenen Wahrscheinlichkeit. In diesem Falle spricht man von einer Wahrscheinlichkeit a posteriori im besonderen.

Vom theoretischen Standpunkte wäre die zweite Methode vorzuziehen, weil sie auf alle möglichen Ursachen Rücksicht nimmt, während die erste sich auf eine bestimmte von diesen Ursachen allein stützt. Bei umfangreichen Erfahrungsreihen, wie solche in den praktischen Anwendungen zumeist vorliegen, liegen die Resultate beider Methoden so nahe aneinander, daß es wohl gleichgültig bleibt, welches von beiden man wählt. Zumeist wird hier unter der empirischen Wahrscheinlichkeit die nach der wahrscheinlichsten Hypothese gerechnete verstanden.

Das erste Verfahren bedarf keiner Erläuterung mehr.

Die Bestimmung der aposteriorischen Wahrscheinlichkeit eines zu gewärtigenden Ereignisses besteht in einer Anwendung der Sätze von der zusammengesetzten und der vollständigen Wahrscheinlichkeit.

Bei dieser Bestimmung sollen 3 Fälle unterschieden werden, und zwar:

a) Die Ursachen a priori sind gleichmöglich und in begrenzter Menge vorhanden;

b) die Ursachen a priori besitzen verschiedene Wahrscheinlichkeit und sind gleichfalls in endlicher Menge vorhanden, endlich

c) die Ursachen a priori sind in unbegrenzter Menge vorhanden.

Der Wortlaut für die Beweisführung der Fälle *a)* und *b)* ist fast gleichlautend, wurde aber dennoch, um den Unterschied klar hervortreten zu lassen, in ungekürzter Form aufgenommen.

Zu *a)*. Es sei B das beobachtete Ereignis, das sich aus den einfachen, einander entgegengesetzten Ereignissen e, f irgendwie zusammensetzt; dasselbe lasse die gleichmöglichen Ursachen

$$U_1, U_2, \ldots\ldots, U_n$$

zu; die Wahrscheinlichkeiten, mit welchen B aus diesen zulässigen Ursachen zu erwarten ist, seien

$$p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n,$$

so daß die Ursache U_i dem Ereignis B die Wahrscheinlichkeit p_i verleiht. Ferner mögen

$$P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n$$

die aposteriorischen Wahrscheinlichkeiten dieser Ursachen bezeichnen, das sind also die Wahrscheinlichkeiten, nachdem das Ereignis B bereits eingetreten ist; P_i ist also die aposteriorische Wahrscheinlichkeit der Ursache U_i. Nach dem Theorem von Bayes hat man

$$1)\qquad P_i = \frac{p_i}{\sum_1^n p_i}.$$

Es soll nun die Wahrscheinlichkeit des künftigen, ebenfalls aus c und f zusammengesetzten Ereignisses K ermittelt werden.

Jede der n zulässigen Ursachen verleiht auch dem künftigen Ereignisse K eine gewisse Wahrscheinlichkeit; diese Wahrscheinlichkeiten seien beziehungsweise

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_n.$$

Es bezeichnet also $\mathfrak{p}_i$ die Wahrscheinlichkeit, welche die Ursache U_i dem künftigen Ereignisse K verleiht.

Soll nun das Ereignis K infolge der Ursache U_i eintreffen, so muß vor allem diese Ursache wirksam sein. Es ist aber P_i die aus der Beobachtung des Ereignisses B abgeleitete aposteriorische Wahrscheinlichkeit, daß die Ursache U_i vorlag. War dies wirklich der Fall und ist bei dem künftigen Ereignisse die nämliche Ursache aktiv wie bei dem beobachteten, so ist K mit der Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{p}_i$ zu erwarten; folglich ist $P_i \mathfrak{p}_i$ die Wahrscheinlichkeit, daß K durch die Ursache U_i zustande kommt. Nun kann K durch n verschiedene Ursachen hervorgerufen werden, daher ist seine Wahrscheinlichkeit Π gleich der Summe der den einzelnen Ursachen zukommenden Wahrscheinlichkeiten, also eine totale Wahrscheinlichkeit oder eine Wahrscheinlichkeit des Entweder-oder. Für diese vollständige, aus der Erfahrung gefolgerte Wahrscheinlichkeit a posteriori von K gilt also der Ausdruck:

$$2)\qquad \Pi = P_1 \mathfrak{p}_1 + P_2 \mathfrak{p}_2 + \cdots\cdots + P_n \mathfrak{p}_n = \sum_1^n P_i \mathfrak{p}_i.$$

Ersetzt man darin P_i durch seinen nach dem Theorem von Bayes bestimmten Wert 1), so findet man

$$3)\qquad \Pi = \frac{p_1 \mathfrak{p}_1 + p_2 \mathfrak{p}_2 + \cdots\cdots + p_n \mathfrak{p}_n}{\sum_1^n p_i} = \frac{\sum_1^n p_i \mathfrak{p}_i}{\sum_1^n p_i}.$$

Beispiele.

1. Beispiel. Es liegen drei äußerlich gleiche Urnen U_1, U_2, U_3 von folgender Füllung vor:

U_1	enthält	2	weiße		und	3 schwarze	Kugeln,
U_2	„	1	„	Kugel	„	2 „	„ ,
U_3	„	3	„	Kugeln	„	1 „	Kugel;

man hat aus einer der Urnen eine Kugel gezogen, sie weiß befunden und wieder in die Urne zurückgelegt, deren Inhalt dann gemischt wird. Welche Wahrscheinlichkeit besteht für das Ziehen einer weißen Kugel beim nächsten Zug?

Beim zweiten Zug ist man bezüglich der Urnen in Ungewißheit; es ist hier

$$p_1 = \frac{2}{5}, \quad \mathfrak{p}_1 = \frac{2}{5},$$
$$p_2 = \frac{1}{3}, \quad \mathfrak{p}_2 = \frac{1}{3},$$
$$p_3 = \frac{3}{4}, \quad \mathfrak{p}_3 = \frac{3}{4}.$$

Die Wahrscheinlichkeit des künftigen Ereignisses K des Ziehens einer weißen Kugel ist daher

$$\Pi = \frac{\frac{4}{25} + \frac{1}{9} + \frac{9}{16}}{\frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4}} = \frac{4 \cdot 144 + 25 \cdot 16 + 81 \cdot 25}{2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 16 + 3 \cdot 25 \cdot 16 + 4 \cdot 25 \cdot 9 \cdot 3} =$$
$$= \frac{576 + 400 + 2025}{1440 + 1200 + 2700} = \frac{3001}{5340}.$$

2. Beispiel. Aus einer Urne, die nur weiße und schwarze Kugeln, im ganzen vier, enthält, sind vier Ziehungen mit Zurücklegung der Kugel gemacht worden; dreimal erschien eine weiße, einmal eine schwarze Kugel. Welche empirische Wahrscheinlichkeit folgt aus diesen Tatsachen für das Ziehen einer weißen Kugel aus der Urne?

Dem beobachteten Ereignis B (3 weiß, 1 schwarz) können drei Ursachen zugrunde gelegt werden, nämlich:

U_1:	3	weiße Kugeln,	1	schwarze	Kugel,
U_2:	2	„ „ ,	2	„	Kugeln,
U_3:	1	„ Kugel,	3	„	„ ;

die Wahrscheinlichkeiten von B nach diesen drei Ursachen sind:

$$p_1=\left(\frac{3}{4}\right)^3\frac{1}{4}=\frac{27}{256};\quad p_2=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{16}{256};\quad p_3=\left(\frac{1}{4}\right)^3\frac{3}{4}=\frac{3}{256};$$

die Wahrscheinlichkeiten der Ursachen selbst lauten:

$$P_1=\frac{27}{46},\quad P_2=\frac{16}{46},\quad P_3=\frac{3}{46}.$$

Das künftige Ereignis K ist das Ziehen einer weißen Kugel. Seine Wahrscheinlichkeit nach der wahrscheinlichsten Ursache (U_1) ist

$$\frac{3}{4}=0\cdot75,$$

seine Wahrscheinlichkeit a posteriori dagegen

$$\Pi=\frac{27}{46}\cdot\frac{3}{4}+\frac{16}{46}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{46}\cdot\frac{1}{4}=\frac{29}{46}=0\cdot630\ldots..$$

Zu *b)*. Es sei B das beobachtete Ereignis, das sich aus den einfachen, einander entgegengesetzten Ereignissen e, f irgendwie zusammensetzt; dasselbe lasse die Ursachen

$$U_1,\ U_2,\ \ldots\ldots..,\ U_n$$

zu, deren apriorische Wahrscheinlichkeiten

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots\ldots,\ \omega_n$$

sein mögen; die Wahrscheinlichkeiten, mit welchen B aus den zulässigen Ursachen zu erwarten ist, seien

$$p_1,\ p_2,\ \ldots\ldots,\ p_n;$$

ferner mögen

$$P_1,\ P_2,\ \ldots\ldots..,\ P_n$$

die aposteriorischen Wahrscheinlichkeiten dieser Ursachen, das sind also die Wahrscheinlichkeiten, nachdem das Ereignis B bereits eingetreten ist, bezeichnen. Nach dem Theorem von Bayes hat man dann

$$4)\qquad P_i=\frac{\omega_i p_i}{\sum_1^n{}_i\ \omega_i p_i}.$$

Es soll nun die Wahrscheinlichkeit des künftigen, ebenfalls aus e und f zusammengesetzten Ereignisses K ermittelt werden.

Es ist leicht einzusehen, daß jede der n zulässigen Ursachen dem künftigen Ereignisse K eine gewisse Wahrscheinlichkeit verleiht; diese Wahrscheinlichkeiten seien beziehungsweise

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \ldots\ldots..,\ \mathfrak{p}_n.$$

Soll nun das Ereignis K aus der Ursache U_i hervorgehen, so muß vor allem diese Ursache wirksam sein. Es ist aber P_i die aus der Beobachtung des Ereignisses B abgeleitete aposteriorische Wahrscheinlichkeit, daß die Ursache U_i vorlag. War dies wirklich der Fall und ist bei dem künftigen Ereignisse die nämliche Ursache aktiv wie bei dem beobachteten, so ist K mit der Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{p}_i$ zu erwarten; folglich ist $P_i \mathfrak{p}_i$ die Wahrscheinlichkeit, daß K durch die Ursache U_i zustande kommt. Da nun K durch n verschiedene Ursachen hervorgerufen werden kann, ist seine Wahrscheinlichkeit Π gleich der Summe der den einzelnen Ursachen zukommenden Wahrscheinlichkeiten. Man hat also für die vollständige, aus der Erfahrung gefolgerte, also für die Wahrscheinlichkeit a posteriori von K den Ausdruck

$$5) \qquad \Pi = P_1 \mathfrak{p}_1 + P_2 \mathfrak{p}_2 \cdots\cdots + P_n \mathfrak{p}_n = \sum_1^n{}_i P_i \mathfrak{p}_i,$$

oder mit Rücksicht auf 4)

$$6) \qquad \Pi = \frac{\omega_1 p_1 \mathfrak{p}_1 + \omega_2 p_2 \mathfrak{p}_2 + \ldots\ldots \omega_n p_n \mathfrak{p}_n}{\sum_1^n{}_i \omega_i p_i} = \frac{\sum_1^n{}_i \omega_i p_i \mathfrak{p}_i}{\sum_1^n{}_i \omega_i p_i}.$$

Waren die Ursachen von vornherein gleichmöglich, also $\omega_1 = \omega_2 = \ldots\ldots = \omega_n$, so vereinfacht sich die Formel und lautet

$$7) \qquad \Pi = \frac{\sum_1^n{}_i p_i \mathfrak{p}_i}{\sum_1^n{}_i p_i},$$

übereinstimmend mit 3).

Zu *c)*. Ist die Wahrscheinlichkeit x von e aller Werte des stetigen Bereiches (0, 1) fähig, so stellen sich die früher mit $\omega, p, \mathfrak{p}$ bezeichneten Wahrscheinlichkeiten insgesamt als Funktionen von x dar und sollen nunmehr mit z, y, w bezeichnet werden, so daß z die apriorische Wahrscheinlichkeit von x, y die auf x basierende Wahrscheinlichkeit von B und w die aus x gefolgerte Wahrscheinlichkeit von K bedeutet. Die aposteriorische Wahrscheinlichkeit von K stellt sich dann in der Gestalt

$$8) \qquad \Pi = \frac{\int_0^1 y\,z\,w\,dx}{\int_0^1 y\,z\,dx}$$

und, wenn z konstant ist, in der Form

$$\Pi = \frac{\int_0^1 y\,w\,d\,x}{\int_0^1 y\,d\,x} \tag{9}$$

dar.

Zusammenfassung über die aus der Beobachtung abgeleitete Wahrscheinlichkeit künftiger Ereignisse: Zur Bewertung der Wahrscheinlichkeit neuer Ereignisse auf Grund vorliegender Beobachtungsergebnisse führt die Bayessche Regel in Verbindung mit den Sätzen über die zusammengesetzte und totale Wahrscheinlichkeit. Ist P_i die aposteriorische Wahrscheinlichkeit der Ursache U_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), $\mathfrak{p}_i$ die Wahrscheinlichkeit, welche diese Ursache dem künftigen Ereignisse K verleihen würde, wenn sie existent wäre, so ist $\Pi = \sum_1^n{}^i P_i \mathfrak{p}_i$ die totale, aus der Beobachtung erschlossene Wahrscheinlichkeit von K. Ersetzt man darin P_i durch seinen nach der Bayesschen Regel bestimmten Wert, so ergibt sich für Π der Ausdruck:

$$\Pi = \frac{\sum_1^n{}^i p_i \mathfrak{p}_i}{\sum_1^n{}^i p_i} \quad \text{oder} \quad \Pi = \frac{\sum_1^n{}^i \omega_i p_i \mathfrak{p}_i}{\sum_1^n{}^i \omega_i p_i},$$

je nachdem die Ursache U_i, welche dem beobachteten Ereignisse B die Wahrscheinlichkeit p_i zuschreibt, eine vom Zeiger i unabhängige oder eine mit ihm wechselnde apriorische Wahrscheinlichkeit ω_i besitzt.

Hängt das beobachtete Ereignis B wie das künftige Ereignis K von der Wahrscheinlichkeit x eines elementaren Ereignisses e ab, so treten an die Stelle der obigen Formeln die nachstehenden:

$$\Pi = \frac{\int_0^1 y\,w\,d\,x}{\int_0^1 y\,d\,x} \quad \text{oder} \quad \Pi = \frac{\int_0^1 y\,z\,w\,d\,x}{\int_0^1 y\,z\,d\,x},$$

je nachdem allen Werten von x a priori die gleiche oder jedem eine besondere apriorische Wahrscheinlichkeit z, zukommt; y ist die Wahrscheinlichkeit von B, w die von K.

12. Beispiele.

1. Beispiel. Eine Urne enthält n Kugeln, welche nur weiß oder schwarz sein können. Bei einer vorgenommenen Ziehung erscheint eine weiße Kugel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei dem nächsten Zuge wieder eine weiße Kugel erscheint, wenn die zuerst gezogene Kugel wieder zurückgelegt wird?

Die Urne kann enthalten:

1 weiße Kugel und $n-1$ schwarze Kugeln,
2 „ Kugeln „ $n-2$ „ „ ,
3 „ „ „ $n-3$ „ „ ,
. . . . endlich
n „ „ .

Diesen einzelnen Ursachen entsprechend wird die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weißen Kugel bei der zweiten Ziehung beziehungsweise sein:

$$\mathfrak{p}_1 = \frac{1}{n}, \quad \mathfrak{p}_2 = \frac{2}{n}, \quad \ldots\ldots, \quad \mathfrak{p}_k = \frac{k}{n}, \quad \ldots\ldots, \quad \mathfrak{p}_n = \frac{n}{n}.$$

Die Wahrscheinlichkeit der Ursache, daß die Urne k weiße Kugeln enthält, beträgt zufolge des 1. Beispieles im Punkte 4 dieses Abschnittes

$$P_k = \frac{2k}{n(n+1)}.$$

Für die Ursache, daß die Urne k weiße Kugeln enthält, hat die Wahrscheinlichkeit des künftigen Ereignisses, des Ziehens einer weißen Kugel, den Wert

$$\mathfrak{p}_k = \frac{k}{n},$$

daher ist

$$P_k\,\mathfrak{p}_k = \frac{2k}{n(n+1)} \cdot \frac{k}{n} = \frac{2 \cdot k^2}{n^2(n+1)}$$

die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses für die Annahme: k weiße Kugeln, sowie das Ziehen einer weißen Kugel.

Nun kann eine weiße Kugel gezogen werden unter den Annahmen, daß die Urne entweder 1, oder 2, oder 3, ..., oder k, ..., oder n weiße Kugeln enthält. Diesen zusammengesetzten Ereignissen entsprechen beziehungsweise die Wahrscheinlichkeiten

$$P_1 \mathfrak{p}_1 = \frac{2 \cdot 1^2}{n^2(n+1)},$$

$$P_2 \mathfrak{p}_2 = \frac{2 \cdot 2^2}{n^2(n+1)},$$

$$P_3 \mathfrak{p}_3 = \frac{2 \cdot 3^2}{n^2(n+1)},$$

....

$$P_k \mathfrak{p}_k = \frac{2 \cdot k^2}{n^2(n+1)},$$

....

$$P_n \mathfrak{p}_n = \frac{2 \cdot n^2}{n^2(n+1)};$$

daher hat die gesuchte Wahrscheinlichkeit a posteriori für das künftige Ereignis, Ziehen einer weißen Kugel, den Wert:

$$\Pi = \sum_1^n {}^k P_k \mathfrak{p}_k = \frac{2}{n^2(n+1)} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + \dots + n^2);$$

da $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots\dots + n^2 = \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1)$,*) ist auch

$$\Pi = \frac{2}{n^2(n+1)} \cdot \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1)$$

oder

$$\Pi = \frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3n}.$$

---

*) Bekanntlich bildet die Reihe der Quadratzahlen eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung.

Die Summe der n ersten Quadratzahlen kann man, gestützt auf die Summe der n ersten Glieder der natürlichen Zahlen, auf folgende Art finden:

Setzt man in $(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$ der Reihe nach $a = 1, 2, 3, \dots n$, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} 2^3 &= 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\ 3^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\ 4^3 &= 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ (n+1)^3 &= n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 \end{aligned}\right\}$$

addiert man diese n Gleichungen und läßt die auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens vorkommenden Glieder 2^3, 3^3, ..., n^3, weg, so erhält man

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n;$$

daraus folgt:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}\left\{(n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n\right\} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Je größer also die Anzahl der Kugeln ist, desto näher wird der Wert der Wahrscheinlichkeit an $\frac{2}{3}$ kommen. Für $n = \infty$ wird $\Pi = \frac{2}{3}$.

2. Beispiel. Eine Urne enthält n Kugeln, welche nur weiß oder schwarz sein können. Bei einer vorgenommenen Ziehung erscheint eine weiße Kugel, welche aber nicht zurückgelegt wird. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß im nächsten Zuge wieder eine weiße Kugel erscheint?

Unter der Annahme, daß die Urne k weiße Kugeln enthält, ist, nachdem eine weiße Kugel gezogen wurde (das beobachtete Ereignis),

$$\mathfrak{p}_k = \frac{k-1}{n-1}$$

die Wahrscheinlichkeit, daß auch im nächsten Zuge eine weiße Kugel erscheint (das künftige Ereignis), weil die weiße Kugel, die bereits gezogen wurde, nicht zurückgelegt wird. Da nun dem 1. Beispiel des Punktes 4 dieses Abschnittes zufolge die Wahrscheinlichkeit

$$P_k = \frac{2k}{n(n+1)}$$

für die Annahme besteht, daß die Urne k weiße Kugeln enthält, so ist

$$P_k \, \mathfrak{p}_k = \frac{2k(k-1)}{n(n+1)(n-1)}$$

die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens beider Ereignisse. Demnach ist die gesuchte aposteriorische Wahrscheinlicheit des künftigen Ereignisses:

$$\Pi = P_1 \mathfrak{p}_1 + P_2 \mathfrak{p}_2 + \cdots\cdots + P_k \mathfrak{p}_k + \cdots\cdots + P_n \mathfrak{p}_n = \sum_1^n P_k \mathfrak{p}_k =$$

$$= \frac{2}{n(n^2-1)} \sum_1^n k(k-1) = \frac{2}{n(n^2-1)} \left(\sum_1^n k^2 - \sum_1^n k \right).$$

Da bekanntlich

$$\sum_1^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

$$\sum_1^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + n = \frac{1}{2} n(n+1),$$

somit

$$\sum_1^n k^2 - \sum_1^n k = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{3} n(n^2-1),$$

so erhält man schließlich

$$\Pi = \frac{2}{n(n^2-1)} \cdot \frac{1}{3} n(n^2-1) = \frac{2}{3},$$

unabhängig von der Anzahl der Kugeln, welche die Urne enthält.

3. Beispiel. Eine Urne enthält eine unendlich große Anzahl von Kugeln; bei einem Zuge wurde eine weiße Kugel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei dem nächsten Zuge wieder eine weiße Kugel erscheint?

Es sei x die unbekannte Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weißen Kugel, wobei x alle Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann. Dann ist

$$P_x = \frac{x\,dx}{\int_0^1 x\,dx}$$

die aposteriorische Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses B, Ziehen einer weißen Kugel, welche der Ursache x entspricht; daher ist

$$P_x \mathfrak{p}_x = \frac{x^2\,dx}{\int_0^1 x\,dx}$$

die Wahrscheinlichkeit, daß unter dieser Hypothese bei dem nächsten Zuge wieder eine weiße Kugel erscheint. Es ist sonach die Wahrscheinlichkeit a posteriori, im nächsten Zuge eine weiße Kugel zu ergreifen (das künftige Ereignis K):

$$\Pi = \frac{\int_0^1 x^2\,dx}{\int_0^1 x\,dx} = \frac{2}{3}.$$

Da die Anzahl der Kugeln nicht vermindert wird, ist es hier nicht nötig, daß die gezogene Kugel wieder zurückgelegt wird. Wenn es auch unmöglich ist, eine Urne mit unendlich vielen Kugeln zu haben, so kann man sich wohl vorstellen, daß diese unendlich vielen Kugeln das Eintreffen oder Ausbleiben eines Naturereignisses darstellen können.

Man vergleiche dieses Beispiel mit den zwei vorhergehenden Beispielen bezüglich der für Π erhaltenen Resultate.

4. Beispiel. Es liegen N äußerlich gleiche Urnen von folgender Füllung vor:

Je ... von den c_1 Kugeln sind a_1

Wert ... Kugeln; von den c_2 Kugeln

we... ...wahl in eine der N Urnen und

Zi... ... weiß und werde nicht zurück-

... Urne, welcher diese Kugel ent-

... zweite Kugel gezogen werden. Es

... dafür zu bestimmen, daß auch

... Kugel weiß sei.

... Beispiel mit dem speziellen Falle des

...

... Ereignis K — bestehend in dem abermaligen ... Kugel — gibt es zwei mögliche Ursachen U_1 ... Wahrscheinlichkeiten

$$\omega_1 = \frac{n_1}{N} \quad \text{und} \quad \omega_2 = \frac{N-n_2}{N}.$$

... Wahrscheinlichkeit, daß bei dem Eintreffen des Ereignisses B ... weißen Kugel) die Ursache U_1 wirksam war, ist

$$P_1 = \frac{n_1 \dfrac{a_1}{c_1}}{n_1 \dfrac{a_1}{c_1} + (N-n_1)\dfrac{a_2}{c_2}};$$

... Wahrscheinlichkeit dafür, daß die gezogene Kugel einer Urne ... Gattung u_2 entstammt, beträgt:

$$P_2 = \frac{(N-n_1)\dfrac{a_2}{c_2}}{n_1 \dfrac{a_1}{c_1} + (N-n_1)\dfrac{a_2}{c_2}}.$$

Ist die zuerst gezogene Kugel einer Urne der Gattung u_1 entstammen, so ist die Wahrscheinlichkeit, aus derselben Urne bei der zweiten Ziehung abermals eine weiße Kugel zu erhalten,

$$\mathfrak{p}_1 = \frac{a_1 - 1}{c_1 - 1},$$

denn im ganzen sind dann nur $c_1 - 1$ Kugeln in dieser Urne, darunter $a_1 - 1$ von weißer Farbe.

Stammt die gezogene Kugel aus einer Urne von der Gattung u_2 her, so ist die Wahrscheinlichkeit, aus derselben Urne auch bei der zweiten Ziehung eine weiße Kugel zu bekommen,

$$\mathfrak{p}_2 = \frac{a_2 - 1}{c_2 - 1}.$$

Hiemit erhält man für die aposteriorische Wahrscheinlichkeit des künftigen Ereignisses:

$$\Pi = P_1 \mathfrak{p}_1 + P_2 \mathfrak{p}_2 = \frac{n_1 \frac{a_1}{c_1} \frac{a_1 - 1}{c_1 - 1} + (N - n_1) \frac{a_2}{c_2} \frac{a_2 - 1}{c_2 - 1}}{n_1 \frac{a_1}{c_1} + (N - n_1) \frac{a_2}{c_2}}.$$

13. Hauptaufgabe über die aposteriorische Wahrscheinlichkeit.

Das beobachtete Ereignis B bestehe in dem m-maligen Eintreffen und dem n-maligen Ausbleiben eines Ereignisses e von unbekannter, a priori aller Werte gleichfähiger Wahrscheinlichkeit x. Das künftige Ereignis K bedeute das m'-malige Eintreffen und das n'-malige Ausbleiben von e in $m' + n'$ weiteren Beobachtungen.

Die Bestimmung der aposteriorischen Wahrscheinlichkeit Π von K hat nach der Formel

$$\Pi = \frac{\int_0^1 y w \, dx}{\int_0^1 y \, dx}$$

zu erfolgen, und zwar ist darin

$$y = x^m (1 - x)^n, \qquad w = \binom{m' + n'}{m'} x^{m'} (1 - x)^{n'}$$

zu setzen; denn das beobachtete Ereignis zeigt eine bestimmte Reihenfolge des Eintreffens und Ausbleibens von e, während bezüglich des künftigen Ereignisses diese Reihenfolge unbestimmt und gleichgültig ist. Hienach hat man

$$1) \qquad \Pi = \binom{m' + n'}{m'} \frac{\int_0^1 x^{m+m'} (1 - x)^{n+n'} \, dx}{\int_0^1 x^m (1 - x)^n \, dx}.$$

Nun ist

$$\binom{m'+n'}{m'} = \frac{(m'+n')!}{m'!\,n'!}, \int_0^1 x^{m+m'}(1-x)^{n+n'}\,dx = \frac{(m+m')!\,(n+n')!}{(m+m'+n+n'+1)!},$$

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n\,dx = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!};$$

hiemit erhält man für Π den nur aus Fakultäten zusammengesetzten Ausdruck:

$$2)\qquad \Pi = \frac{(m'+n')!\,(m+m')!\,(n+n')!\,(m+n+1)!}{m'!\,n'!\,(m+m'+n+n'+1)!\,m!\,n!}.$$

Setzt man hierin $m+n=s$ und $m'+n'=s'$, so kann 2) auch geschrieben werden:

$$\Pi = \frac{s'!}{m'!\,n'!}\cdot\frac{(m+m')!\,(n+n')!}{(s+s'+1)!}\cdot\frac{(s+1)!}{m!\,n!}.$$

Sind die Werte s, m und n groß, so kann man die Fakultäten mittels der Stirlingschen Formel auswerten. Es wird dann, wenn man $\frac{1}{s}$ und $\frac{1}{s+s'}$ gegen die Einheit vernachlässigt,

$$\Pi = \frac{s'!}{m'!\,n'!}\cdot\frac{(m+m')^{m+m'}}{m^m}\cdot\frac{(n+n')^{n+n'}}{n^n}\cdot\frac{s^s}{(s+s')^{s+s'}}\cdot\sqrt{\frac{(m+m')(n+n')s^3}{mn\,(s+s')^3}}.$$

Spezielle Fälle.

1. Fall. Durch die Annahme $m'=1$, $n'=0$ geht Π in die aposteriorische Wahrscheinlichkeit des Ereignisses e selbst über; diese beträgt also:

$$3)\qquad \Pi = \frac{\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^n\,dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx} = \frac{m+1}{m+n+2}.$$

Der Formel 3) kann man nachstehende Deutung geben: Hat man $m+n$ Versuche gemacht, in denen das Ereignis m-mal eintrat, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Ereignis im nächsten Versuche wieder eintreten wird, gleich der Wahrscheinlichkeit, mit welcher man aus einer Urne, die $m+1$ weiße und $n+1$ schwarze Kugeln enthält, eine weiße Kugel zieht. Da

$$P = \frac{m}{m+n}$$

die Wahrscheinlichkeit dafür ist, aus einer Urne mit m weißen und n schwarzen Kugeln eine weiße Kugel zu ziehen, so gilt folgende Regel für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit des Eintreffens eines Ereignisses im nächsten Versuche, wenn es bereits in früheren Versuchen eingetreten ist:

Ist das Ereignis bei $m+n$ Versuchen m-mal eingetreten, so ist die Wahrscheinlichkeit für das abermalige Eintreffen im nächsten Versuche gleich der Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weißen Kugel aus einer Urne, die m weiße und n schwarze Kugeln enthält, nachdem man zuvor noch eine weiße und eine schwarze Kugel in die Urne gelegt hat.

Die durch 3) ausgedrückte Wahrscheinlichkeit unterscheidet sich um so weniger von der Wahrscheinlichkeit nach der wahrscheinlichsten Hypothese, deren Wert $\frac{m}{m+n}$ ist, je umfangreicher die Beobachtung B ist.

Bildet man die Differenz der beiden Wahrscheinlichkeitswerte $\frac{m}{m+n}$ (Wahrscheinlichkeit von e nach der wahrscheinlichsten Hypothese) und $\frac{m+1}{m+n+2}$ (aposteriorische Wahrscheinlichkeit von e), so findet man

$$\frac{m}{m+n} - \frac{m+1}{m+n+2} = \frac{m}{s} - \frac{m+1}{s+2} = \frac{2m-s}{s(s+2)} = \frac{m-n}{s(s+2)}.$$

Der Unterschied nimmt sonach mit der Zahl s der Versuche sehr rasch ab, denn s kommt im Nenner in der 2. Potenz vor. Der Unterschied wird aber auch um so kleiner, je weniger sich die Wiederholungszahlen m und n der beiden Elementarereignisse voneinander unterscheiden. Ist $m=n$, so ist der Unterschied der Wahrscheinlichkeitswerte gleich Null.

Je weiter die Wahrscheinlichkeitswerte auseinander liegen, um so größer ist ihre Differenz, und zwar nach der einen oder der anderen Seite, je nachdem $m \gtrless n$ ist.

Unter der Voraussetzung, daß $m+n$ eine sehr große Zahl ist, hat das Resultat 3) auch eine wohlbegründete Bedeutung, wenn die Voraussetzung der gleichen apriorischen Wahrscheinlichkeit aller Werte von x nicht zutrifft; wegen der außerordentlich raschen Abnahme der Funktionen unter dem Integralzeichen, sobald man sich von den einander naheliegenden Stellen $\frac{m+1}{m+n+1}$ und $\frac{m}{m+n}$ ihrer

Maxima entfernt, wirken nämlich nur enge Intervalle um diese Werte auf den Betrag Π ein, und innerhalb dieser Intervalle wird es zumeist untunlich sein, eine Abstufung im Möglichkeitsgrade der Werte von x vorzunehmen.

2. Fall. Setzt man in der Formel 2) $m = m'$, $n = n'$, $(m + n = s)$, so kommt man zu der aposteriorischen Wahrscheinlichkeit eines künftigen Erfolges, der mit dem beobachteten, was die Wiederholungszahlen des Eintreffens und Ausbleibens anbelangt, vollständig übereinstimmt. Ist s sehr groß, so ergibt sich für diese Wahrscheinlichkeit der Näherungswert

$$4)\qquad \Pi = \sqrt{\frac{s}{4\pi mn}}\,.$$

Setzt man, um dies zu zeigen, in 2) $m = m'$, $n = n'$, $m + n = m' + n' = s$, so erhält man

$$\Pi = \frac{s!\,(2m)!\,(2n)!\,(s+1)!}{(m!\,n!)^2\,(2s+1)!}\,.$$

Mit Benützung der Stirlingschen Formel ergibt sich:

$$\begin{aligned}
s! &= s^s e^{-s}\sqrt{2\pi s}\,,\\
(2m)! &= (2m)^{2m} e^{-2m}\sqrt{4\pi m}\,,\\
(2n)! &= (2n)^{2n} e^{-2n}\sqrt{4\pi n}\,,\\
(s+1)! &= (s+1)\,s! = (s+1)\,s^s e^{-s}\sqrt{2\pi s}\,,\\
m! &= m^m e^{-m}\sqrt{2\pi m}\,,\\
n! &= n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\,,\\
(2s+1)! &= (2s+1)(2s)! = (2s+1)(2s)^{2s} e^{-2s}\sqrt{4\pi s}\,,
\end{aligned}$$

daher ist

$$\Pi = \frac{s^s e^{-s}\sqrt{2\pi s}\,.\,2^{2m} m^{2m}\,2^{2n} n^{2n} e^{-2(m+n)}\,4\pi\sqrt{mn}\,.\,(s+1)\,s^s e^{-s}\sqrt{2\pi s}}{m^{2m} n^{2n} e^{-2(m+n)}\,.\,4\pi^2 mn\,.\,(2s+1)\,2^{2s} s^{2s} e^{-2s}\sqrt{4\pi s}}\,,$$

oder

$$5)\qquad \Pi = \frac{(s+1)\sqrt{s}}{(2s+1)\sqrt{\pi mn}}\,.$$

Nun kann man an Stelle von $s+1$ und $2s+1$ setzen s beziehungsweise $2s$, wenn man 1 gegen die großen Zahlen s und $2s$ vernachlässigt; dadurch übergeht 5) in

$$\Pi = \frac{s\sqrt{s}}{2s\sqrt{\pi mn}} = \frac{\sqrt{s}}{2\sqrt{\pi mn}} = \sqrt{\frac{s}{4\pi mn}}$$

übereinstimmend mit 4).

Bei demselben s ist das durch 4) bestimmte Π um so größer, je mehr die Zahlen m, n voneinander verschieden sind; sein kleinster Wert ist $\frac{1}{\sqrt{\pi s}}$. Denn es nimmt das Produkt mn, wobei $m + n = s$ ist, dann den größtmöglichsten Wert an, wenn die Faktoren gleich sind, also für $m = n = \frac{s}{2}$.

Hätte man beispielsweise aus einer Urne unbekannten Inhaltes in 10 000 Ziehungen 2 000mal eine weiße und 8 000mal eine schwarze Kugel hervorgeholt, so wäre gemäß der Formel 4) mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{80\sqrt{\pi}} = 0{\cdot}007\,502\,4$ zu erwarten, daß 10 000 weitere Ziehungen dasselbe Resultat hervorbringen.

Zu der Formel 4) ist folgendes zu bemerken. Wären $\frac{m}{s}, \frac{n}{s}$ die bekannten Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen und Ausbleiben von e, so bestünde nach dem Theorem von Jakob Bernoulli die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi s \frac{m}{s} \frac{n}{s}}} = \sqrt{\frac{s}{2\pi m n}}$$

dafür, daß in $s = m + n$ Versuchen m-mal das Ereignis e eintreffen und n-mal ausbleiben werde. Diese Wahrscheinlichkeit ist $\sqrt{2}$-mal größer als die in Formel 4) unter anderen Voraussetzungen berechnete Wahrscheinlichkeit. Der Grund dieser Abweichung liegt darin, daß für den vorliegenden Fall $\frac{m}{s}, \frac{n}{s}$ nicht die sicheren, sondern nur die wahrscheinlichsten Werte der Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen und Ausbleiben von e sind.

3. Fall. Angenommen, es hätten alle s Versuche zu s-maligem Eintreffen des Ereignisses e geführt. Gefragt wird nach der aposteriorischen Wahrscheinlichkeit, daß bei weiteren s' Versuchen ebenfalls nur das Ereignis e, nicht aber das diesem entgegengesetzte Ereignis f eintrifft.

Zur Beantwortung der Frage setze man in 1) $m = s$, $m' = s'$, $n = n' = 0$. Dann wird die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\Pi = \frac{\int_0^1 x^{s+s'} dx}{\int_0^1 x^s dx} = \frac{\left\{\frac{x^{s+s'+1}}{s+s'+1}\right\}_0^1}{\left\{\frac{x^{s+1}}{s+1}\right\}_0^1} = \frac{s+1}{s+s'+1} = \frac{1}{1+\frac{s'}{s+1}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit $\Pi = \frac{s+1}{s+s'+1}$ ist also dieselbe, als wenn man in eine Urne, die s weiße Kugeln enthält, noch ein weiße und s' schwarze Kugeln legt und dann nach der Wahrscheinlichkeit frägt, aus der Urne eine weiße Kugel zu ziehen.

Der Wahrscheinlichkeitswert $\Pi = \frac{1}{1 + \frac{s'}{s+1}}$ ist nahezu gleich Eins, wenn s' sehr klein im Vergleich zu s ist; anderseits weicht Π beträchtlich von der Einheit ab, wenn das Verhältnis größere Werte erlangt.

Beispiel. Eine Urne enthält 8 Kugeln, weiße und schwarze; 4 davon sind nach und nach herausgenommen worden und es waren 3 weiß, 1 schwarz. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von 3 weiteren Kugeln, die man sukzessive zieht, 1 weiß und 2 schwarz sein werden?

Fünf Hypothesen sind mit der bekannten Anzahl der Kugeln und dem beobachteten Ereignisse vereinbar, nämlich:

U_1: 3 weiße Kugeln, 5 schwarze Kugeln,
U_2: 4 „ „ , 4 „ „ ,
U_3: 5 „ „ , 3 „ „ ,
U_4: 6 „ „ , 2 „ „ ,
U_5: 7 „ „ , 1 „ Kugel.

Die aus ihnen entspringenden Wahrscheinlichkeiten des beobachteten Erfolges sind:

$$p_1 = \frac{3.2.1}{8.7.6} \cdot \frac{5}{5} = \frac{5}{280}, \quad p_2 = \frac{4.3.2}{8.7.6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{280}, \quad p_3 = \frac{5.4.3}{8.7.6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{30}{280},$$
$$p_4 = \frac{6.5.4}{8.7.6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{40}{280}, \quad p_5 = \frac{7.6.5}{8.7.6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{35}{280};$$

jene des künftigen Ereignisses:

$$\mathfrak{p}_1 = 0, \quad \mathfrak{p}_2 = 3 \cdot \frac{1.3.2}{4.3.2} = \frac{3}{4}, \quad \mathfrak{p}_3 = 3 \cdot \frac{2.2.1}{4.3.2} = \frac{1}{2}, \quad \mathfrak{p}_4 = 0, \quad \mathfrak{p}_5 = 0.$$

Folglich reduziert sich die aposteriorische Wahrscheinlichkeit des künftigen Ereignisses auf

$$\Pi = P_2 \mathfrak{p}_2 + P_3 \mathfrak{p}_3.$$

Wenn man in Ermangelung weiteren Wissens die Ursachen als a priori gleichwahrscheinlich ansieht, so ist

$$P_2 = \frac{16}{5+16+30+40+35} = \frac{8}{63}, \quad P_3 = \frac{15}{63},$$

demnach

$$\Pi = \frac{8}{63} \cdot \frac{3}{4} + \frac{15}{63} \cdot \frac{1}{2} = \frac{12 + 15}{126} = \frac{27}{126} = \frac{3}{14}.$$

Nun nehme man an, dieselben Ziehungen würden aus einer Urne mit einer unbegrenzten Menge weißer und schwarzer Kugeln unbekannten Mischungsverhältnisses gemacht worden sein, und es handelte sich um die aposteriorische Wahrscheinlichkeit des nämlichen künftigen Ereignisses. Die unbekannte Wahrscheinlichkeit x für das Ziehen einer weißen Kugel kann dann jeden Wert zwischen 0 und 1 besitzen und bleibt während der Ziehungen konstant. Man hat nun Π nach der Formel 1) zu rechnen und findet

$$\Pi = \binom{3}{1} \frac{\int_0^1 x^4 (1 - x)^3 \, dx}{\int_0^1 x^3 (1 - x) \, dx} = 3 \cdot \frac{\frac{4!\,3!}{8!}}{\frac{3!\,1!}{5!}} = \frac{3}{14}.$$

Das Resultat ist dasselbe wie vorhin und diese Übereinstimmung gilt für beliebige Zahlen.

Bei der Bearbeitung der vorstehenden drei Abschnitte wurden in bedeutendem Umfange benützt: das bereits im 1. Bande mehrfach angeführte Werk „Die Wahrscheinlichkeitsrechnung" von Czuber, Leipzig 1903, sowie dessen im Studienjahre $190^6/_7$ an der Technischen Hochschule in Wien über Wahrscheinlichkeitsrechnung gehaltenen Vorträge; außerdem wurden zu Rate gezogen: „Die Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen", zweiter Teil des ersten Bandes, Leipzig 1900—1904; „Die Wahrscheinlichkeitsrechnung" von G. Hagen (dritte Auflage), Berlin 1882; endlich „Die Wahrscheinlichkeitsrechnung, ihre Anwendung auf das Schießen und auf die Theorie des Einschießens" von N. Sabudski, aus dem Russischen ins Deutsche übersetzt von Ritter von Eberhard, Stuttgart 1906.

IV. Abschnitt.

Interpolationsmethoden.

1. Definition einer Interpolationsformel. Verschiedene Arten derselben. Hauptsächlichste Anwendungen.

Es sei $u = \varphi(x)$ eine ihrer Form nach unbekannte Funktion von x oder es sei der analytische Ausdruck dieser Funktion als zu kompliziert für unbekannt angenommen und man kennt eine gewisse Anzahl Werte dieser unbekannten oder bekannten Funktion, nämlich:

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ldots,\ u_n,$$

welche den gleichfalls bekannten Werten von x

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_n$$

entsprechen, so daß $u_0 = \varphi(x_0)$, $u_1 = \varphi(x_1)$, u. s. w. $u_n = \varphi(x_n)$; es soll für irgend einen anderen, zwischen x_0 und x_n gelegenen Wert von x, z. B. x', der zugehörige Wert von u, er heiße u', gefunden werden.

Das Gesagte in die Sprache der Geometrie übertragen, gibt die Formulierung: Von einer Kurve ist eine gewisse Anzahl von Punkten bekannt; gesucht werden weitere Punkte der Kurve.

Offenbar kommt es hier darauf an, eine Funktion $f(x)$ zu finden, welche man zur Berechnung statt der unbekannten Funktion $\varphi(x)$ benützen kann. Diese Funktion $f(x)$ muß notwendig die Eigenschaft haben, daß sie für $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Werte $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ annimmt. Es ist dies aber zugleich die einzige Bedingung, welche zur Auffindung dieser Funktion zu Gebote steht. Hat man eine solche Funktion gefunden, so wird die Beziehung $u = f(x)$ das Gesetz der Abhängigkeit der unbekannten Funktion $\varphi(x)$ offenbar umso genauer darstellen, je größer die Anzahl der gegebenen zusammengehörigen Werte von x und u ist, je näher dieselben aneinanderliegen und je regelmäßiger sie aufeinander folgen.

Die Größe x, von welcher die Funktion u abhängt, pflegt man bei Interpolationsrechnungen das Argument zu nennen.

Das für den eben angegebenen Zweck ausgebildete Verfahren, vorhandene Zahlenreihen durch Einschalten neuer Werte mittels eines raschen Prozesses zu ergänzen, heißt Interpolieren. Dasselbe besteht also in der Regel in der Ersetzung der ursprünglichen Funktion durch eine bequemer zu berechnende neue Funktion, welche aus den bekannten numerischen Werten gebildet wird und welche sich diesen möglichst enge anschmiegt. Diese Funktion heißt Interpolationsformel. Es hängt von der Natur der ursprünglichen Funktion beziehungsweise von dem Verlaufe der vorliegenden Zahlenreihe ab, welche Form man der Interpolationsformel zu geben hat. Man kann eine ganze rationale Funktion nehmen (parabolische Interpolation) oder eine gebrochene rationale Funktion oder eine Exponentialfunktion oder eine periodische nach den *sin* und *cos* der Vielfachen des Argumentes fortschreitende Funktion u. s. w.

Die Interpolationsformel kann die wahre Funktion innerhalb ihres Geltungsbereiches auch betreffs aller damit vorzunehmenden Operationen ersetzen.

Es ist leicht einzusehen, daß in der vorstehenden Fassung die Aufgabe des Interpolierens eigentlich eine unbestimmte ist, d. h. es gibt unendlich viele Funktionen, welche die Eigenschaft haben, für $x = x_0, x_1, \ldots, x_n$ die Werte $u_0, u_1, \ldots, u_n$ anzunehmen. Durch eine einfache geometrische Betrachtung wird dies am anschaulichsten.

Denkt man sich die gegebenen Werte x als Abszissen, die zugehörigen Werte u als Ordinaten aufgetragen, so werden durch die zusammengehörigen Wertepaare

$$x_0, u_0; \quad x_1, u_1; \quad \ldots\ldots; \quad x_n, u_n$$

offenbar $n + 1$ Punkte in der Ebene bestimmt, welche einer Kurve angehören, deren unbekannte Gleichung $u = \varphi(x)$ ist. Verbindet man die eingetragenen Punkte durch eine Kurve, so erhält man eine Übersicht über den Zusammenhang der Größen x und u. Für einen zwischen x_0 und x_n gelegenen Wert x' kann der zugehörige Wert u' aus der Zeichnung entnommen werden (graphische Interpolation). Durch dieselben Punkte lassen sich aber unzählige, bestimmten Gesetzen unterworfene Kurven ziehen und jede derselben ist eine Auflösung der vorgelegten Aufgabe. Erst durch Hinzufügung anderer Nebenbedingungen, z. B. daß die Funktion $f(x)$ eine rationale ganze Funktion vom n-ten Grade sein soll, wird die Aufgabe eine bestimmte. In welcher Weise dies geschieht, wird sich weiterhin zeigen.

Die geometrische Darstellung gemessener Werte kann auch zur Kontrolle beziehungsweise zur Verbesserung von Beobachtungen dienen, denn Beobachtungsfehler machen sich in Unregelmäßigkeiten geltend. Trotz der Unregelmäßigkeiten kann man aber häufig den richtigen Verlauf erkennen und eine ausgleichende Kurve durchziehen (graphische Ausgleichung von Beobachtungen). Dieses Verfahren muß aber vorsichtig gehandhabt werden; es verleitet leicht zu Irrtümern, besonders an den Enden der Kurve.

Beim Gebrauche mathematischer Tabellen, wozu auch die zahlreichen Tabellen der Ballistik gerechnet werden müssen, spielt die Interpolation eine bedeutende Rolle; es handelt sich hier um die sogenannte Interpolation von Tabellen.

Bei der Diskussion physikalischer und astronomischer Erscheinungen, deren Gesetz noch unbekannt ist, finden die Interpolationsmethoden sowohl für die Untersuchung als auch für die Ausgleichung der beobachteten Daten eine ganz besondere Anwendung.

Dient die Interpolationsformel zur Darstellung einer Beobachtungsreihe, so müssen ihre Koeffizienten nach den Prinzipien einer Fehlertheorie, also beispielsweise nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden.

Die Interpolationsformeln dürfen in der Regel nicht über diejenigen Grenzen ausgedehnt werden, zwischen welchen die erhaltenen Resultate eingeschlossen liegen.

Aus dem Vorhergehenden geht klar hervor, daß dem Worte Interpolation teils im engeren, teils im weiteren Sinne eine Bedeutung zukommt. Im engeren Sinne bezeichnet es die ergänzende Einschaltung bei Tabellen, im weiteren dagegen die genäherte Darstellung von Gebilden und Vorgängen durch geeignete Formeln.

Zusammenfassung. Ist von einer Funktion, die an der in Betracht kommenden Stelle als stetig vorausgesetzt wird, der analytische Ausdruck entweder unbekannt oder wird derselbe, da er zu kompliziert ist, als nicht verwendbar angesehen, so ist es gleichwohl möglich, Näherungswerte derselben für beliebige Werte des Argumentes innerhalb gewisser Grenzen durch Interpolieren anzugeben, wenn für bestimmte Werte des Argumentes, sei es durch Beobachtung oder durch direkte Benützung des analytischen Ausdruckes die numerischen Beträge der Funktion vorliegen. Das Interpolieren kann entweder rechnerisch oder graphisch geschehen.

Die Fortsetzung von Zahlenreihen beziehungsweise von Kurven über die Grenzen der Beobachtung hinaus, das Extrapolieren, ist nur von sehr bedingtem Werte (beispielsweise nur in nächster Nähe

der Grenzen) und auch dies nur dann, wenn besondere Anhaltspunkte für das Verfahren vorliegen.

In der Ballistik findet das Interpolieren eine sehr häufige Anwendung und werden demnach die in diesem Abschnitte besprochenen Interpolationsmethoden eingehend behandelt.

Da hiezu die Kenntnis der Lehre über Differenz- und Summenreihen unumgänglich erforderlich ist, sei das Wichtigste hierüber vorangestellt.

Hieran anschließend wird das Interpolieren der Reihen und die Interpolation von Tabellen behandelt.

Sodann wird das Prinzip der Interpolationsmethode auf Grund der Methode der kleinsten Quadrate gegeben werden.

Die Ableitung der auf diesem Prinzipe beruhenden Interpolationsformeln bilden den Schluß dieses Abschnittes.

Dem Gesagten zufolge zerfällt dieser Abschnitt in vier Teile; diese behandeln der Reihe nach:

A. die Differenz- und Summenreihen;

B. die Interpolation der Reihen und die Interpolation der Tabellen;

C. das Prinzip der Interpolationsmethode auf Grund der Methode der kleinsten Quadrate; endlich

D. die Interpolationsformeln, abgeleitet auf Grund der Methode der kleinsten Quadrate.

A. Differenz- und Summenreihen.

2. Erklärungen über die Differenzreihen.

Es seien

$$1) \qquad u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ldots,\ u_n,\ u_{n+1},\ \ldots\ldots$$

Größen, die nach irgend einem bekannten oder unbekannten Gesetz aufeinander folgen. Wird jede Größe von der nächst folgenden subtrahiert, so erhält man eine Reihe von Differenzen

$$u_1 - u_0,\ u_2 - u_1,\ u_3 - u_2,\ \ldots\ldots,\ u_{n+1} - u_n,\ \ldots\ldots,$$

welche die Differenzreihe, und zwar zum Unterschiede von den folgenden Reihen die erste Differenzreihe der Hauptreihe 1) heißt. Diese Differenzen werden dadurch bezeichnet, daß man dem subtrahierten Gliede die Charakteristik Δ vorsetzt. Es ist demnach

$$u_1 - u_0 = \Delta u_0,\ u_2 - u_1 = \Delta u_1,\ u_3 - u_2 = \Delta u_2,\ \ldots\ldots,$$
$$u_{n+1} - u_n = \Delta u_n,\ \ldots\ldots$$

und somit

2) $\Delta u_0,\ \Delta u_1,\ \Delta u_2,\ \ldots\ldots,\ \Delta u_n,\ \ldots\ldots$

die erste Differenzreihe. Verfährt man mit dieser in gleicher Weise, indem nämlich jedes Glied von dem folgenden subtrahiert wird, so ergibt sich die neue Reihe

$$\Delta u_1 - \Delta u_0,\ \Delta u_2 - \Delta u_1,\ \Delta u_3 - \Delta u_2,\ \ldots\ldots,\ \Delta u_{n+1} - \Delta u_n,\ \ldots\ldots,$$

welche die erste Differenzreihe der Reihe 2) und zweite Differenzreihe der Hauptreihe 1) sein wird. Gemäß der oben eingeführten Bezeichnung ist: $\Delta u_1 - \Delta u_0 = \Delta \Delta u_0$ zu setzen, wofür kürzer $\Delta^2 u_0$, also $\Delta u_1 - \Delta u_0 = \Delta^2 u_0$ geschrieben wird. Man hat demnach

$$\Delta u_1 - \Delta u_0 = \Delta^2 u_0,\ \Delta u_2 - \Delta u_1 = \Delta^2 u_1,\ \ldots\ldots,$$
$$\Delta u_{n+1} - \Delta u_n = \Delta^2 u_n,\ \ldots\ldots$$

Dasselbe Verfahren auf die zweite Differenzreihe

3) $\Delta^2 u_0,\ \Delta^2 u_1,\ \Delta^2 u_2,\ \ldots\ldots,\ \Delta^2 u_n,\ \ldots\ldots$

angewendet, gibt die dritte Differenzreihe der Hauptreihe 1)

4) $\Delta^3 u_0,\ \Delta^3 u_1,\ \Delta^3 u_2,\ \ldots\ldots,\ \Delta^3 u_n,\ \ldots\ldots$:

hierin ist

$$\Delta^3 u_0 = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u_0,\ \Delta^3 u_1 = \Delta^2 u_2 - \Delta^2 u_1,\ \ldots\ldots,$$
$$\Delta^3 u_n = \Delta^2 u_{n+1} - \Delta^2 u_n,\ \ldots\ldots$$

Auf diese Weise kann man fortfahren und im allgemeinen eine beliebige Anzahl von Differenzreihen aus der Hauptreihe 1) ableiten. Der Gang der Rechnung erhellt am deutlichsten aus folgendem Schema:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
u_0, & & u_1, & & u_2, & & u_3, & & u_4, & & u_5, & & u_6, \ldots\ldots \\
& \Delta u_0, & & \Delta u_1, & & \Delta u_2, & & \Delta u_3, & & \Delta u_4, & & \Delta u_5, \ldots\ldots\ldots & \\
& & \Delta^2 u_0, & & \Delta^2 u_1, & & \Delta^2 u_2, & & \Delta^2 u_3, & & \Delta^2 u_4, \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
& & & \Delta^3 u_0, & & \Delta^3 u_1, & & \Delta^3 u_2, & & \Delta^3 u_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\
& & & & \Delta^4 u_0, & & \Delta^4 u_1, & & \Delta^4 u_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & &
\end{array}$$

u. s. w.

Irgend ein Glied wird gefunden, wenn man von den zwei darüberstehenden das vorhergehende von dem nachfolgenden abzieht. Allgemein ist

$$\Delta^r u_n = \Delta^{r-1} u_{n+1} - \Delta^{r-1} u_n, \quad \text{daraus} \quad \Delta^{r-1} u_{n+1} = \Delta^{r-1} u_n + \Delta^r u_n.$$

Zwischen den Größen $u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ldots$ der Hauptreihe und den Gliedern der aufeinander folgenden Differenzreihen bestehen gewisse allgemeine Beziehungen, welche von der Beschaffenheit der Größen $u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ldots$ ganz unabhängig sind und im nachstehenden abgeleitet werden sollen.

3. Jede Reihe ist die summatorische Reihe ihrer Differenzreihe.

Mit Hilfe der Beziehungen

$$\begin{array}{lll} \Delta u_0 = u_1 - u_0, & \Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0 & \text{u. s. w.,} \\ \Delta u_1 = u_2 - u_1, & \Delta^2 u_1 = \Delta u_2 - \Delta u_1 & \text{u. s. w.,} \\ \Delta u_2 = u_3 - u_2, & \Delta^2 u_2 = \Delta u_3 - \Delta u_2 & \text{u. s. w.,} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots \end{array}$$

findet man

$$\begin{array}{l} u_1 = u_0 + \Delta u_0, \\ u_2 = u_0 + \Delta u_0 + \Delta u_1, \\ u_3 = u_0 + \Delta u_0 + \Delta u_1 + \Delta u_2, \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

ferner

$$\begin{array}{l} \Delta u_1 = \Delta u_0 + \Delta^2 u_0, \\ \Delta u_2 = \Delta u_0 + \Delta^2 u_0 + \Delta^2 u_1, \\ \Delta u_3 = \Delta u_0 + \Delta^2 u_0 + \Delta^2 u_1 + \Delta^2 u_2, \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

d. h. man kann, sobald von einer Reihe nur ihr erstes Glied, nebst diesem aber sämtliche Glieder ihrer Differenzreihe bekannt sind, die ganze Reihe durch sukzessive Additionen wieder herstellen.

4. Ausdruck für das erste und $(k+1)$-te Glied der n-ten Differenzreihe.

Wenn die Reihe $u_0, u_1, u_2, \dots\dots, u_n, u_{n+1}, \dots\dots$ gegeben ist, so sind die Differenzen:

$$\begin{aligned} \Delta u_0 &= u_1 - u_0, \\ \Delta^2 u_0 &= \Delta u_1 - \Delta u_0 = u_2 - u_1 - (u_1 - u_0) = u_2 - 2 u_1 + u_0, \\ \Delta^3 u_0 &= \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u_0 = \Delta u_2 - \Delta u_1 - \Delta^2 u_0 = \\ &= u_3 - u_2 - (u_2 - u_1) - (u_2 - 2 u_1 + u_0) = \\ &= u_3 - 3 u_2 + 3 u_1 - u_0, \\ \Delta^4 u_0 &= \Delta^3 u_1 - \Delta^3 u_0 = u_4 - 4 u_3 + 6 u_2 - 4 u_1 + u_0 \quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

In den Koeffizienten der Ausdrücke für die Differenzen $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$, $\Delta^4 u_0$ u. s. w. spricht sich das Gesetz der Binomialkoeffizienten aus; man schließt daher, daß allgemein

$$1) \quad \begin{aligned} \Delta^n u_0 &= u_n - n\, u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} u_{n-2} - \dots\dots + (-1)^n u_0 = \\ &= u_n - \binom{n}{1} u_{n-1} + \binom{n}{2} u_{n-2} - \dots\dots + (-1)^n u_0. \end{aligned}$$

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Formel soll durch Induktion geführt werden, indem man zeigt, daß die Formel für den

Wert $n = p + 1$ richtig sein muß, wenn sie für den vorhergehenden Wert $n = p$ gilt.

Es ist $\Delta^{p+1} u_0 = \Delta^p u_1 - \Delta^p u_0$. Die Formel 1) nehme man für den Wert $n = p$ als richtig an und beachte ferner, daß $\Delta^p u_1$ aus den Größen $u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots, u_{p+1}$ auf dieselbe Art gebildet sein muß, wie $\Delta^p u_0$ aus $u_0, u_1, u_2, \ldots\ldots, u_p$; es ist also

$$\Delta^p u_1 = u_{p+1} - \binom{p}{1} u_p + \binom{p}{2} u_{p-1} - \binom{p}{3} u_{p-2} + \cdots\cdots + (-1)^p u_1,$$

$$\Delta^p u_0 = \qquad u_p - \binom{p}{1} u_{p-1} + \binom{p}{2} u_{p-2} - \cdots\cdots - (-1)^p p\, u_1 + \\ + (-1)^p \; u_0.$$

Führt man diese Werte in die Formel $\Delta^{p+1} u_0 = \Delta^p u_1 - \Delta^p u_0$ ein und beachtet, daß nach Punkt 7 *D)* des I. Abschnittes dieses Bandes $\binom{p}{k+1} + \binom{p}{k} = \binom{p+1}{k+1}$ ist, so resultiert:

$$\Delta^{p+1} u_0 = u_{p+1} - \binom{p+1}{1} u_p + \binom{p+1}{2} u_{p-1} - \binom{p+1}{3} u_{p-2} + \\ + \cdots\cdots + (-1)^{p+1} u_0.$$

Diese Beziehung ergibt sich aber auch aus 1) für $n = p + 1$, woraus folgt, daß die Formel 1) für $n = p + 1$ richtig ist, wenn sie es für $n = p$ ist. Für $n = 2$, 3 und 4 bewährt sich das in 1) ausgesprochene Gesetz, es muß also, weil es für $n = 4$ gilt, auch für $4 + 1 = 5$ gelten, und da dies der Fall ist, wieder für $5 + 1 = 6$ u. s. w., d. h. die durch Induktion gefundene Formel 1) gilt für jeden ganzen positiven Wert von n.

Wenn man symbolisch u_i durch u^i ersetzt, so erhält die Formel 1) die Gestalt

$$2) \qquad \Delta^n u_0 = (u - 1)^n.$$

Durch die Formel 1) wird das 1. Glied der n-ten Differenzreihe durch die $(n+1)$ ersten Glieder der Hauptreihe ausgedrückt. Ebenso läßt sich aber ein beliebiges Glied, z. B. das $(k+1)$-te Glied der n-ten Differenzreihe ausdrücken. Denkt man sich nämlich die Hauptreihe mit dem Gliede u_k anfangend, so muß offenbar $\Delta^n u_k$ aus $u_k, u_{k+1}, u_{k+2}, \ldots\ldots, u_{k+n}$ so gebildet sein wie $\Delta^n u_0$ aus $u_0, u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n$; man hat daher nach 1)

$$3) \qquad \Delta^n u_k = u_{k+n} - \binom{n}{1} u_{k+n-1} + \binom{n}{2} u_{k+n-2} - \cdots\cdots + (-1)^n u_k = \\ = u_k (u - 1)^n.$$

Nach der Entwicklung des Binoms sind wieder die Exponenten in Stellenzeiger zu verwandeln und die Rechnungsregel für Potenzen auf die mit Stellenzeigern versehenen Buchstaben zu übertragen.

5. Ausdruck für das ($n+1$)-te Glied der Hauptreihe.

Jedes Glied der Hauptreihe läßt sich durch das erste Glied derselben und durch die Anfangsglieder Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$, ... der aufeinander folgenden Differenzreihen ausdrücken.

Kennt man

$$u_0,\ \Delta u_0,\ \Delta^2 u_0,\ \ldots\ldots,\ \Delta^n u_0,\ \ldots\ldots,$$

so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_0 + \Delta u_0,\\
u_2 &= u_1 + \Delta u_1 = u_0 + \Delta u_0 + \Delta u_0 + \Delta^2 u_0 = u_0 + 2\,\Delta u_0 + \Delta^2 u_0,\\
u_3 &= v_2 + \Delta u_2 = u_0 + 2\,\Delta u_0 + \Delta^2 u_0 + \Delta u_1 + \Delta^2 u_1 =\\
&= u_0 + 2\,\Delta u_0 + \Delta^2 u_0 + \Delta u_0 + \Delta^2 u_0 + \Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0 =\\
&= u_0 + 3\,\Delta u_0 + 3\,\Delta^2 v_0 + \Delta^3 u_0,\\
u_4 &= u_3 + \Delta u_3 = u_0 + 4\,\Delta u_0 + 6\,\Delta^2 u_0 + 4\,\Delta^3 u_0 + \Delta^4 u_0.
\end{aligned}$$

Allgemein wird nach diesem für u_2, u_3 und u_4 sich aussprechendem Gesetze für das $(n+1)$-te Glied u_n der Hauptreihe stattfinden:

$$1)\qquad u_n = u_0 + \binom{n}{1}\Delta u_0 + \binom{n}{2}\Delta^2 u_0 + \binom{n}{3}\Delta^3 u_0 + \cdots\cdots + \Delta^n u_0.$$

Die allgemeine Gültigkeit dieser Formel für jeden ganzen positiven Wert von n kann wieder durch Induktion nachgewiesen werden.

Aus $u_{p+1} - u_p = \Delta u_p$ folgt $u_{p+1} = u_p + \Delta u_p$; läßt man nun die Formel 1) für den Wert $n = p$ gelten, so ist

$$\begin{aligned}
u_p &= u_0 + \binom{p}{1}\Delta u_0 + \binom{p}{2}\Delta^2 u_0 + \binom{p}{3}\Delta^3 u_0 + \cdots\cdots + \Delta^p u_0,\\
\Delta u_p &= \phantom{u_0 + {}} \Delta u_0 + \binom{p}{1}\Delta^2 u_0 + \binom{p}{2}\Delta^3 u_0 + \cdots\cdots + \Delta^{p+1} u_0;
\end{aligned}$$

durch Summierung erhält man:

$$u_{p+1} = u_0 + \binom{p+1}{1}\Delta u_0 + \binom{p+1}{2}\Delta^2 u_0 + \binom{p+1}{3}\Delta^3 u_0 + \cdots\cdots + \Delta^{p+1} u_0,$$

d. i. ein Resultat, welches auch aus 1) unmittelbar dadurch erhalten wird, daß man in demselben $p+1$ statt n schreibt. Da also diese aus den Werten von $n = 2,\ 3,\ 4$ durch Induktion erschlossene Formel 1), wie man jetzt deutlich sieht, auch für $4 + 1 = 5$, und daher wieder für $5 + 1 = 6$ u. s. w. gilt, so ist ihre allgemeine Gültigkeit für **jeden** ganzen positiven Wert von n erwiesen.

Die Gleichung 1) kann man symbolisch durch

2) $$u_n = (1 + \Delta)^n u_0$$

darstellen, wenn man nach der Entwicklung des Binoms die Exponenten von Δ als Wiederholungszeiger betrachtet, d. i. $(\Delta)^i$ durch Δ^i ersetzt.

Für das Glied u_{n-1}, welches das n-te Glied der Hauptreihe ist, hat man

3) $$u_{n-1} = u_0 + \binom{n-1}{1}\Delta u_0 + \binom{n-1}{2}\Delta^2 u_0 + \binom{n-1}{3}\Delta^3 u_0 + \cdots + \Delta^{n-1} u_0.$$

Für eine arithmetische Reihe erster Ordnung (die Glieder der 1. Differenzreihe sind gleich) ist

$$u_{n-1} = u_0 + (n-1)\Delta u_0;$$

für eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung (die Glieder der 2. Differenzreihe sind gleich) hat man

$$u_{n-1} = u_0 + (n-1)\Delta u_0 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\Delta^2 u_0.$$

6. Ausdruck für das summatorische Glied einer arithmetischen Reihe k-ter Ordnung.

Bildet man der Reihe nach die Summe von 1, 2, 3, ..., n, ... Gliedern der Hauptreihe $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ und setzt

$$\Sigma u_1 = u_0, \quad \Sigma u_2 = u_0 + u_1, \quad \Sigma u_3 = u_0 + u_1 + u_2, \quad \ldots\ldots,$$
$$\Sigma u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}, \quad \ldots\ldots,$$

so erhält man die neue Reihe $\Sigma u_1, \Sigma u_2, \Sigma u_3, \ldots, \Sigma u_{n-1}, \Sigma u_n, \ldots$, welche die Summenreihe, und zwar die erste Summenreihe der Hauptreihe heißt.

Wie man sieht, ist $\Sigma u_n = \Sigma u_{n-1} + u_{n-1}$, somit $u_{n-1} = \Sigma u_n - \Sigma u_{n-1}$, woraus erhellt, daß die Hauptreihe die erste Differenzreihe der ersten Summenreihe ist, vorausgesetzt, daß man letzterer ein Glied gleich Null vorausschickt; denn $u_{n-1} = \Sigma u_n - \Sigma u_{n-1}$ geht für $n = 1$ über in $u_0 = \Sigma u_1 - \Sigma u_0$, woraus wegen $\Sigma u_1 = u_0$ folgt $\Sigma u_0 = 0$.

In gleicher Weise kann man aus der ersten Summenreihe durch sukzessives Summieren der Glieder eine zweite Summenreihe, aus dieser eine dritte u. s. w. ableiten. Man überzeugt sich leicht, daß die Hauptreihe die r-te Differenzreihe der r-ten Summenreihe ist, wenn man letztere mit r Gliedern, jedes gleich Null, beginnen läßt.

Man hat also das leicht verständliche Schema

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\multicolumn{13}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\\
0, & & 0, & & 0, & & \Sigma^3 u_3, & & \Sigma^3 u_4, & \dots\dots & & & \\
& 0, & & 0, & & \Sigma^2 u_2, & & \Sigma^2 u_3, & & \Sigma^2 u_4, & \dots\dots & & \\
& & 0, & & \Sigma u_1, & & \Sigma u_2, & & \Sigma u_3, & & \Sigma u_4, & \dots\dots & \\
& & & u_0, & & u_1, & & u_2, & & u_3, & \dots\dots & & \\
& & & & \varDelta u_0, & & \varDelta u_1, & & \varDelta u_2, & \dots\dots & & & \\
& & & & & \varDelta^2 u_0, & & \varDelta^2 u_1, & \dots\dots & & & & \\
& & & & & & \varDelta^3 u_0, & \dots\dots & & & & & \\
& & & & & & & \dots\dots & & & & &
\end{array}$$

Mit Hilfe der Formel 1) im Punkte 5 dieses Abschnittes kann ein beliebiges Glied der ersten Summenreihe der Hauptreihe, d. i. die Summe einer beliebigen Anzahl von Gliedern der Hauptreihe durch das erste Glied der letzteren und die Anfangsglieder der aufeinander folgenden Differenzreihen ausgedrückt werden. Um nämlich das n-te Glied Σu_n der ersten Summenreihe zu finden, betrachte man die erste Summenreihe als Hauptreihe, deren erste Differenzreihe die Reihe $u_0, u_1, u_2, \dots\dots$ ist; zu diesem Zwecke wird der ersten Summenreihe ein Glied gleich Null vorgesetzt, wodurch das gesuchte Glied Σu_n eigentlich das $(n+1)$-te dieser Reihe wird. Wendet man auf diese neue Hauptreihe die Formel 1) des Punktes 5 dieses Abschnittes an, so hat man zu berücksichtigen, daß das erste Glied der neuen Hauptreihe Null ist, somit die genannte Formel auf der rechten Seite erst mit dem zweiten Gliede beginnt. Es gilt somit für die Summenformel oder für das summatorische Glied der Reihe $u_0, u_1, u_2, \dots\dots$ die Gleichung

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots\dots + u_{n-1} = \sum_0^{n-1} u_i = \Sigma u_n =$$
$$= \binom{n}{1} u_0 + \binom{n}{2} \varDelta u_0 + \binom{n}{3} \varDelta^2 u_0 + \binom{n}{4} \varDelta^3 u_0 + \dots\dots +$$
$$+ \binom{n}{k+1} \varDelta^k u_0 + \dots\dots + \varDelta^{n-1} u_0.$$

Wenn die Hauptreihe $u_0, u_1, u_2, \dots\dots$ eine arithmetische Reihe k-ter Ordnung ist, so sind die Glieder der k-ten Differenzreihe einander gleich und daher verschwinden alle folgenden Differenzreihen.

Für eine arithmetische Reihe 1. Ordnung hat man sonach

$$\Sigma u_n = n u_0 + \frac{n(n-1)}{2} \varDelta u_0 =$$
$$= \{2 u_0 + (n-1) \varDelta u_0\} \frac{n}{2} = (u_0 + u_{n-1}) \frac{n}{2};$$

für eine arithmetische Reihe 2. Ordnung ist

$$\Sigma u_n = n u_0 + \frac{n(n-1)}{2} \Delta u_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \Delta^2 u_0;$$

u. s. w.

Beispiel. Von welcher Ordnung ist die arithmetische Reihe

5, 23, 59, 119, 209, 335, ...

Welchen Wert hat das siebente und das n-te Glied? Wie groß ist die Summe der ersten n und der ersten 7 Glieder?

Man hat

5,	23,	59,	119,	209,	335,	<u>503</u>
18,	36,	60,	90,	126,	<u>168</u>	
18,	24,	30,	36,	<u>42</u>		
6,	6,	6,	<u>6</u>			

Die Reihe ist von der dritten Ordnung; die unterstrichenen Glieder können im Schema leicht erhalten werden, so daß man als siebentes Glied 503 erhält; ferner ist $u_0 = 5$, $\Delta u_0 = 18$, $\Delta^2 u_0 = 18$, $\Delta^3 u_0 = \Delta^3 u_1 = \Delta^3 u_2 = \cdots = 6$.

Für das n-te Glied hat man

$$u_{n-1} = u_0 + \binom{n-1}{1} \Delta u_0 + \binom{n-1}{2} \Delta^2 u_0 + \binom{n-1}{3} \Delta^3 u_0 =$$
$$= 5 + \binom{n-1}{1} 18 + \binom{n-1}{2} 18 + \binom{n-1}{3} 6 =$$
$$= n(n+1)(n+2) - 1;$$

hieraus ergibt sich wieder für das siebente Glied $u_6 = 7.8.9 - 1 = 503$.
Die Summe der ersten n Glieder ist gegeben durch

$$\Sigma u_n = \binom{n}{1} u_0 + \binom{n}{2} \Delta u_0 + \binom{n}{3} \Delta^2 u_0 + \binom{n}{4} \Delta^3 u_0 =$$
$$= \binom{n}{1} 5 + \binom{n}{2} 18 + \binom{n}{3} 18 + \binom{n}{4} 6 =$$
$$= \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3) - n;$$

die Summe der ersten sieben Glieder beträgt

$$\Delta u_7 = \frac{1}{4} \cdot 7 . 8 . 9 . 10 - 7 = 1253.$$

7. Allgemeiner Ausdruck für u_{n-1} und Σu_n bei einer arithmetischen Reihe k-ter Ordnung.

Wenn die Hauptreihe u_0, u_1, u_2, ... eine arithmetische Reihe k-ter Ordnung darstellt, so ist, wie bereits gesagt wurde, $\Delta^k u_0$ das

konstante Glied der k-ten Differenzreihe und $\Delta^{k+1} u_0 = \Delta^{k+2} u_0 = = \cdots\cdots = 0$.

Für das n-te Glied u_{n-1}, das allgemeine Glied, der Reihe hat man

$$1) \quad u_{n-1} = u_0 + \binom{n-1}{1} \Delta u_0 + \binom{n-1}{2} \Delta^2 u_0 + \binom{n-1}{3} \Delta^3 u_0 + + \cdots\cdots + \binom{n-1}{k} \Delta^k u_0;$$

das summatorische Glied der gegebenen Reihe ist

$$2) \quad \Sigma u_n = \binom{n}{1} u_0 + \binom{n}{2} \Delta u_0 + \binom{n}{3} \Delta^2 u_0 + \binom{n}{4} \Delta^3 u_0 + \cdots\cdots + + \binom{n}{k+1} \Delta^k u_0.$$

Sowohl der Ausdruck für u_{n-1} als auch der für Σu_n besteht, wie man sieht, aus $k+1$ Gliedern und nimmt zu seiner Bildung $k+1$ Glieder der Reihe $u_0, u_1, u_2, \ldots\ldots$ in Anspruch. Von einer arithmetischen Reihe 1., 2., 3. u. s. w. Ordnung werden demnach 2, 3, 4 u. s. w. Anfangsglieder erfordert, um die Ausdrücke des allgemeinen und summatorischen Gliedes bilden zu können.

Entwickelt man in den beiden Formeln 1) und 2) die Binomialkoeffizienten und ordnet nach Potenzen von n, so folgt

$$3) \quad u_{n-1} = \alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 n^2 + \cdots\cdots + \alpha_k n^k,$$

$$4) \quad \Sigma u_n = \beta_1 n + \beta_2 n^2 + \cdots\cdots + \beta_k n^k + \beta_{k+1} n^{k+1},$$

worin $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k, \beta_{k+1}$ bloß von den Größen $u_0, \Delta u_0, \Delta^2 u_0, \ldots, \Delta^k u_0$ abhängen. Hieraus folgt, daß jede ganze rationale Funktion von n von der Form $\alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 n^2 + \cdots + \alpha_k n^k$ als das allgemeine Glied und jede ganze rationale Funktion von der Form $\beta_1 n + \beta_2 n^2 + \cdots\cdots + \beta_{k+1} n^{k+1}$ als das summatorische Glied einer arithmetischen Reihe k-ter Ordnung betrachtet werden kann. Man erkennt, daß das letzte Glied $\alpha_k n^k$ in 3) nur aus dem letzten Glied in 1) hervorgehen kann, da nur dieses Glied k Faktoren enthält, deren jeder in Bezug auf n vom ersten Grad ist. Es muß also

$$\alpha_k n^k = \frac{n^k}{k!} \Delta^k u_0$$

sein, woraus

$$5) \quad \Delta^k u_0 = k!\, \alpha_k$$

folgt. Diese Formel gibt die konstante Differenz (mitunter auch **Schlußdifferenz** genannt) einer arithmetischen Reihe, deren allgemeines Glied als Funktion von n in der Form 3) gegeben ist.

Hat man beispielsweise $u_{n-1} = 8 - 11n + 4n^2$, so ist $\Delta^2 u_0 = 2!4 = 8$ und in der Tat liefert der Ausdruck für u_{n-1}, wenn man in demselben der Reihe nach 1, 2, 3, ... statt n setzt, die arithmetische Reihe zweiter Ordnung 1, 2, 11, 28, 53, 86, ..., deren zweite Differenzreihe konstant und gleich 8 ist.

Die konstante Differenz $\Delta^k u_0$ ist, wie nachgewiesen wurde, nur abhängig vom Koeffizienten der höchsten Potenz, welche in dem allgemeinen Glied u_{n-1} enthalten ist. Alle arithmetische Reihen derselben Ordnung, für welche dieser Koeffizient derselbe ist, haben deshalb auch die gleiche Schlußdifferenz.

Die k-ten Potenzen der natürlichen Zahlen bilden eine arithmetische Reihe k-ter Ordnung mit der Schlußdifferenz $k!$; also die Quadratzahlen eine arithmetische Reihe der zweiten Ordnung mit der Schlußdifferenz $2!$ u. s. w.

1. Beispiel. Das allgemeine Glied der arithmetischen Reihe 1, 3, 11, 31, 69, 131, 223, ... zu bestimmen.

Man hat

$$\left.\begin{array}{l} 1,\ 3,\ 11,\ 31,\ 69,\ 131,\ 223,\ \ldots \\ \quad 2,\ 8,\ 20,\ 38,\ 62,\ 92,\ \ldots \\ \quad\quad 6,\ 12,\ 18,\ 24,\ 30,\ \ldots \\ \quad\quad\quad 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ \ldots \end{array}\right\}$$

Die Reihe ist von der dritten Ordnung, daher hat das allgemeine Glied die Form: $u_{n-1} = \alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 n^2 + \alpha_3 n^3$.

Zur Bestimmung desselben sind $k + 1 = 4$ Glieder erforderlich; der Einfachheit halber werden hiezu die ersten vier Glieder 1, 3, 11 und 31 gewählt.

Um die Koeffizienten α_0, α_1, α_2, α_3 zu finden, hat man in 3), nämlich im Ausdrucke für u_{n-1}, sukzessive einzusetzen $n = 1, 2, 3, 4$, wodurch u_{n-1} die Werte 1, 3, 11, 31 annehmen muß. Zur Bestimmung dieser vier Koeffizienten α_0, α_1, α_2, α_3 hat man also die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 1 = u_0, \\ \alpha_0 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 8\alpha_3 &= 3 = u_1, \\ \alpha_0 + 3\alpha_1 + 9\alpha_2 + 27\alpha_3 &= 11 = u_2, \\ \alpha_0 + 4\alpha_1 + 16\alpha_2 + 64\alpha_3 &= 31 = u_3; \end{aligned}$$

hieraus folgt $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = -3$, $\alpha_3 = 1$. Das allgemeine Glied der gegebenen arithmetischen Reihe lautet daher:

$$u_{n-1} = n^3 - 3n^2 + 4n - 1.$$

Zu demselben Ausdrucke für u_{n-1} gelangt man mit Hilfe der Formel 1); hienach ist

$$u_{n-1} = 1 + \binom{n-1}{1} 2 + \binom{n-1}{2} 6 + \binom{n-1}{3} 6 = n^3 - 3n^2 + 4n - 1.$$

2. Beispiel. Für die Quadrate der natürlichen Zahlen hat man

$$\left.\begin{array}{l} 0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots \\ \ \ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots\ldots \\ \ \ \ \ 2,\ 2,\ 2,\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{daher ist } u_0 = 0,\ \Delta u_0 = 1,\ \Delta^2 u_0 = 2 \text{ und} \\ \Sigma u_n = \binom{n}{2} + \binom{n}{3} 2 = \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}. \end{array}$$

Für die Kuben der natürlichen Zahlen ist

$$\left.\begin{array}{l} 0,\ 1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ldots \\ \ \ 1,\ 7,\ 19,\ 37,\ 61,\ \ldots\ldots \\ \ \ \ \ 6,\ 12,\ 18,\ 24,\ \ldots\ldots\ldots \\ \ \ \ \ \ \ 6,\ 6,\ 6,\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{daher } u_0 = 0,\ \Delta u_0 = 1,\ \Delta^2 u_0 = 6, \\ \quad \Delta^3 u_0 = 6 \text{ und} \\ \Sigma u_n = \binom{n}{2} + \binom{n}{3} 6 + \binom{n}{4} 6 = \dfrac{n^2(n-1)^2}{4}. \end{array}$$

8. Bestimmung der Summe $\sum\limits_{1}^{n} x^m = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m$, wobei m eine positive ganze Zahl ist.

Obschon man jede vorkommende Reihe dieser Art nach Punkt 7 dieses Abschnittes summieren kann, so soll doch die Summenformel für diese arithmetische Reihe, welche zufolge desselben Punktes von der m-ten Ordnung ist, entwickelt werden.

Man setze

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{1}^{n} x^m = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots\cdots + n^m = \\ \qquad = \beta_{m+1} n^{m+1} + \beta_m n^m + \beta_{m-1} n^{m-1} + \cdots\cdots + \beta_1 n. \end{array} \right.$$

Aus dieser Gleichung erhält man auch, wenn $n+1$ statt n geschrieben wird:

$$\sum_{1}^{n+1} x^m = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots\cdots + n^m + (n+1)^m =$$
$$= \beta_{m+1}(n+1)^{m+1} + \beta_m (n+1)^m + \beta_{m-1}(n+1)^{m-1} + \cdots + \beta_1 (n+1);$$

von dieser Gleichung die vorige abgezogen, gibt:

$$(n+1)^m = \beta_{m+1}\left\{(n+1)^{m+1} - n^{m+1}\right\} + \beta_m \left\{(n+1)^m - n^m\right\} +$$
$$+ \beta_{m-1}\left\{(n+1)^{m-1} - n^{m-1}\right\} + \cdots\cdots + \beta_1 \left\{(n+1) - n\right\},$$

oder wenn man entwickelt, dann beide Seiten der Gleichung nach n ordnet, so folgt:

$$n^m + \binom{m}{1} n^{m-1} + \binom{m}{2} n^{m-2} + \binom{m}{3} n^{m-3} + \cdots\cdots + 1 =$$
$$= \beta_{m+1}\binom{m+1}{1} n^m + \left\{\beta_{m+1}\binom{m+1}{2} + \beta_m\binom{m}{1}\right\} n^{m-1} +$$
$$+ \left\{\beta_{m+1}\binom{m+1}{3} + \beta_m\binom{m}{2} + \beta_{m-1}\binom{m-1}{1}\right\} n^{m-2} +$$
$$+ \left\{\beta_{m+1}\binom{m+1}{4} + \beta_m\binom{m}{3} + \beta_{m-1}\binom{m-1}{2} + \beta_{m-2}\binom{m-2}{1}\right\} n^{m-3} +$$
$$+ \cdots\cdots + (\beta_{m+1} + \beta_m + \beta_{m-1} + \cdots\cdots \beta_1).$$

Da nun die Koeffizienten $\beta_{m+1}, \beta_m, \ldots, \beta_1$ von n unabhängig sind, so hat man nach dem Satze der unbestimmten Koeffizienten (durch Gleichsetzung der Koeffizienten der die nämliche Potenz von n enthaltenen Glieder)

$$\beta_{m+1}(m+1) = 1, \quad \text{also} \quad \beta_{m+1} = \frac{1}{m+1};$$
$$\beta_{m+1}\frac{(m+1)\,m}{2} + \beta_m m = m;$$

aus der letzten Beziehung folgt, wenn der für β_{m+1} bereits gefundene Wert substituiert wird, $\beta_m = \frac{1}{2}$.

$$\beta_{m+1}\frac{(m+1)\,m\,(m-1)}{2\,.\,3} + \beta_m\frac{m\,(m-1)}{2} + \beta_{m-1}(m-1) = \frac{m\,(m-1)}{2},$$

daraus
$$\beta_{m-1} = \frac{m}{12}.$$

Ebenso ist, wenn man gleich substituiert:

$$\beta_{m-2}(m-2) = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{2\,.\,3} - \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{2\,.\,3\,.\,4} -$$
$$- \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{3\,.\,4} - \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{24};$$

und daraus $\beta_{m-2} = 0$.

Setzt man die obige Entwicklung weiter fort, so findet man auf dieselbe Weise

$$\beta_{m-3} = -\frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{120\,.\,2\,.\,3}, \quad \beta_{m-4} = 0;$$
$$\beta_{m-5} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,(m-4)}{252\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} \quad \text{u. s. f.}$$

Die letzte aus der Vergleichung der Koeffizienten von n entspringende Gleichung

$$\beta_{m+1} + \beta_m + \beta_{m-1} + \cdots\cdots + \beta_1 = 1$$

kann zur Verifikation der gefundenen Werte von $\beta_{m+1}, \beta_m, \ldots, \beta_1$ dienen.

Diese für die Koeffizienten gefundenen Werte in die Gleichung 1) eingesetzt geben endlich

$$2)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_1^n x^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{1}{2} n^m + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \binom{m}{1} n^{m-1} - \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{4} \binom{m}{3} n^{m-3} + \\ + \frac{1}{42} \cdot \frac{1}{6} \binom{m}{5} n^{m-5} - \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{8} \binom{m}{7} n^{m-7} + \\ + \frac{5}{66} \cdot \frac{1}{10} \binom{m}{9} n^{m-9} - \cdots\cdots, \end{aligned} \right.$$

dabei darf für spezielle Werte von m die Reihe nur so weit fortgesetzt werden, daß n nur Exponenten gleich oder größer als 1 erhält.

Die in dieser Entwicklung vorkommenden Zahlen $\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{30}, \frac{5}{66}$ u. s. w. heißen **Bernoullische Zahlen**, weil sie von Jakob Bernoulli zuerst angegeben worden sind. Bezeichnet man dieselben der Reihe nach mit B_1, B_3, B_5, B_7, B_9 u. s. w., so hat man

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_3 = \frac{1}{30},\ B_5 = \frac{1}{42},\ B_7 = \frac{1}{30},\ B_9 = \frac{5}{66},\ B_{11} = \frac{691}{2730},\ B_{13} = \frac{7}{6} \text{ u. s. w.}$$

Hienach kann 2) auch wie folgt geschrieben werden

$$3)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_1^n x^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{1}{2} n^m + B_1 \binom{m}{1} \frac{n^{m-1}}{2} - \\ - B_3 \binom{m}{3} \frac{n^{m-3}}{4} + B_5 \binom{m}{5} \frac{n^{m-5}}{6} - \\ - B_7 \binom{m}{7} \frac{n^{m-7}}{8} + B_9 \binom{m}{9} \frac{n^{m-9}}{10} - \cdots\cdots \end{aligned} \right.$$

Setzt man beispielsweise in der gefundenen Formel 2) sukzessive $m = 1, 2, 3, 4$, so ergeben sich die summatorischen Glieder der ersten vier aufeinander folgenden Potenzreihen, deren allgemeine Glieder n, n^2, n^3, n^4 sind. Man findet

$$\sum_1^n x = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_1^n x^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_1^n x^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad \sum_1^n x^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}.$$

Gesetz, welchem die Bernoullischen Zahlen unterworfen sind. Um das Gesetz zu finden, welchem die Bernoullischen Zahlen

unterworfen sind, kann man von der Formel 3) ausgehen. Setzt man in dieser $n = 1$, so wird $\sum_1^n x^m = 1$ und es folgt

$$4)\quad 1 = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{2} + \frac{\binom{m}{1}}{2} B_1 - \frac{\binom{m}{3}}{4} B_3 + \frac{\binom{m}{5}}{6} B_5 - \frac{\binom{m}{7}}{8} B_7 + \cdots\cdots;$$

hienach ist das Bildungsgesetz für die Bernoullischen Zahlen hinreichend klar.

Wird hierin m nacheinander gleich 2, 4, 6, 8, ... gesetzt, so kann man aus der letzten Gleichung die Werte der Bernoullischen Zahlen sukzessiv bestimmen. Es ist z. B. $B_{13} = \frac{7}{6}$, $B_{15} = \frac{3617}{510}$, $B_{17} = \frac{43867}{798}$, $B_{19} = \frac{174611}{330}$ u. s. w.

Die Bernoullischen Zahlen sind von großer Bedeutung für die höhere Algebra.

B. Interpolation der Reihen und Interpolation der Tabellen.

9. Interpolation (Einschalten) der arithmetischen Reihen.

Eine arithmetische Reihe interpolieren heißt zwischen je zwei Glieder derselben eine gegebene Anzahl von Gliedern dergestalt einschalten, daß die dadurch entstehende neue Reihe mit der ursprünglichen Reihe von einerlei Ordnung ist.

Bevor zur Lösung dieses Problems geschritten wird, sei bemerkt, daß die aufeinander folgenden, zwischen u_n und u_{n+1} einzuschaltenden $m - 1$ Glieder die Bezeichnung

$$u_{n+\frac{1}{m}},\quad u_{n+\frac{2}{m}},\quad u_{n+\frac{3}{m}},\quad \ldots\ldots,\quad u_{n+\frac{m-1}{m}}$$

erhalten müssen, wenn von einer beliebigen Stelle angefangen, die Glieder der gegebenen Reihe durch u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, ..., u_{n+r}, ... bezeichnet werden. Das nächstfolgende Glied, welches von u_n an gezählt das zweite Glied der Hauptreihe ist, erhält dann in der Tat die Bezeichnung $u_{n+\frac{m}{m}} = u_{n+1}$, wie es sein soll.

Man hat nach Punkt 5 dieses Abschnittes

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_n,$$
$$u_{n+2} = u_{n+1} + \Delta u_{n+1} = u_n + \Delta u_n + \Delta u_n + \Delta^2 u_n = u_n + 2\,\Delta u_n + \Delta^2 u_n,$$
$$u_{n+3} = u_{n+2} + \Delta u_{n+2} = u_n + 2\,\Delta u_n + \Delta^2 u_n + \Delta u_{n+1} + \Delta^2 u_{n+1} =$$
$$= u_n + 2\,\Delta u_n + \Delta^2 u_n + \Delta u_n + \Delta^2 u_n + \Delta^2 u_n + \Delta^3 u_n =$$
$$= u_n + 3\,\Delta u_n + 3\,\Delta^2 u_n + \Delta^3 u_n \text{ u. s. w.; allgemein}$$

$$1)\quad u_{n+m} = u_n + \binom{m}{1} \Delta u_n + \binom{m}{2} \Delta^2 u_n + \binom{m}{3} \Delta^3 u_n + \cdots\cdots + \Delta^m u_n.$$

Diese Formel hat für jede arithmetische Reihe eine endliche Gliederzahl, weil z. B. für eine solche Reihe k-ter Ordnung die Faktoren $\Delta^{k+1} u_n$, $\Delta^{k+2} u_n$ u. s. w. gleich Null sind. Die genannte Formel gilt nicht bloß für ganze positive, sondern auch für gebrochene Werte von m.

Die Gültigkeit der Formel 1) für ganze positive Werte von m folgt aus der Entwicklung des Punktes 5 dieses Abschnittes; die Gültigkeit für gebrochene Werte von m kann für arithmetische Reihen auf folgende Art erwiesen werden.

Es sei u_n, u_{n+m}, u_{n+2m} u. s. w. die ursprüngliche Reihe, die, um einen konkreten Fall zu betrachten, von zweiter Ordnung sein soll. u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, ..., u_{n+m-1}, u_{n+m} u. s. w. sei die durch Einschaltung von $m-1$ Gliedern zwischen je zwei Glieder der gegebenen Reihe entstehende interpolierte Reihe. Wird zur Bezeichnung der Differenzen der ursprünglichen Reihe das Zeichen Δ und zur Bezeichnung der Differenzen der interpolierten Reihe das Zeichen Δ_0 angewendet, so ist nach Punkt 2 und 4 dieses Abschnittes

2) $$\Delta u_n = u_{n+m} - u_n, \quad \Delta^2 u_n = u_{n+2m} - 2 u_{n+m} + u_n;$$

für die interpolierte Reihe, welche nun auch von der zweiten Ordnung sein muß, folgt nach der Formel 1), weil m eine ganze Zahl ist, $u_{n+m} = u_n + m \Delta_0 u_n + \frac{m(m-1)}{1.2} \Delta_0^2 u_n$ und daraus mit Berücksichtigung der Formel 2):

3) $$u_{n+m} - u_n = \Delta u_n = m \Delta_0 u_n + \frac{m(m-1)}{2} \Delta_0^2 u_n.$$

Es ist ferner

$$\begin{aligned} u_{n+2m} &= u_n + 2m \Delta_0 u_n \quad + m(2m-1) \Delta_0^2 u_n, \\ -2 u_{n+m} &= -2 u_n - 2m \Delta u_0 u_n - m(m-1) \Delta_0^2 u_n \quad \text{und} \\ u_n &= u_n, \text{ daher folgt durch Addition} \end{aligned}$$

$$u_{n+2m} - 2 u_{n+m} + u_n = \Delta^2 u_n = m^2 \Delta_0^2 u_n, \text{ daraus } \Delta_0^2 u_n = \frac{1}{m^2} \Delta^2 u_n.$$

Dieser Wert für $\Delta_0^2 u_n$, in 3) substituiert, gibt, wenn man $\Delta_0 u_n$ daraus bestimmt,

$$\Delta_0 u_n = \frac{1}{m} \Delta u_n - \frac{m-1}{2m^2} \Delta^2 u_n.$$

Wird endlich dieser Wert für $\Delta_0 u_n$ in die Gleichung $u_{n+1} = u_n + \Delta_0 u_n$ eingeführt, so erhält man

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{m} \Delta u_n - \frac{m-1}{2m^2} \Delta^2 u_n,$$

genau dasselbe Resultat, welches unmittelbar aus der Formel 1) folgt, wenn man in dieser $\frac{1}{m}$ statt m setzt. Es muß aber auch in der Tat, wenn in der gegebenen Reihe u_n das erste, u_{n+m} das zweite Glied u. s. w. bildet, das Glied u_{n+1} mit $u_{n+\frac{1}{m}}$ bezeichnet werden, weil es das $(1+\frac{1}{m})$-te Glied dieser Reihe ist.

Auf dieselbe Art kann man den Beweis für jedes andere eingeschaltete Glied und für jede Ordnung der Reihe führen.

Ist irgend eine arithmetische Reihe k-ter Ordnung u_0, u_1, u_2, u_3, ..., deren Indizes um je 1 fortschreiten, gegeben, so ist deren allgemeines Glied

$$4)\quad \begin{cases} u_x = u_0 + x\,.\,\varDelta u_0 + \dfrac{x(x-1)}{1\,.\,2}\varDelta^2 u_0 + \dfrac{x(x-1)(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\varDelta^3 u_0 + \cdots + \\ \qquad + \dfrac{x(x-1)\ldots\ldots(x-k+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots k}\varDelta^k u_0, \end{cases}$$

wobei der Ausdruck auf der rechten Seite bis zu der konstanten Differenz $\varDelta^k u_0$ fortgesetzt werden muß; er besteht alsdann aus $k+1$ Gliedern. Soll die Reihe so interpoliert werden, daß die Indizes der neu entstehenden Reihe um je $\frac{1}{m}$ fortschreiten, d. h. sollen zwischen den Gliedern der gegebenen Reihe $m-1$ weitere Glieder eingeschaltet werden, so hat man dem Vorstehenden zufolge an Stelle von x nacheinander die Werte 0, $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$, $\frac{3}{m}$, ..., $\frac{m-1}{m}$, 1, $1+\frac{1}{m}=\frac{m+1}{m}$, $\frac{m+2}{m}$, ... zu setzen.

Für die sukzessiven Glieder der gesuchten Reihe ergeben sich dann die folgenden allgemeinen Ausdrücke:

$$u_0 = u_0,$$
$$u_{\frac{1}{m}} = u_0 + \frac{1}{m}\varDelta u_0 - \frac{(m-1)}{m\,.\,2\,m}\varDelta^2 u_0 + \frac{(m-1)(2\,m-1)}{m\,.\,2\,m\,.\,3\,m}\varDelta^3 u_0 + \cdots\cdots,$$
$$u_{\frac{2}{m}} = u_0 + \frac{2}{m}\varDelta u_0 - \frac{2\,(m-2)}{m\,.\,2\,m}\varDelta^2 u_0 + \frac{2(m-2)(2m-2)}{m\,.\,2\,m\,.\,3\,m}\varDelta^3 u_0 + \cdots\cdots,$$
$$u_{\frac{3}{m}} = u_0 + \frac{3}{m}\varDelta u_0 - \frac{3\,(m-3)}{m\,.\,2\,m}\varDelta^2 u_0 + \frac{3(m-3)(2m-3)}{m\,.\,2\,m\,.\,3\,m}\varDelta^3 u_0 + \cdots\cdots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Hieraus folgen weiter für die sukzessiven Glieder der ersten Differenzreihe, indem man für diese zur Unterscheidung wieder $\varDelta_0$ statt $\varDelta$ setzt, die folgenden Ausdrücke:

$$\varDelta_0 u_0 = \frac{1}{m}\varDelta u_0 - \frac{m-1}{2\,m^2}\varDelta^2 u_0 + \frac{2\,m^2 - 3\,m + 1}{6\,m^3}\varDelta^3 u_0 - \cdots\cdots,$$

$$\Delta_0 u_{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}\Delta u_0 - \frac{m-3}{2m^2}\Delta^2 u_0 + \frac{2m^2-9m+7}{6m^3}\Delta^3 u_0 - \ldots\ldots,$$

$$\Delta_0 u_{\frac{2}{m}} = \frac{1}{m}\Delta u_0 - \frac{m-5}{2m^2}\Delta^2 u_0 + \frac{2m^2-15m+19}{6m^3}\Delta^3 u_0 - \ldots\ldots,$$

. . . .

Hieraus erhält man für die Glieder der zweiten Differenzreihe:

$$\Delta_0^2 u_0 = \frac{1}{m^2}\Delta^2 u_0 - \frac{m-1}{m^3}\Delta^3 u_0 + \ldots\ldots$$

$$\Delta_0^2 u_{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m^2}\Delta^2 u_0 - \frac{m-2}{m^3}\Delta^3 u_0 + \ldots\ldots$$

. . . .

Hieraus die Glieder der dritten Differenzreihe:

$$\Delta_0^3 u_0 = \frac{1}{m^3}.\Delta^3 u_0 - \ldots\ldots$$

. . . .

So wird fortgesetzt, bis man zu der konstanten Differenz $\Delta_0^k u$ gelangt.

Von diesen so gebildeten Ausdrücken sind für den praktischen Gebrauch nur diejenigen der Anfangsglieder sämtlicher Reihen, nämlich u_0, $\Delta_0 u_0$, $\Delta_0^2 u_0$, $\Delta_0^3 u_0$ u. s. w. erforderlich. Denn substituiert man in denselben die gegebenen numerischen Werte, so hat man damit die vollständigen Daten, um daraus durch bloße Additionen die gesuchte Reihe, welche das Resultat der Interpolation ist, herzuleiten (siehe Punkt 3 dieses Abschnittes).

Soll beispielsweise eine arithmetische Reihe, deren dritte Differenzreihe konstant ist, durch die Zahl 10 interpoliert werden, so folgt aus den gegebenen Ausdrücken, indem $m = 10$ gesetzt wird:

$$\Delta_0 u_0 = 0{\cdot}1\,\Delta\, u_0 - 0{\cdot}045\,\Delta^2 u_0 + 0{\cdot}0285\,\Delta^3 u_0,$$

$$\Delta_0^2 u_0 = 0{\cdot}01\,\Delta^2 u_0 - 0{\cdot}009\,\Delta^3 u_0,$$

$$\Delta_0^3 u_0 = 0{\cdot}001\,\Delta^3 u_0.$$

Beispiel. Um zwischen je zwei Gliedern der Reihe 1, 16, 49, 100, ... zwei neue Glieder so einzuschalten, daß dadurch die Ordnung der Reihe nicht geändert wird, hat man $m = 3$ zu setzen. Das Schema der gegebenen Reihe lautet:

1,		16,		49,		100, ...	
	15,		33,		51, ...		
		18,		18, ...			

Es ist also für das Einschalten zwischen dem ersten und zweiten Gliede

$u_0 = 1, \quad u_1 = 16, \quad \Delta u_0 = 15, \quad \Delta^2 u_0 = 18, \quad \Delta^3 u_0 = \Delta^4 u_0 = \cdots\cdots = 0;$
folglich nach der Formel 4)

$$u_{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}\cdot 15 - \frac{1}{9}\cdot 18 = 1 + 5 - 2 = 4,$$

$$u_{\frac{2}{3}} = 1 + \frac{2}{3}\cdot 15 - \frac{1}{9}\cdot 18 = 1 + 10 - 2 = 9.$$

Für die beiden nächsten Glieder wird

$$u_0 = 16, \quad u_1 = 49, \quad \Delta u_0 = 33, \quad \Delta^2 u_0 = 18;$$

mithin ist

$$u_{\frac{1}{3}} = 16 + \frac{1}{3}\cdot 33 - \frac{1}{9}\cdot 18 = 16 + 11 - 2 = 25,$$

$$u_{\frac{2}{3}} = 16 + \frac{2}{3}\cdot 33 - \frac{1}{9}\cdot 18 = 16 + 22 - 2 = 36;$$

dieser Rechnungsvorgang gestaltet sich in der Regel einfacher, als mit dem ersten Werte von u_0 die Glieder $u_{0+\frac{4}{3}}$ und $u_{0+\frac{5}{3}}$ zu suchen.

Für die beiden folgenden Glieder würde man $u_0 = 49$ und $u_1 = 100$ setzen und wieder $u_{\frac{1}{3}}$ und $u_{\frac{2}{3}}$ bestimmen u. s. w.

Die interpolierte Reihe lautet demnach:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ...

und ist wieder eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung.

Zusammenfassung. Die Formel

$$u_{n+r} = u_n + \binom{r}{1}\Delta u_n + \binom{r}{2}\Delta^2 u_n + \binom{r}{3}\Delta^3 u_n + \cdots\cdots + \Delta^r u_n$$

ist bei arithmetischen Reihen nicht bloß für ganze positive, sondern auch für gebrochene Werte von r in den Binomialkoeffizienten gültig. Sie bricht, wenn die Reihe von der k-ten Ordnung ist, mit dem Gliede $\binom{r}{k}\Delta^k u_n$ ab. Setzt man also $r = \frac{x}{m}$ und $x < m$, so folgt:

$$u_{n+\frac{x}{m}} = u_n + \binom{\frac{x}{m}}{1}\Delta u_n + \binom{\frac{x}{m}}{2}\Delta^2 u_n + \binom{\frac{x}{m}}{3}\Delta^3 u_n + \cdots + \binom{\frac{x}{m}}{k}\Delta^k u_n$$

oder

$$5)\quad \begin{cases} u_{n+\frac{x}{m}} = u_n + \dfrac{x}{m}\Delta u_n - \dfrac{x(m-x)}{m^2}\dfrac{\Delta^2 u_n}{2!} + \dfrac{x(m-x)(2m-x)}{m^3}\dfrac{\Delta^3 u_n}{3!} - \\ -\cdots\cdots - (-1)^k \dfrac{x(m-x)(2m-x)\cdots\cdots\{(k-1)m-x\}}{m^k}\dfrac{\Delta^k u_n}{k!} \end{cases}$$

Substituiert man hierin für x sukzessive die Werte 1, 2, 3, ..., $m-1$, so ergeben sich die zwischen u_n und u_{n+1} interpolierten $m-1$ Glieder.

Aus der Formel 5) erkennt man gleichzeitig (siehe Punkt 7 dieses Abschnittes), daß die interpolierte Reihe von derselben Ordnung sein muß wie die ursprüngliche Reihe.

Ist z. B. die arithmetische Reihe zweiter Ordnung 4, 7, 12, ... gegeben und sollen zwischen je zwei Gliedern dieser Reihe zwei neue Glieder eingeschaltet werden, so ergibt sich aus dem allgemeinen Gliede der ursprünglichen Reihe

$$u_n = 4 + \binom{n}{1} 3 + \binom{n}{2} 2$$

das allgemeine Glied für die interpolierte Reihe mit

$$u_{n+\frac{x}{3}} = 4 + \frac{x}{3} \cdot 3 - \frac{x(3-x)}{9} \cdot \frac{2}{2!} = 4 + x - \frac{1}{9} x(3-x).$$

Setzt man hierin $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ u. s. w., so resultiert die Reihe

$$4,\ 4\frac{7}{9},\ 5\frac{7}{9},\ 7,\ 8\frac{4}{9},\ 10\frac{1}{9},\ 12 \text{ u. s. w.}$$

10. Verallgemeinerung der für arithmetische Reihen erhaltenen Interpolationsformel.

Wie bereits gesagt wurde, liegt der Interpolation von Reihen im allgemeinen, also nicht der Interpolation der arithmetischen Reihen allein, der Gedanke zu Grunde, daß man in Ermangelung des analytischen Ausdruckes einer Funktion, welcher die Natur derselben vollständig bestimmen und die Mittel bieten würde, entweder genau oder so nahe als man will jeden Wert zu berechnen, der einem gegebenen Werte der unabhängigen Veränderlichen — des Argumentes — entspricht, dennoch mit einem für die Anwendungen ausreichenden Grade von Genauigkeit alle Werte der in Rede stehenden Funktion anzugeben imstande ist, sobald man eine begrenzte Anzahl von Werten dieser Funktion kennt. Es verhält sich hier ebenso, wie bei graphischen Konstruktionen, wo man die Gestalt einer Kurve als bestimmt ansieht, sobald eine gewisse Anzahl von Punkten festgelegt worden ist, welche dieser Kurve angehören.

Denkt man sich in der Formel 1) des Punktes 5 dieses Abschnittes x statt n gesetzt, so folgt

$$1)\quad u_x = u_0 + x \,.\, \Delta u_0 + \frac{x(x-1)}{1\,.\,2} \Delta^2 u_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3} \Delta^3 u_0 + \cdots + \Delta^x u_0.$$

Diese Formel bildet die Grundlage für die folgenden Erwägungen. Man nimmt willkürlich an, daß von der gegebenen Reihe die Diffe-

renzen einer gewissen Ordnung innerhalb der gegebenen Gruppe von Gliedern konstant seien und betrachtet den daraus hervorgehenden Ausdruck von u_x als gültig auch für gebrochene Werte des Index x. Dagegen wird von dem allgemeinen Gliede der Reihe selbst, welcher Natur dasselbe auch sein mag, für diesen Zweck kein Gebrauch gemacht.

Die Berechnung aller Tabellen, z. B. der logarithmischen Tabellen beschränkt sich darauf, daß man mit Hilfe ihres allgemeinen Gliedes zuerst eine mäßige, in größeren Intervallen auseinander liegende Anzahl von Gliedern berechnet; die zwischenliegenden Glieder werden sodann ohne weiteren Gebrauch des allgemeinen Gliedes durch Interpolation gefunden.

Ein Kriterium für die Anwendbarkeit der Interpolationsformel 1) liegt darin, daß die rechte Seite dieser Formel eine konvergente Reihe bildet, was immer dann der Fall ist, wenn die Differenzen höherer Ordnungen gegen Null abnehmen. Man kann dann diese Reihe mit einem dem vorgeschriebenen Grade von Genauigkeit entsprechenden Gliede abbrechen. Wo diese Bedingung nicht erfüllt wird, ist die Interpolation in dieser Form nicht zulässig.

Man kann zwei Hauptaufgaben der Interpolation unterscheiden, je nachdem es sich darum handelt, nur ein einzelnes Zwischenglied herzustellen, oder aber alle Intervalle der Hauptreihe in kleineren und unter sich wieder gleichen Intervallen durch Zwischenglieder auszufüllen.

Beim Gebrauche von mathematischen Tabellen aller Art, bei welchen das Argument immer nach einer arithmetischen Reihe der ersten Ordnung fortläuft, findet die Interpolation in zweifacher Weise Anwendung:

1. Fall. Für einen gegebenen, jedoch nicht in der Tabelle enthaltenen Argumentenwert den zugehörigen Funktionswert zu bestimmen.

2. Fall. Dieser bildet die umgekehrte Aufgabe des 1. Falles und wird mitunter als inverses Interpolieren bezeichnet. Hier handelt es sich darum, zu einem gegebenen, nicht in der Tabelle eingetragenen Funktionswerte den zugehörigen Wert des Argumentes zu suchen.

Beide Fälle sollen nachstehend näher erläutert werden.

1. Fall. Für einen gegebenen, jedoch nicht in der Tabelle eingetragenen Argumentenwert den zugehörigen Funktionswert zu bestimmen. Oder mit anderen Worten: In einer gegebenen Gruppe von Gliedern einer Reihe ein

Zwischenglied für einen gegebenen gebrochenen Index einzuschalten.

Die gegebene Gruppe von Gliedern sei u_0, u_1, u_2, u_3, ... Bildet man deren sukzessive Differenzreihen, so hat man den Ausdruck für u_x, Formel 1), bis zu der konstanten Differenz fortzusetzen. In diesem Ausdrucke ist für x der gegebene gebrochene Index einzusetzen.

1. Beispiel. Das gewöhnliche Interpolieren der logarithmischen und anderen Tabellen mittels der sogenannten Proportionalteile beruht auf der Voraussetzung, daß die ersten Differenzen konstant sind und hat also nach der Formel zu geschehen

$$2) \qquad u_x = u_0 + x \,.\, \Delta u_0.$$

Bei solchen Tabellen läßt man demnach das Argument nach so kleinen Intervallen fortschreiten, daß innerhalb einer gewissen Ausdehnung die ersten Differenzen konstant und somit jene der höheren Ordnung = 0 werden.

Es sei z. B. zu finden $log\,1952{\cdot}36$, während gegeben ist:

$$\begin{aligned} u_0 &= log\,1952 = 3{\cdot}29048 \\ u_1 &= log\,1953 = 3{\cdot}29070 \end{aligned} \qquad \Delta u_0 = 22.$$

Hier ist zu setzen $x = 0{\cdot}36$ und man erhält

$$\begin{aligned} log\,1952{\cdot}36 &= 3{\cdot}29048 + 0{\cdot}36 \times 22 \\ &= 3{\cdot}29048 \\ &+ \qquad\quad 7\,92 \\ \hline &= 3{\cdot}29056 \\ log\,1952{\cdot}36 &= 3{\cdot}29056. \end{aligned}$$

2. Beispiel. Wenn nicht mehr die ersten, sondern erst die zweiten Differenzen als konstant angesehen werden dürfen, so hat man zu setzen

$$3) \qquad u_x = u_0 + x \,.\, \Delta u_0 + \frac{x(x-1)}{2} \Delta^2 u_0.$$

Es sei z. B. zu finden $log\,20{\cdot}75$, während gegeben ist:

$$\begin{aligned} u_0 &= log\,20 = 1{\cdot}30103 \\ u_1 &= log\,21 = 1{\cdot}32222 \\ u_2 &= log\,22 = 1{\cdot}34242 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \Delta u_0 &= 2119 \\ \Delta u_1 &= 2020 \end{aligned} \qquad \Delta^2 u_0 = -\,99.$$

Man hat zu setzen $x = 0{\cdot}75$ und erhält

$$log\, 20{\cdot}75 = 1{\cdot}30103 + 0{\cdot}75 \times 2119 + \frac{0{\cdot}75 \times 0{\cdot}25}{2} \cdot 99$$

$$= 1{\cdot}30103$$
$$+ \quad 1589\,25$$
$$+ \qquad 9\,28$$
$$= 1{\cdot}31702$$

$$log\, 20{\cdot}75 = 1{\cdot}31702.$$

Die Differenzen sind in diesen Beispielen wegen der kürzeren Schreibweise überall in Einheiten der fünften Dezimalstelle angesetzt worden.

2. Fall. Zu einem gegebenen, nicht in der Tabelle eingetragenen Funktionswert den zugehörigen Wert des Argumentes zu suchen. Oder mit anderen Worten: In einer gegebenen Gruppe von Gliedern einer Reihe für ein gegebenes einzuschaltendes Zwischenglied den Index zu finden.

Diese Aufgabe ist, wie bereits gesagt wurde, die Umkehrung der vorigen, d. h. u_x ist gegeben und x wird gesucht.

Wenn schon die ersten Differenzen konstant, also die zweiten samt den folgenden Differenzen unmerklich sind, so hat man aus der Gleichung 2) unmittelbar

4) $$x = \frac{u_x - u_0}{\Delta u_0}.$$

Sind aber auch noch die höheren Differenzen zu berücksichtigen, so würde die Bestimmung von x aus 1) die Auflösung einer höheren Gleichung erfordern, welcher Übelstand, wenn die Differenzen rasch genug abnehmen, durch das folgende Näherungsverfahren umgangen werden kann.

Wenn die zweiten Differenzen konstant sind, so bringe man die Gleichung 3) in die Form

5) $$x = \frac{u_x - u_0}{\Delta u_0 + \frac{x-1}{2} \Delta^2 u_0},$$

nehme den aus der Gleichung 4) erhaltenen Wert von x, welchen man als den ersten Näherungswert ansieht, und substituiere denselben auf der rechten Seite der Gleichung 5), um den genaueren Wert von x zu erhalten. Dieser zweite Näherungswert kann eventuell nochmals substituiert werden, um ein noch genaueres Resultat zu erhalten.

Ebenso verfahre man, wenn die Glieder irgend einer späteren Differenzreihe konstant sind, indem man allgemein hat

$$x = \frac{u_x - u_0}{\Delta u_0 + \frac{x-1}{2}\Delta^2 u_0 + \frac{(x-1)(x-2)}{2.3}\Delta^3 u_0 + \cdots\cdots}$$

Wenn also beispielsweise erst die dritten Differenzen konstant sind, so hat man zunächst den ersten Näherungswert aus 4), mit diesem den zweiten Näherungswert aus 5) und endlich mit letzterem den dritten Näherungswert aus

$$6) \qquad x = \frac{u_x - u_0}{\Delta u_0 + \frac{x-1}{2}\Delta^2 u_0 + \frac{(x-1)(x-2)}{2.3}\Delta^3 u_0}$$

zu suchen.

1. Beispiel. In dem 1. Beispiele des 1. Falles sei gegeben

$$u_x = 3{\cdot}29056.$$

Man hat $u_x - u_0 = 8$, also aus 4)

$$x = \frac{u_x - u_0}{\Delta u_0} = \frac{8}{22} = 0{\cdot}36\ldots\ldots;$$

es ist demnach $3{\cdot}29056 = log\, 1952{\cdot}36\ldots\ldots$, wie früher.

2. Beispiel. In dem zweiten Beispiele des 1. Falles sei gegeben

$$u_x = 1{\cdot}31702.$$

Man hat $u_x - u_0 = 1599$, also aus 4) den ersten Näherungswert

$$x = \frac{u_x - u_0}{\Delta u_0} = \frac{1599}{2119} = 0{\cdot}7546.$$

Substituiert man diesen Wert auf der rechten Seite der Gleichung 5), so folgt der genauere Wert

$$x = \frac{1599}{2119 + 0{\cdot}1227 \times 99} = 0{\cdot}7504;$$

es ist demnach $1{\cdot}31702 = log\, 20{\cdot}75\ldots\ldots$, wie früher.

11. Interpolationsformel von Lagrange.

Es soll nun der Fall betrachtet werden, in welchem die gegebenen Werte des Argumentes $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$, $n+1$ an der Zahl, nicht in gleichen Intervallen aufeinander folgen, d. h. nicht eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung bilden. Die den genannten Argumentenwerten entsprechenden Funktionswerte seien wieder $u_0, u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n$.

Man setze

1) $$u = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots a_n x^n,$$

worin die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, ..., a_n, $n+1$ an der Zahl, so zu bestimmen sind, daß für $x = x_0$, x_1, x_2, ..., x_n die Funktion u der Reihe nach die Werte u_0, u_1, u_2, ..., u_n annimmt. Zur Bestimmung der $n+1$ Koeffizienten dienen folgende $n+1$ Gleichungen ersten Grades:

$$\begin{aligned} u_0 &= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots\cdots + a_n x_0^n, \\ u_1 &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots\cdots + a_n x_1^n, \\ u_2 &= a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots\cdots + a_n x_2^n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n &= a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots\cdots + a_n x_n^n; \end{aligned}$$

dieselben reichen zur Bestimmung der $n+1$ Koeffizienten hin.

Ohne jedoch diese Bestimmung wirklich auszuführen, erkennt man aus der linearen Form dieser Gleichungen, daß jeder Koeffizient, z. B. a_0 die Form

$$a_0 = p_0 u_0 + p_1 u_1 + p_2 u_2 + \cdots\cdots + p_n u_n$$

haben wird, worin p_0, p_1, p_2, ..., p_n Funktionen von x_0, x_1, x_2, ..., x_n sind. Denkt man sich sodann die für die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, ..., a_n gefundenen Werte in 1) substituiert und nach u_0, u_1, u_2, ..., u_n geordnet, so nimmt die Gleichung 1) die Form an

2) $$u = X_0 u_0 + X_1 u_1 + X_2 u_2 + \cdots\cdots + X_n u_n,$$

wobei die Koeffizienten X_0, X_1, X_2, ..., X_n ganze rationale Funktionen des n-ten Grades von x sein werden. Der Bedingung der Aufgabe gemäß muß die rechte Seite der Gleichung 2) sich auf u_0 reduzieren, wenn $x = x_0$ gesetzt wird. Dies erfordert, daß

für $x = x_0$: $X_0 = 1$ und $X_1 = X_2 = \cdots\cdots = X_n = 0$ werde;

aus gleichem Grunde muß

für $x = x_1$: $X_1 = 1$ und $X_0 = X_2 = \cdots\cdots = X_n = 0$ werden u. s. w.

Für $x = x_k$ müssen die Bedingungen stattfinden:

$$X_k = 1 \text{ und } X_0 = X_1 = \cdots\cdots = X_{k-1} = X_{k+1} = \cdots\cdots = X_n = 0.$$

Man kann auch sagen: Der Koeffizient X_k ist durch die beiden Bedingungen bestimmt, daß derselbe gleich 1 werde für $x = x_k$, für alle übrigen Werte von x aber sich auf 0 reduziere.

Da bekanntlich X_k eine Funktion n-ten Grades von x sein muß, so wird der letzteren dieser beiden Bedingungen genügt, indem man setzt

3) $X_k = m(x - x_0)(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots\ldots(x - x_n)$,

wobei m eine Konstante bedeutet. Da jedoch $X_k = 1$ werden muß für $x = x_k$, so folgt aus 3)

$$1 = m(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots\ldots(x_k - x_n),$$

wodurch m bestimmt erscheint. Führt man den hieraus folgenden Wert für m in 3) ein oder dividiert 3) durch diese Gleichung, so resultiert

$$X_k = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots\ldots(x_k - x_n)}.$$

Setzt man in diese Formel statt k der Reihe nach 0, 1, 2, ..., n, so ergeben sich die Koeffizienten X. Führt man ihre Werte in 2) ein, so resultiert:

$$4)\quad \left\{ \begin{aligned} u = {} & u_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)\ldots\ldots(x_0 - x_n)} + \\ & + u_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)\ldots\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots\ldots(x_1 - x_n)} + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + u_n \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots\ldots(x_n - x_{n-1})}, \end{aligned} \right.$$

welches die von Lagrange gegebene Interpolationsformel ist. Werden in den Zählern dieser Brüche die angezeigten Multiplikationen verrichtet und die rechte Seite überhaupt nach den Potenzen von x geordnet, so erhält die Gleichung 4) die Form der Gleichung 1).

Es existiert keine zweite Funktion n-ten Grades, welche die eingangs erwähnten Eigenschaften besitzt. Denn wäre beispielsweise

$$u = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots\cdots + b_n x^n$$

eine solche zweite Funktion, so müßte die Differenz

$$a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \cdots\cdots + (a_n - b_n)x^n$$

für die $n+1$ Werte x_0, x_1, x_2, ..., x_n verschwinden, was jedoch unmöglich ist, da eine Gleichung n-ten Grades nicht mehr als n Wurzeln besitzen kann.

Die Interpolationsformel von Lagrange mit den rechtwinkeligen Koordinaten x, u führt geometrisch gedeutet auf eine sogenannte Parabel n-ter Ordnung. Von dieser Parabel sind $n+1$ Punkte dadurch gegeben, daß man zu den irgendwie vorgeschriebenen Abszissen x_0, x_1, ..., x_n die Ordinaten u_0, u_1, ..., u_n kennt.

Die Interpolationsformel von Lagrange wurde zuerst von Waring abgeleitet, wird jedoch von altersher nach Lagrange benannt.

Beispiel. Gegeben sind die Koordinaten von drei Punkten P_0 $(x_0 = a,\ y_0 = 0)$, P_1 $(x_1 = 0,\ y_1 = b)$, P_2 $(x_2 = -a,\ y_2 = 0)$. Durch Anwendung der Interpolationsformel von Lagrange findet man:

$$y = \frac{(x-a)(x+a)}{-a \, . \, a} b = \frac{a^2 - x^2}{a^2} b.$$

Diese Gleichung stellt eine Parabel dar, welche die drei Punkte P_0, P_1, P_2 enthält und die y-Achse zur Achse hat.

Ein hieher gehöriges Beispiel ist auch das folgende: Durch Versuche wurde gefunden, daß bei konstantem Elevationswinkel den Pulverladungen p_0, p_1, p_2, p_3 beziehungsweise die Schußweiten x_0, x_1, x_2, x_3 entsprechen; man soll bestimmen, welche Schußweiten den Pulverladungen p', p'', p''' zukommen.

Man erhält die Interpolationsformel

$$x = \frac{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)}{(p_0-p_1)(p_0-p_2)(p_0-p_3)} x_0 + \frac{(p-p_0)(p-p_2)(p-p_3)}{(p_1-p_0)(p_1-p_2)(p_1-p_3)} x_1 +$$
$$+ \frac{(p-p_0)(p-p_1)(p-p_3)}{(p_2-p_0)(p_2-p_1)(p_2-p_3)} x_2 + \frac{(p-p_0)(p-p_1)(p-p_2)}{(p_3-p_0)(p_3-p_1)(p_3-p_2)} x_3;$$

die Anwendung derselben für die Beantwortung der Frage ist selbstverständlich.

Es lassen sich nach dem Muster der Interpolationsformel von Lagrange noch neue Interpolationsformeln bilden. Denn die Bedingungen, welchen die Größen X_0, X_1, X_2, ..., X_n unterworfen sind, können auf unzählige Arten erreicht werden. Man kann z. B. setzen:

$$X_k = \frac{(x-x_0)^{m_0}(x-x_1)^{m_1}\ldots(x-x_{k-1})^{m_{k-1}}(x-x_{k+1})^{m_{k+1}}\ldots(x-x_n)^{m_n}}{(x_k-x_0)^{m_0}(x_k-x_1)^{m_1}\ldots(x_k-x_{k-1})^{m_{k-1}}(x_k-x_{k+1})^{m_{k+1}}\ldots(x_k-x_n)^{m_n}},$$

worin die rechte Seite zur Einheit wird, wenn $x = x_k$ ist, hingegen den Wert Null für die anderen Werte von x annimmt. Nach dieser Vorschrift bildet man leicht die Werte von X_0, X_1, ..., X_n wobei die Exponenten m_0, m_1, ..., m_n beliebige reelle Zahlen vorstellen. Man kann auch andere Funktionen wählen und z. B. für X_k den Bruch setzen, dessen Zähler

$$\sin\varphi_0 (x - x_0) + \sin\varphi_1 (x - x_1) + \cdots + \sin\varphi_{k-1} (x - x_{k-1}) +$$
$$+ \sin\varphi_{k+1} (x - x_{k+1}) + \cdots + \sin\varphi_n (x - x_n)$$

und dessen Nenner

$$\sin\varphi_0\,(x_k-x_0)+\sin\varphi_1\,(x_k-x_1)+\cdots\cdots+\sin\varphi_{k-1}\,(x_k-x_{k-1})+$$
$$+\sin\varphi_{k+1}\,(x_k-x_{k+1})+\cdots\cdots+\sin\varphi_n\,(x_k-x_n)$$

lautet. Dieser X_k darstellende Bruch wird wieder zur Einheit, wenn $x=x_k$ ist, verschwindet hingegen für die anderen Werte von x; die Koeffizienten $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}, \varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_n$ in diesem Bruche können abermals ganz beliebige Zahlen sein. Man sieht hieraus wieder, daß das Problem der Interpolation ein unbestimmtes ist, wenn nicht besondere Umstände vorliegen, welche die Natur der Interpolationsformel näher fixieren.

12. Interpolationsformel von Newton.

Weiß man, daß den Werten x_0, x_1, x_2 u. s. w. für x, welche gleich weit oder ungleich weit voneinander abstehen können (äquidistant oder nicht äquidistant, äquidifferent oder nicht äquidifferent), die Werte u_0, u_1, u_2 u. s. w. einer Funktion u von x entsprechen, so bedient man sich der Formel

1) $$u=a+bx+cx^2+dx^3+\cdots\cdots,$$

welche durch die Substitution der besonderen Werte x_0, x_1, x_2, u. s. w. folgende Relationen liefert:

$$u_0=a+b\,x_0+c\,x_0^2+d\,x_0^3+\cdots\cdots,$$
$$u_1=a+b\,x_1+c\,x_1^2+d\,x_1^3+\cdots\cdots,$$
$$u_2=a+b\,x_2+c\,x_2^2+d\,x_2^3+\cdots\cdots \text{ u. s. w.}$$

Die Anzahl dieser Gleichungen muß derjenigen der unbestimmten Koeffizienten a, b, c, d u. s. w. gleich sein. Die Ausdrücke für diese Koeffizienten lassen sich nun folgendermaßen herleiten. Man ziehe nach und nach die erste Gleichung von der zweiten, diese von der dritten u. s. w. ab und dividiere die Differenzen beziehungsweise durch x_1-x_0, x_2-x_1 u. s. w.; man erhält dadurch:

$$\frac{u_1-u_0}{x_1-x_0}=b+c\,(x_1+x_0)+d\,(x_1^2+x_1\,x_0+x_0^2)+\cdots\cdots,$$
$$\frac{u_2-u_1}{x_2-x_1}=b+c\,(x_2+x_1)+d\,(x_2^2+x_2\,x_1+x_1^2)+\cdots\cdots,$$
$$\frac{u_3-u_2}{x_3-x_2}=b+c\,(x_3+x_2)+d\,(x_3^2+x_3\,x_2+x_2^2)+\cdots\cdots \text{ u. s. w.}$$

Setzt man der Kürze halber:

$$\frac{u_1-u_0}{x_1-x_0}=U_0,\quad \frac{u_2-u_1}{x_2-x_1}=U_1,\quad \frac{u_3-u_2}{x_3-x_2}=U_2 \text{ u. s. w.},$$

so hat man die Gleichungen:

$$U_0 = b + c(x_1 + x_0) + d(x_1^2 + x_1 x_0 + x_0^2) + \cdots\cdots,$$
$$U_1 = b + c(x_2 + x_1) + d(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) + \cdots\cdots,$$
$$U_2 = b + c(x_3 + x_2) + d(x_3^2 + x_3 x_2 + x_2^2) + \cdots\cdots \text{ u. s. w.}$$

Zieht man wieder die erste dieser Gleichungen von der zweiten, diese von der dritten u. s. w. ab und setzt:

$$\frac{U_1 - U_0}{x_2 - x_0} = U_0', \quad \frac{U_2 - U_1}{x_3 - x_1} = U_1' \text{ u. s. w.,}$$

so findet man

$$U_0' = c + d(x_2 + x_1 + x_0) + \cdots\cdots,$$
$$U_1' = c + d(x_3 + x_2 + x_1) + \cdots\cdots \text{ u. s. w.}$$

Hieraus folgt:

$$U_1' - U_0' = d(x_3 - x_0) + \cdots\cdots \text{ u. s. w.,}$$

wobei

$$\frac{U_1' - U_0'}{x_3 - x_0} = U_0'', \quad \frac{U_2' - U_1'}{x_4 - x_1} = U_1'' \text{ u. s. w.}$$

gesetzt wird, um die folgenden Differenzen zu bilden u. s. w.

Nimmt man, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, bloß vier Glieder auf der rechten Seite von 1) an, d. h. wird

$$2) \qquad u = a + bx + cx^2 + dx^3$$

gesetzt, so folgt aus den vorigen Ausdrücken:

$$3) \begin{cases} d = U_0'', \\ c = U_0' - U_0''(x_0 + x_1 + x_2), \\ b = U_0 - U_0'(x_0 + x_1) + U_0''(x_0 x_1 + x_0 x_2 + x_1 x_2), \\ a = u_0 - U_0 x_0 + U_0' x_0 x_1 - U_0'' x_0 x_1 x_2. \end{cases}$$

Substituiert man diese Werte in den Ausdruck für u [Formel 2)], so resultiert die Beziehung:

$$u = u_0 + U_0(x - x_0) + U_0'\{x^2 - (x_0 + x_1)x + x_0 x_1\} +$$
$$+ U_0''\{x^3 - (x_0 + x_1 + x_2)x^2 + (x_0 x_1 + x_0 x_2 + x_1 x_2)x - x_0 x_1 x_2\}.$$

Da sich aber die Koeffizienten von U_0' und U_0'' in binomische Faktoren zerlegen lassen, so nimmt die erhaltene Beziehung auch die Form an:

$$4) \quad u = u_0 + U_0(x - x_0) + U_0'(x - x_0)(x - x_1) + U_0''(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

Dehnt man dieses Verfahren durch Analogie weiter aus, so folgt bei einer beliebigen Anzahl von Werten x_0, x_1, x_2 u. s. w. für x nachstehende allgemeine Gleichung:

$$5)\quad \begin{cases} u = u_0 + U_0 (x - x_0) + U_0' (x - x_0)(x - x_1) + \\ \qquad + U_0'' (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \\ \qquad + U_0''' (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \cdots\cdots, \end{cases}$$

welche die **Newtonsche Interpolationsformel** heißt. Die Koeffizienten U_0, U_0', U_0'' u. s. w. sind durch folgende Beziehungen bestimmt:

$$\frac{u_1 - u_0}{x_1 - x_0} = U_0, \quad \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} = U_1, \quad \frac{u_3 - u_2}{x_3 - x_2} = U_2, \quad \frac{u_4 - u_3}{x_4 - x_3} = U_3 \text{ u. s. w.},$$

$$\frac{U_1 - U_0}{x_2 - x_0} = U_0', \quad \frac{U_2 - U_1}{x_3 - x_1} = U_1', \quad \frac{U_3 - U_2}{x_4 - x_2} = U_2' \text{ u. s. w.},$$

$$\frac{U_1' - U_0'}{x_3 - x_0} = U_0'', \quad \frac{U_2' - U_1'}{x_4 - x_1} = U_1'' \text{ u. s. w.},$$

$$\frac{U_1'' - U_0''}{x_4 - x_0} = U_0''' \text{ u. s. w.}$$

Die in der Gleichung 5) vorkommenden Koeffizienten U_0, U_0', U_0'', ... lassen sich unter einer bemerkenswerten Form darstellen, welche hier angegeben werden soll. Man hat:

$$U_0 = \frac{u_1 - u_0}{x_1 - x_0} = \frac{u_1}{x_1 - x_0} + \frac{u_0}{x_0 - x_1},$$

$$U_0' = \frac{U_1 - U_0}{x_2 - x_0} = \frac{1}{x_2 - x_0}\left(\frac{u_2}{x_2 - x_1} + \frac{u_1}{x_1 - x_2} - \frac{u_1}{x_1 - x_0} - \frac{u_0}{x_0 - x_1}\right),$$

oder wenn man die beiden mittleren Glieder auf der rechten Seite auf gleichen Nenner bringt:

$$U_0' = \frac{u_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} + \frac{u_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{u_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}.$$

Auf ähnliche Art würde man finden:

$$U_0'' = \frac{u_3}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} + \frac{u_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} +$$
$$+ \frac{u_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{u_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)},$$

was hinreicht, um das Gesetz, nach welchem diese Koeffizienten gebildet sind, zur Geltung zu bringen.

Werden in der Formel 5) für x nach und nach die Werte x_0, x_1, x_2, x_3, u. s. w. eingeführt, so resultieren folgende Gleichungen:

$$u_0 = u_0,$$
$$u_1 = u_0 + U_0 (x_1 - x_0),$$

$$u_2 = u_0 + U_0(x_2 - x_0) + U_0'(x_2 - x_0)(x_2 - x_1),$$
$$u_3 = u_0 + U_0(x_3 - x_0) + U_0'(x_3 - x_0)(x_3 - x_1) + $$
$$+ U_0''(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \text{ u. s. w.,}$$

mittels deren jeder von den Koeffizienten U_0, U_0', U_0'' u. s. w. durch diejenigen, welche ihm voranstehen, bestimmt wird.

Spezieller Fall: Interpolation durch äquidistante Intervalle.

Der Ausdruck „Interpolation durch äquidistante Intervalle" bedeutet, daß die Differenzen je zweier aufeinanderfolgender Werte von x, d. h. die Differenzen $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$ u. s. w. gleich sind.

Sind die Werte x_0, x_1, x_2 u. s. w. äquidistant (mit anderen Worten, bilden sie eine arithmetische Reihe erster Ordnung) und setzt man $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots\cdots = x_n - x_{n-1} = h$, so ist:

$$U_0 = \frac{\Delta u_0}{h}, \quad U_1 = \frac{\Delta u_1}{h}, \quad U_2 = \frac{\Delta u_2}{h} \text{ u. s. w.}$$

$$U_0' = \frac{\Delta^2 u_0}{1 . 2 h^2}, \quad U_1' = \frac{\Delta^2 u_1}{1 . 2 h^2}, \quad U_2' = \frac{\Delta^2 u_2}{1 . 2 h^2} \text{ u. s. w.}$$

$$U_0'' = \frac{\Delta^3 u_0}{1 . 2 . 3 h^3}, \quad U_1'' = \frac{\Delta^3 u_1}{1 . 2 . 3 h^4} \text{ u. s. w.}$$

$$U_0''' = \frac{\Delta^4 u_0}{1 . 2 . 3 . 4 h^3} \text{ u. s. w.}$$

. . . .

$$U_0^{(n-1)} = \frac{\Delta^n u_0}{1 . 2 . 3 \ldots\ldots n . h^n} \text{ u. s. w.}$$

Setzt man $nh = z$, ferner $x = x_0 + nh = x_0 + z$, wodurch $x - x_0 = z$, $x - x_1 = z - h$, $x - x_2 = z - 2h$, $x - x_3 = z - 3h$ u. s. w. $x - x_{n-1} = z - (n-1)h$ wird, so folgt, wenn diese und die vorigen Werte in die Gleichung 5) substituiert werden, die Formel:

$$6) \left\{ \begin{aligned} u = u_0 &+ \frac{z}{h}\Delta u_0 + \frac{z(z-h)}{1 . 2 h^2}\Delta^2 u_0 + \frac{z(z-h)(z-2h)}{1 . 2 . 3 h^3}\Delta^3 u_0 + \\ &+ \cdots\cdots + \frac{z(z-h)(z-2h)\ldots\ldots\{z-(n-1)h\}}{1 . 2 . 3 \ldots\ldots n . h^n}\Delta^n u_0, \end{aligned} \right.$$

welche auch in folgender Form geschrieben werden kann:

$$7) \left\{ \begin{aligned} u = u_0 &+ \frac{z}{h}\Delta u_0 - \frac{z(h-z)}{h^2}\frac{\Delta^2 u_0}{2!} + \frac{z(h-z)(2h-z)}{h^3}\frac{\Delta^3 u_0}{3!} - \\ &- \cdots\cdots - (-1)^n \frac{z(h-z)(2h-z)\ldots\ldots\{(n-1)h-z\}}{h^n}\frac{\Delta^n u_0}{n!}, \end{aligned} \right.$$

übereinstimmend mit der Formel 5) des Punktes 9 dieses Abschnittes.

Setzt man $u = f(x)$, so wird $u_0 = f(x_0)$, $u_1 = f(x_1) = f(x_0 + h)$, $u_2 = f(x_2) = f(x_0 + 2h)$, ..., $u_n = f(x_0 + nh)$; es stellen alsdann die rechten Seiten in 6) und 7) die Ausdrücke $f(x_0 + z) = f(x)$ dar. Die genannten rechten Seiten sind ganze rationale Funktionen n-ten Grades von x, wie man sich leicht überzeugt, wenn man statt z seinen Wert $x - x_0$ einführt und nehmen der Reihe nach die Werte $u_0, u_1, u_2, \ldots.., u_n$ an, wenn man darin $x_0, x_1, x_2, \ldots.., x_n$ an die Stelle von x setzt. Man erhält nämlich

$$\begin{aligned} &\text{für } x = x_0, \text{ wegen } z = 0, \quad f(x_0) = u_0, \\ &\;\;\text{„} \quad x = x_1, \quad\;\; \text{„} \quad z = h, \quad f(x_1) = u_0 + \Delta u_0 = u_1, \\ &\;\;\text{„} \quad x = x_2, \quad\;\; \text{„} \quad z = 2h, \; f(x_2) = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0 = u_2 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Diese Funktion $f(x)$ kann demnach in Ermangelung von $\varphi(x)$ als ein angenäherter Ausdruck des Gesetzes der Abhängigkeit der Größe u von x betrachtet und zur Interpolation benützt werden. Setzt man nämlich statt x irgend einen zwischen x_0 und x_n fallenden Wert x', so wird derselbe einen Wert u' liefern, welcher dem wahren Werte $\varphi(x')$ so nahe kommen wird, als es die gegebenen Daten überhaupt erlauben. Dabei ist h das Intervall, nach welchem das Argument fortschreitet und $z = x' - x_0$ zu setzen, worin x_0 jenen Wert des Argumentes bedeutet, welcher dem Werte u_0 entspricht, von welchem die Formeln 6) und 7) ausgehen.

Die Reihen rechts vom Gleichheitszeichen in 6) und 7) besitzen eine endliche Gliederzahl, wenn die Größen $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ eine arithmetische Reihe bilden; sie sind in diesem Falle nichts anderes als der Ausdruck des allgemeinen, dem Stellenzeiger $x_0 + z$ entsprechenden Gliedes der Reihe $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ und geben dann den genauen Wert der Funktion auch für solche Werte des Argumentes, welche außerhalb des Intervalles (x_0, x_n) liegen. Ist aber die Reihe der u keine arithmetische, und dies ist der allgemeinere Fall, so ist die Reihe auf der rechten Seite von 6) oder 7) unendlich und zur Berechnung von u nur geeignet, wenn sie konvergiert, was immer dann der Fall ist, sobald die aufeinander folgenden Differenzen Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$, ... immer kleiner werden, so daß man die folgenden Glieder mit Rücksicht auf den verlangten Grad der Genauigkeit vernachlässigen kann. In beiden Fällen ist aber die Berechnung des Wertes von u, welcher dem Werte $x_0 + z$ zukommt, nach der Formel 6) oder 7) weit bequemer und sicherer als nach der Formel 5) dieses Punktes. Man sieht, wie wichtig es bei Versuchen und Beobachtungen ist, diese, wenn

es nur irgend möglich ist, nach äquidistanten Werten des Argumentes anzuordnen.

Ist die Reihe der u eine arithmetische Reihe k-ter Ordnung, so folgt aus 6):

$$8) \begin{cases} u = u_0 + \frac{z}{1}\frac{\Delta u_0}{h} + \frac{z(z-h)}{1.2}\frac{\Delta^2 u}{h^2} + \frac{z(z-h)(z-2h)}{1.2.3}\frac{\Delta^3 u}{h^3} + \\ + \ldots\ldots + \frac{z(z-h)(z-2h)\ldots\ldots\{z-(k-1)h\}}{1.2.3\ldots\ldots k}\frac{\Delta^k u}{h^k}. \end{cases}$$

Ist das Intervall $h = 1$, so kann man unbeschadet der Allgemeinheit $x_0 = 0$, folglich $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ u. s. w. annehmen. Die Gleichung 8) liefert sodann dasjenige Glied, dessen Stellenzeiger z ist; es ist daher übereinstimmend mit Gleichung 4) des Punktes 9 dieses Abschnittes

$$9) \begin{cases} u_z = u_0 + \frac{z}{1}\Delta u_0 + \frac{z(z-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + \\ + \ldots\ldots + \frac{z(z-1)(z-2)\ldots\ldots(z-k+1)}{1.2.3\ldots\ldots k}\Delta^k u_0. \end{cases}$$

Man kann auch in den Gleichungen 6) und 7) $h = 1$ setzen, ferner $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ u. s. w. annehmen.

C. Prinzip der Interpolationsmethode auf Grund der Methode der kleinsten Quadrate.

13. Aufgabe der Interpolation im weiteren Sinne.

Bei der Herleitung der Interpolationsformeln auf Grund der Methode der kleinsten Quadrate handelt es sich, geometrisch gedeutet, darum, die vorliegende Kurve $u = \varphi(x)$ durch eine andere mit der Gleichung $u = f(x)$ zu ersetzen, die folgenden Bedingungen genügt: erstens muß der Ausdruck von $f(x)$ für die numerische Rechnung genügend bequem ausfallen; zweitens muß durchwegs ein hinreichend enger Anschluß zwischen den beiden Kurven bestehen, so daß die Differenzen $\varphi(x) - f(x)$ für das ganze in Betracht kommende Abszissengebiet als unerheblich anzusehen sind.*)

Der Anlaß, eine solche interpolatorische Darstellung für die vorgelegte Kurve zu substituieren, kann durch sehr verschiedene Umstände gegeben sein. Es kann vorkommen, daß die analytischen Beziehungen, aus denen $\varphi(x)$ entstanden ist, vollkommen offen liegen, daß jedoch die Gestalt von $\varphi(x)$ äußerst verwickelt ausfällt: in diesem

*) Vgl. die Punkte 1, 2 und 9 im V. Abschnitte des I. Bandes.

Falle dient die Darstellung durch $f(x)$ zur Entlastung des Rechners. Anderseits kann es aber auch vorkommen, daß das analytische Bildungsgesetz von $\varphi(x)$ nur teilweise oder auch gar nicht bekannt ist: dann verfolgt die Aufsuchung von $f(x)$ den Zweck, an die Stelle der numerischen Tabelle, in der die Koordinatenpaare x, u für die gegebenen Kurvenpunkte zusammengestellt sind, einen analytischen Ausdruck zu setzen, der den Inhalt jener Tabelle zu vertreten geeignet ist.

Versucht man die vorstehend beschriebene Aufgabe für einen bestimmten Fall zu lösen, so stößt man jedesmal zuerst auf die Frage, wie der Ausdruck $f(x)$ zu wählen sei. Daß man hiebei nach Möglichkeit alle Anhaltspunkte benützen wird, die bezüglich der darzustellenden Funktion $\varphi(x)$ bekannt sind, versteht sich von selbst; es ist jedoch klar, daß man $f(x)$ probeweise auf gut Glück anzusetzen hat, wenn die analytische Beschaffenheit von $\varphi(x)$ nur ungenügend bekannt ist. Der hiebei mit Vorliebe eingeschlagene Weg besteht nun darin, daß man für $f(x)$ eine Reihe von der Form

$$1)\qquad f(x) = k_1 \Psi_1(x) + k_2 \Psi_2(x) + \cdots\cdots$$

aufstellt, in der die Funktionen $\Psi(x)$, von der Veränderlichen x abgesehen, numerisch vollständig bestimmt sind, wogegen die Koeffizienten k gewisse, vorläufig verfügbare Konstanten bedeuten, die so anzusetzen sind, daß ein möglichst enger Anschluß von $f(x)$ an $\varphi(x)$ entsteht. Ein einfaches und häufig vorkommendes Beispiel für die Formel 1) bietet der Fall der gewöhnlichen Potenzreihe.

Der Umstand, daß die sogenannten Parameter der gesuchten Darstellung, nämlich die unbekannten k, in 1) linear auftreten, bildet bei der Ermittlung der Parameter eine wesentliche Erleichterung; dieser Vorteil ist so erheblich, daß man die lineare Form auch da herbeizuführen sucht, wo sie aus irgend welchen Gründen ursprünglich nicht vorhanden ist. Der Kunstgriff, den man hiebei anwendet, ist folgender: Wenn man durch bestimmte Umstände veranlaßt worden ist, für $f(x)$ vorerst einen, in den Parametern nichtlinearen Ausdruck $F(x, k_1, k_2, \ldots\ldots)$ aufzustellen, so denke man sich für die k_i zunächst genäherte vorläufige Werte k_i' ermittelt und hierauf $k_i = k_i' + \xi_i$ gesetzt, wo die Verbesserungen ξ_i nunmehr als die Unbekannten des Problems auftreten. Sind nun die für ξ_i zu erwartenden Werte genügend klein, so kann man nach der Taylorschen Reihe unter Beschränkung auf die Glieder erster Ordnung den Ausdruck

$$f(x) = F(x, k_1', k_2', \ldots\ldots) + F'_{k_1'}\xi_1 + F'_{k_2'}\xi_2 + \cdots\cdots$$

ansetzen, wobei die Koeffizienten $F'_{k_1'}$, $F'_{k_2'}$, ... die partiellen Ableitungen des ersten Gliedes der rechten Seite nach k_1', k_2', ... bedeuten. Damit ist offenbar die lineare Form für $f(x)$ hergestellt.

Kehrt man wieder zu der Form 1) zurück, so liefert jeder gegebene Punkt der Kurve $u = \varphi(x)$ eine Gleichung von der Gestalt

2) $$\varphi(x) = k_1 \Psi_1(x) + k_2 \Psi_2(x) + \cdots\cdots$$

in der bis auf die Parameter k alles numerisch bekannt ist. Man könnte also, wenn die gewählte Reihenform bezüglich der Gliederanzahl keiner Beschränkung unterworfen ist, im allgemeinen in sämtlichen gegebenen Kurvenpunkten eine vollständige Übereinstimmung zwischen $\varphi(x)$ und $f(x)$ herbeiführen, indem man einfach die Reihe mit ebensovielen Gliedern ansetzt, als Kurvenpunkte gegeben sind. Ein solches Vorgehen wäre jedoch im allgemeinen zweckwidrig, und zwar aus folgenden Gründen: Zunächst bliebe die Forderung hinreichender Einfachheit unerfüllt, sobald die Menge der gegebenen Kurvenpunkte einen irgendwie erheblichen Betrag annimmt; wenn fünfzig Punkte gegeben sind, so würde die dazugehörige, aus fünfzig Gliedern der Reihe 1) bestehende Formel der Regel nach als für den praktischen Gebrauch ungeeignet angesehen werden. Sodann bietet aber auch der für sämtliche gegebenen Punkte erzwungene genaue Anschluß keinerlei Gewähr dafür, daß auch in den Zwischenstellen eine befriedigende Übereinstimmung zwischen $\varphi(x)$ und $f(x)$ stattfinde. Denn das Verhalten der Differenzen $\varphi(x) - f(x)$ in den Zwischenstellen hängt wesentlich von den Eigenschaften der Funktionen $\varphi(x)$ und $f(x)$ ab, während der genaue Anschluß in den gegebenen Kurvenpunkten ohne Rücksicht auf jene Eigenschaften einzig und allein dadurch bewirkt worden ist, daß man die Menge der verfügbaren Parameter gleich der Menge der gegebenen Punkte genommen hat.

Läßt man mit Rücksicht auf die vorstehenden Bemerkungen nunmehr als Regel zu, daß die Anzahl der Parameter kleiner als die Anzahl der gegebenen Kurvenpunkte ist, so treten in dem aus 2) hervorgehenden Gleichungssysteme mehr Gleichungen als Unbekannte auf. Ist nun n die Anzahl der Gleichungen, p die Anzahl der verfügbaren Parameter, so kann man zwar immer noch den genauen Anschluß zwischen $\varphi(x)$ und $f(x)$ in p von den gegebenen Punkten erzwingen, wird es jedoch im allgemeinen vorziehen, die n Differenzen $\varphi(x) - f(x)$ in ihrer Gesamtheit möglichst herunterzudrücken, statt einige von ihnen genau gleich Null zu machen. Damit wird man zu einer Aufgabe geführt, die zugleich das Grundproblem der

Ausgleichungsrechnung bildet. und die nunmehr mit etwas abgeänderten Bezeichnungen folgendermaßen formuliert werden soll: Für die p Unbekannten $k_1, k_2, \ldots, k_p$ sind Gleichungen von der Form

$$3)\quad \left\{\begin{array}{l} l_1 = \Psi_1(x_1)\,k_1 + \Psi_2(x_1)\,k_2 + \cdots\cdots + \Psi_p(x_1)\,k_p, \\ l_2 = \Psi_1(x_2)\,k_1 + \Psi_2(x_2)\,k_2 + \cdots\cdots + \Psi_p(x_2)\,k_p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_n = \Psi_1(x_n)\,k_1 + \Psi_2(x_n)\,k_2 + \cdots\cdots + \Psi_p(x_n)\,k_p \end{array}\right\}\; n > p$$

angesetzt worden, deren Anzahl n größer als p ist; die beobachteten Größen $l_1, l_2, \ldots, l_n$ sind so beschaffen, daß die angesetzten Gleichungen durch kein Wertsystem der Unbekannten gleichzeitig befriedigt werden können; infolgedessen führt jedes System der Unbekannten auf Widersprüche in der Form

$$4)\quad \left\{\begin{array}{l} \delta_1 = -\,l_1 + \Psi_1(x_1)\,k_1 + \Psi_2(x_1)\,k_2 + \cdots\cdots + \Psi_p(x_1)\,k_p, \\ \delta_2 = -\,l_2 + \Psi_1(x_2)\,k_1 + \Psi_2(x_2)\,k_2 + \cdots\cdots + \Psi_p(x_2)\,k_p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_n = -\,l_n + \Psi_1(x_n)\,k_1 + \Psi_2(x_n)\,k_2 + \cdots\cdots + \Psi_p(x_n)\,k_p, \end{array}\right\}\; n > p$$

die nicht gleichzeitig zum Verschwinden gebracht werden können; gesucht wird ein System der k oder, wie kurz gesagt werden soll, eine Lösung, bei der die Gesamtheit der Widersprüche auf einen möglichst niedrigen Betrag herabgedrückt ist.

Es ist nun zu untersuchen, ob und wie weit sich die gestellte Aufgabe in bestimmter und einwandfreier Weise lösen läßt.

14. Prinzip der Methode der kleinsten Quadrate.

Bezeichnen L' und L'' zwei Lösungen, deren zugehörige Widersprüche mit δ' und δ'' bezeichnet werden mögen, so wird, falls jedes δ' numerisch kleiner als das entsprechende δ'' ist, die Lösung L' den Vorzug verdienen. Denn die Widersprüche sind in diesem Falle nichts anderes als die Abweichungen der vorgelegten Funktion $\varphi(x)$ von ihrer interpolatorischen Darstellung $f(x)$, so daß bei der Lösung L' der Anschluß durchwegs enger ausfällt als bei L''. Sind dagegen die δ' ihrem numerischen Betrage nach teils kleiner, teils größer als die entsprechenden δ'', so läßt sich vorläufig gar keine Entscheidung treffen, ob L' oder L'' vorzuziehen sei. Vielmehr muß in einem solchen Falle irgend eine weitere Bestimmung hinzugefügt werden, durch die man die vorhandene Ungewißheit aufheben kann. Unter den Vorschlägen, die man in dieser Beziehung gemacht hat, sind seither für den praktischen Gebrauch nur zwei in Betracht gekommen: der eine führt zu der sogenannten Methode der klein-

sten Quadrate, der andere zu dem Interpolationsverfahren von Cauchy.

Die Methode der kleinsten Quadrate beruht, wie im I. Bande wiederholt gesagt wurde, auf der Festsetzung, daß unter den verschiedenen Lösungen, die vorläufig als gleich annehmbar erscheinen, diejenige als die annehmbarste gelten solle, für welche die Quadratsumme der Widersprüche kleiner ausfällt als für jede andere Lösung. Diese Festsetzung erscheint also in der Gestalt

$$[\delta\,\delta] = \text{Minimum}.$$

Hienach hat man, um die Bedingungen für die gesuchte Lösung aufzustellen, von dem Ausdrucke $[\delta\,\delta]$ nach den einzelnen Unbekannten die partiellen Ableitungen erster Ordnung zu bilden und gleich Null zu setzen, wodurch man zu den Normalgleichungen*) gelangt.

Das Cauchysche Verfahren kann in dieser Studie nicht besprochen werden.

Auf die Frage, warum gerade das Minimum von $[\delta\,\delta]$ als Bedingung eingeführt wird, ist folgendes zu bemerken: Wenn, wie zunächst angenommen werden soll, die Größen l in den Widerspruchsgleichungen auf Messungen beruhen, die mit Fehlern zufälliger Art behaftet sind, und wenn ferner die Widersprüche zwischen den vorgelegten Gleichungen wesentlich von diesen zufälligen Beobachtungsfehlern herrühren, so ergeben sich aus den Erfahrungen, die über das Verhalten solcher Fehler bekannt sind, bestimmte Anhaltspunkte, die man selbstverständlich bei der Behandlung des vorliegenden Problems zu berücksichtigen hat. Diese Anhaltspunkte gestatten nun, den Spielraum, der für die Lösungen des Systems 3) im Punkte 13 vorerst besteht, derart einzuengen, daß schließlich die Methode der kleinsten Quadrate zwar nicht als die einzige logisch zulässige, wohl aber als die einzige praktisch brauchbare Lösung übrig bleibt. Es ist hier nicht der Ort, den Nachweis für die soeben ausgesprochenen Sätze zu erbringen, weil dazu eine Entwicklung der Theorie der Beobachtungsfehler nötig wäre; es genügt, darauf hinzuweisen, daß die oben erwähnte zusätzliche Bestimmung, welche zum Heraussuchen der annehmbarsten Lösung zu dienen hat, in diesem Falle auf den Erfahrungsunterlagen der Fehlertheorie beruht.

Anders stellt sich die Sache, wenn die Entstehung der Widersprüche mit zufälligen Beobachtungsfehlern nichts zu tun hat, sondern einfach davon herrührt, daß die darzustellende Funktion $\varphi(x)$ mit

*) Den bei der Auflösung der Normalgleichungen einzuhaltenden Vorgang enthält der Punkt 8 des V. Abschnittes im I. Bande.

der darstellenden Funktion $f(x)$ nicht identisch ist, daß also eine Übereinstimmung zwischen beiden nur in einzelnen Punkten, aber nicht durchwegs hergestellt werden kann. In solchen Fällen läßt sich die Benützung der Methode der kleinsten Quadrate nur durch Zweckmäßigkeitsgründe motivieren. So kann man zunächst darauf hinweisen, daß das Minimum von $[\delta\delta]$ von vornherein alle diejenigen Lösungen ausschließt, deren Unbrauchbarkeit dadurch bedingt ist, daß man bei ihnen durch Abänderung der Unbekannten sämtliche Widersprüche gleichzeitig numerisch verkleinern kann. Wenn das bei der Lösung nach der Methode der kleinsten Quadrate möglich wäre, so hätte man eben nicht das Minimum von $[\delta\delta]$ vor sich. Weiter läßt sich hervorheben, daß das Verfahren zu einer durchaus bestimmten Lösung führt und die Anwendung feststehender Rechnungsvorschriften gestattet, deren Ziffernverbrauch sich erfahrungsgemäß in annehmbaren Grenzen hält. Diese Umstände schließen natürlich nicht aus, daß auch noch andere Lösungen der Aufgabe als brauchbar zuzulassen sind.

15. Bestimmung der wahrscheinlichsten Werte der Parameter einer durch eine Potenzreihe dargestellten empirischen Funktion.

Die Punkte 15, 16 und 17 dieses Abschnittes sollen das Prinzip der Interpolationsmethode auf Grund der Methode der kleinsten Quadrate durch einige, dem Gebiete der Ballistik angehörende Beispiele erläutern.

Von der in der Schießtheorie stets geltenden Voraussetzung ausgehend, daß der Funktionswert u sich bei stetiger Änderung des Argumentes x auch stetig ändert, kann man den Zusammenhang zwischen x und u empirisch durch die Potenzreihe

$$1)\qquad u = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + \cdots\cdots$$

darstellen. In derselben sind auf Grund der beobachteten Werte u_1, u_2, ..., u_n der Funktion u, welche den Werten x_1, x_2, ..., x_n des Argumentes entsprechen, die wahrscheinlichsten Werte der Parameter k_0, k_1, k_2 u. s. w. auf Grund der Methode der kleinsten Quadrate zu bestimmen. Hiebei gilt die wohl selbstverständliche Voraussetzung, daß die Anzahl der gegebenen Wertepaare x, u größer sein muß als die Anzahl der zu ermittelnden Parameter.

Von der Potenzreihe wird in der Ballistik häufig auch dann Anwendung gemacht, wenn der analytische Zusammenhang zwischen x und u bekannt, dieser Zusammenhang jedoch so kompliziert ist,

daß er den weiteren Verlauf der analytischen Untersuchungen wesentlich erschwert oder gar unmöglich macht und wenn für das zu behandelnde Problem die Kenntnis des Verlaufes der Funktion nur innerhalb verhältnismäßig enger Grenzen des Argumentes von Interesse ist.

Liegt ein solcher Fall vor, so kann man sich dadurch helfen, daß innerhalb der durch das Problem gesteckten Grenzen des Argumentes für eine Reihe angenommener Argumentenwerte die Funktionswerte gerechnet und durch eine Potenzreihe analytisch dargestellt werden. Ein genaueres Verfahren wird im Punkte 16 dieses Abschnittes gezeigt werden.

Bricht man die Potenzreihe 1) mit dem Gliede $k_3 x^3$ ab, so resultieren zur Ermittlung von k_0, k_1, k_2, k_3 folgende vier Normalgleichungen:*)

$$2)\quad \begin{cases} [1]\,k_0 + [x]\,k_1 + [x^2]\,k_2 + [x^3]\,k_3 = [u], \\ [x]\,k_0 + [x^2]\,k_1 + [x^3]\,k_2 + [x^4]\,k_3 = [x\,u], \\ [x^2]\,k_0 + [x^3]\,k_1 + [x^4]\,k_2 + [x^5]\,k_3 = [x^2\,u], \\ [x^3]\,k_0 + [x^4]\,k_1 + [x^5]\,k_2 + [x^6]\,k_3 = [x^3\,u]. \end{cases}$$

Spezieller Fall: Die Argumentenwerte x sind äquidistant.

Unter dieser Voraussetzung nimmt x der Reihe nach die Werte h, $2\,h$, $3\,h$, ..., $r\,h$ an, womit der Koeffizient $[x^m]$ die Form erhält:

$$3)\quad [x^m] = h^m\,(1^m + 2^m + 3^m + \cdots\cdots + r^m) = h^m \sum_1^r n^m.$$

Wie im Punkte 8 dieses Abschnittes nachgewiesen wurde, ist

$$4)\quad \sum_1^r n^m = \frac{r^{m+1}}{m+1} + \frac{1}{2}\,r^m + B_1 \binom{m}{1} \frac{r^{m-1}}{2} - B_3 \binom{m}{3} \frac{r^{m-3}}{4} + \\ + B_5 \binom{m}{5} \frac{r^{m-5}}{6} - \cdots\cdots,$$

worin B_1, B_3, B_5 u. s. w. die Bernoullischen Zahlen bezeichnen.

Unter Berücksichtigung dieser Summenformel 4) und des Wertes 3) für $[x^m]$ resultieren für die Koeffizienten von k in 2) folgende Spezialausdrücke:

---

*) Um z. B. die dritte Normalgleichung aufzustellen, hat man $(-u_1 + k_0 + k_1 x_1 + k_2 x_1^2 + k_3 x_1^3)^2 + (-u_2 + k_0 + k_1 x_2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_2^3)^2 + \cdot \cdot \cdot \cdot + (-u_n + k_0 + k_1 x_n + k_2 x_n^2 + k_3 x_n^3)^2 =$ Minimum; der partielle Differentialquotient nach k_2 gleich Null gesetzt, gibt $(-u_1 + k_0 + k_1 x_1 + k_2 x_1^2 + k_3 x_1^3)\,x_1^2 + (-u_2 + k_0 + k_1 x_2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_2^3)\,x_2^2 + \cdot \cdot \cdot \cdot + (-u_n + k_0 + k_1 x_n + k_2 x_n^2 + k_3 x_n^3)\,x_n^2 = 0$ oder

$$[x^2]\,k_0 + [x^3]\,k_1 + [x^4]\,k_2 + [x^5]\,k_3 = [x^2\,u].$$

$$[1] = r,$$

$$[x] = h \sum_{1}^{r} n \;\;= h \cdot \frac{1}{2} r (r+1),$$

$$[x^2] = h^2 \sum_{1}^{r} n^2 = h^2 \cdot \frac{1}{6} r (r+1)(2r+1),$$

$$[x^3] = h^3 \sum_{1}^{r} n^3 = h^3 \cdot \frac{1}{4} r^2 (r+1)^2,$$

$$[x^4] = h^4 \sum_{1}^{r} n^4 = h^4 \cdot \frac{1}{30} r (r+1)(2r+1)(3r^2+3r-1),$$

$$[x^5] = h^5 \sum_{1}^{r} n^5 = h^5 \cdot \frac{1}{12} r^2 (r+1)^2 (2r^2+2r-1),$$

$$[x^6] = h^6 \sum_{1}^{r} n^6 = h^6 \cdot \frac{1}{42} r (r+1)(2r+1)(3r^4+6r^3-3r+1),$$

$$[x^7] = h^7 \sum_{1}^{r} n^7 = h^7 \cdot \frac{1}{24} r^2 (r+1)^2 (3r^4+6r^3-r^2-4r+2),$$

$$[x^8] = h^8 \sum_{1}^{r} n^8 = h^8 \cdot \left(\frac{1}{9} r^9 + \frac{1}{2} r^8 + \frac{2}{3} r^7 - \frac{7}{15} r^5 + \frac{2}{9} r^3 - \frac{1}{30} r\right),$$

$$[x^9] = h^9 \sum_{1}^{r} n^9 = h^9 \cdot \left(\frac{1}{10} r^{10} + \frac{1}{2} r^9 + \frac{3}{4} r^8 - \frac{7}{10} r^6 + \frac{1}{2} r^4 - \frac{3}{20} r^2\right),$$

$$[x^{10}] = h^{10} \sum_{1}^{r} n^{10} = h^{10} \cdot \left(\frac{1}{11} r^{11} + \frac{1}{2} r^{10} + \frac{5}{6} r^9 - r^7 + r^5 - \frac{1}{2} r^3 + \frac{5}{66} r\right);$$

diese werden für fast alle Fälle der Praxis ausreichen.

Zur Bequemlichkeit bei Lösung von Zahlenaufgaben folgen zwei Tabellen. Die erste Tabelle enthält die ersten neun Potenzen der ganzen Zahlen von 1 bis einschließlich 9; die zweite Tabelle hingegen enthält die Summe der ersten neun Potenzen der ganzen Zahlen von 1 bis einschließlich 9 und ist direkt aus der ersten Tabelle abgeleitet.

Tabelle der Werte n^m.

n	m							
	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2 187	6 561	19 683
4	16	64	256	1 024	4 096	16 384	65 536	262 144
5	25	125	625	3 125	15 625	78 125	390 625	1 953 125
6	36	216	1 296	7 776	46 656	279 936	1 679 616	10 077 696
7	49	343	2 401	16 807	117 649	823 543	5 764 801	40 353 607
8	64	512	4 096	32 768	262 144	2 097 152	16 777 216	134 217 728
9	81	729	6 561	59 049	531 441	4 782 969	43 046 721	387 420 489

Tabelle der Werte $\sum_1^r n^m$.

r	m = 1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	5	9	17	33	65	129	257	513
3	6	14	36	98	276	794	2 316	6818	20196
4	10	30	100	354	1 300	4 890	18 700	72354	282340
5	15	55	225	979	4 425	20 515	96 825	462979	2235465
6	21	91	441	2 275	12 201	67 171	376 761	2142595	12313161
7	28	140	784	4 676	29 008	184 820	1 200 304	7907396	52666768
8	36	204	1 296	8 772	61 776	446 964	3 297 456	24684612	186884496
9	45	285	2 025	15 333	120 825	978 405	8 080 425	67731333	574304985

Anmerkung. Sind l_1, l_2, ..., l_n die Beobachtungswerte der linearen Funktion $aX + bY + cZ + \cdots\cdots$ der m Unbekannten oder Elemente X, Y, Z, ..., wobei vorausgesetzt wird, daß zu jedem Beobachtungswerte ein anderes System der bekannten Koeffizienten a, b, c, ... gehört, so hat man nach Punkt 2 des V. Abschnittes im I. Bande zur Bestimmung derjenigen Werte der Unbekannten x, y, z u. s. w., für welche die Fehlerquadratsumme $[\lambda\lambda]$ ein Minimum wird, das nachstehende System der Normalgleichungen:

$$[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + \cdots\cdots = [al],$$
$$[ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + \cdots\cdots = [bl],$$
$$[ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z + \cdots\cdots = [cl],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Eigenschaften der Koeffizienten von x, y, z, ... sind:

a) Die von links oben nach rechts unten gehende Diagonalreihe enthält die Koeffizienten mit quadratischen Gliedern.

b) Geht man von einem Koeffizienten der Diagonalreihe in horizontaler Richtung nach rechts und in vertikaler Richtung nach abwärts, so sind die Koeffizientenreihen identisch oder mit anderen Worten: beiderseits der Diagonalreihe liegen gleiche Koeffizienten. Daraus folgt, daß man nur die Koeffizienten auf einer Seite der Diagonale zu rechnen braucht.

c) Die Anzahl zu rechnender Größen, um die Normalgleichungen aufstellen zu können, setzt sich zusammen:

α) aus m Koeffizienten der Diagonalreihe,

β) aus $\frac{m^2 - m}{2}$ Koeffizienten auf einer Seite der Diagonalreihe,

γ) aus m zweiten Seiten der Gleichungen.

Hiemit resultiert $\frac{1}{2}m(m+3)$ als Anzahl zu rechnender Größen, während bei mangelnder Symmetrie der Koeffizienten $m(m+1)$ Größen zu rechnen wären (m^2 Koeffizienten und m zweite Seiten der Gleichungen).

Für die Normalgleichungen 2) tritt zu diesen Eigenschaften noch eine hinzu: die Koeffizienten von k, in der von links unten nach rechts oben gerichteten Diagonalreihe und in den zu ihr parallelen Reihen sind unter einander gleich. Hiedurch erfährt die Anzahl der für die Aufstellung der Normalgleichungen zu rechnenden Größen bei großer Anzahl zu bestimmender Parameter eine weitere wesentliche Verminderung.

16. Näherungsweise Darstellung in der Ballistik vorkommender Funktionen einer Veränderlichen.

Die Ballistik bietet zahlreiche Fälle, wo eine Funktion einer Veränderlichen oder eine Funktion mehrerer Veränderlichen näherungsweise darzustellen ist. Hier soll nur der einfachste Fall der Funktion einer Veränderlichen besprochen werden.

Die Aufgabe, um deren Lösung es sich handelt, lautet:

Die Parameter k_0, k_1, k_2, k_3 u.s.w. der Gleichung

$$u = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + \cdots\cdots$$

sind derart zu bestimmen, daß die durch diese Gleichung repräsentierte Parabel eine gegebene Kurve $u = f(x)$ innerhalb festgesetzter Grenzen des Argumentes x möglichst deckt.

Wie bereits gesagt wurde, ergibt sich in der Ballistik häufig die Notwendigkeit, eine komplizierte Funktion innerhalb gegebener Grenzen des Argumentes näherungsweise durch eine einfacher konstruierte, die weitere Behandlung des Problems ermöglichende Funktion zu ersetzen. So wird es beispielsweise oft zweckmäßig sein, innerhalb gegebener Argumentengrenzen den Grad einer Gleichung herabzudrücken.

Die Aufgabe der Bestimmung des Näherungsausdruckes der Funktion kann nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt werden, indem man die Quadratsumme der Abweichungen zwischen angenähertem Funktionswert und gegebenem Funktionswert zu einem Minimum macht (siehe Punkt 15 des V. Abschnittes im I. Bande).

Die Substitution der einfachen Kurve für die kompliziertere Kurve hat in der Weise zu geschehen, daß beide Kurven sich möglichst decken; dieser Bedingung entsprechend hat die Bestimmung der ersteren Kurve zu geschehen.

Der hier angestrebte Zweck charakterisiert auch die bekannten Interpolationsformeln von Lagrange und Newton, welche in ihrer geometrischen Deutung aussagen, daß die durch die Interpolationsformel repräsentierte Kurve durch bestimmte Punkte (in endlicher Anzahl) einer gegebenen Kurve gehen soll, wonach die in der Interpolationsformel vorkommenden Parameter bestimmt werden können.

Hier erweitert man die Forderung, indem geradezu verlangt wird, daß alle Punkte der gegebenen Kurve $u = \varphi(x)$ durch die substituierte Kurve zur Deckung gebracht werden sollen.

Denkt man sich aus $u = \varphi(x)$ für n Abszissenwerte $x_1, x_2, \ldots,$ x_n die Ordinatenwerte $u_1, u_2, \ldots, u_n$ gerechnet, so müssen offenbar die Parameter $k_0, k_1, k_2, k_3, \ldots$ der Gleichung

$$1) \qquad u = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + \cdots\cdots$$

so bestimmt werden, daß ein System von n Gleichungen befriedigt wird, welches durch Substitution der Wertepaare $x_1, u_1; x_2, u_2; \ldots;$ x_n, u_n in 1) resultiert.

Hiefür findet man das System der Normalgleichungen (siehe Punkt 15 dieses Abschnittes):

$$2) \left\{ \begin{array}{l} [1]\,k_0 + [x]\,k_1 + [x^2]\,k_2 + [x^3]\,k_3 + \cdots\cdots = [u], \\ [x]\,k_0 + [x^2]\,k_1 + [x^3]\,k_2 + [x^4]\,k_3 + \cdots\cdots = [x u], \\ [x^2]\,k_0 + [x^3]\,k_1 + [x^4]\,k_2 + [x^5]\,k_3 + \cdots\cdots = [x^2 u], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Nimmt man anstatt diskreter Beobachtungswerte einander unendlich dicht folgende Werte der gegebenen Funktion im Bereiche x_1 bis x_n der Variablen, oder, was dasselbe bedeutet, erfolgt die Änderung von x sprungweise im Intervall dx, so wird die Summierung nach den Regeln der Integralrechnung bewirkt; hiezu hat man beide Seiten der Gleichungen 2) mit dem konstant zu denkenden Zuwachs dx des Argumentes x zu multiplizieren.

Unter Berücksichtigung der Substitutionsgleichungen

$$[x^m]\,dx = \int_{x_1}^{x_n} x^m\,dx \quad \text{und} \quad [x^m u]\,dx = \int_{x_1}^{x_n} x^m f(x)\,dx$$

übergeht das Gleichungssystem 2) in:

$$3)\quad \begin{cases} k_0\int_{x_1}^{x_n} dx + k_1\int_{x_1}^{x_n} x\,dx + k_2\int_{x_1}^{x_n} x^2 dx + \cdots = \int_{x_1}^{x_n} f(x)\,dx, \\ k_0\int_{x_1}^{x_n} x\,dx + k_1\int_{x_1}^{x_n} x^2 dx + k_2\int_{x_1}^{x_n} x^3 dx + \cdots = \int_{x_1}^{x_n} x f(x)\,dx, \\ k_0\int_{x_1}^{x_n} x^2 dx + k_1\int_{x_1}^{x_n} x^3 dx + k_2\int_{x_1}^{x_n} x^4 dx + \cdots = \int_{x_1}^{x_n} x^2 f(x)\,dx, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Beispiel. Die Parameter a und b der Gleichung $u = a + b\,x$ einer Geraden sind so zu bestimmen, daß dieselbe innerhalb des Bereiches von $x = 1$ bis $x = 3$ die Kurve $u = 2 + 3\,x^2$ möglichst deckt.

Die Gleichungen 3) liefern zur Bestimmung von a und b nachstehende zwei Gleichungen:

$$a\int_1^3 dx + b\int_1^3 x\,dx = \int_1^3 (2 + 3\,x^2)\,dx,$$
$$a\int_1^3 x\,dx + b\int_1^3 x^2\,dx = \int_1^3 x\,(2 + 3\,x^2)\,dx,$$

welche nach bewirkter Integration folgende Gestalt annehmen:

$$2\,a + 4\,b = 30,$$
$$4\,a + \frac{26}{3}\,b = 68;$$

hieraus findet man $a = -99$, $b = 57$ und hiemit $u = -99 + 57\,x$ als Gleichung der Geraden.

17. Analytische Lösung des ballistischen Problems, wenn die Reihe der Abgangswinkel gegeben ist.

Wie in der äußeren Ballistik gezeigt wird, haben sich bei Durchführung der ballistischen Rechnungen zwei wesentlich voneinander verschiedene Methoden ausgebildet, und zwar:

a) die Methode, nach welcher die Gleichungen der Ballistik auf Basis des Luftwiderstandsgesetzes entwickelt werden;

b) die Methode, welche von der Kenntnis des Luftwiderstandsgesetzes, das ist von der Kenntnis der die Bewegung des Geschosses regelnden Kräfte absieht, und anstatt des Luftwiderstandsgesetzes eine Reihe durch den Versuch er-

mittelter Bestimmungsstücke, deren Verlauf den Einfluß des Luftwiderstandes zum Ausdrucke bringt, als Basis für die ballistischen Rechnungen benützt.

Auf Grund der praktisch ermittelten Reihe der Abgangswinkel bei konstanter Anfangsgeschwindigkeit oder der reziproken Reihe der Anfangsgeschwindigkeiten bei konstantem Abgangswinkel werden die Bewegungselemente anderer Art berechnet und schließlich auch die Größe des Luftwiderstandes bestimmt.

Nachstehend wird die analytische Lösung des ballistischen Problems gezeigt, wenn an Stelle des Luftwiderstandsgesetzes die Reihe der Abgangswinkel gegeben ist, welche — bei konstanter Anfangsgeschwindigkeit — den verschiedenen horizontalen Schußweiten entsprechen. Hiebei wird angedeutet, wie die in den Gleichungen vorkommenden Parameter nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden können.

Die soeben präzisierte Aufgabe zerfällt in folgende Teile:

a) Aufstellung der Beziehung für die Reihe der Abgangswinkel φ beziehungsweise für die Reihe der Elevationswinkel ε,

b) Berechnung der Ordinaten (Aufstellung der Flugbahngleichung),

c) Berechnung des Tangentenwinkels ϑ (Winkel, welchen die positive Richtung der x-Achse mit der positiven Richtung der Tangente im Sinne der positiven Winkelzählung einschließt),

d) Berechnung der Geschwindigkeit v in einem beliebigen Bahnpunkte,

e) Berechnung der Flugzeit t bis zu einem beliebigen Bahnpunkte, endlich

f) Berechnung des Luftwiderstandes W.

a) Aufstellung der Beziehung für die Reihe der Abgangswinkel beziehungsweise für die Reihe der Elevationswinkel.

Die Formel für die Berechnung der horizontalen Schußweite x_0 im lufterfüllten Raume lautet:

$$1) \qquad x_0 (1 + F_0) = \frac{V^2}{g} \sin 2\varphi;$$

hierin bezeichnet φ den Abgangswinkel, V die Anfangsgeschwindigkeit, g die Beschleunigung der Schwere und $1 + F_0$ die modifizierende Funktion zur Berechnung der horizontalen Schußweite x_0. Aus 1) folgt

$$\sin 2\varphi = \frac{g}{V^2} x_0 (1 + F_0) = \frac{g}{V^2} x_0 + \frac{g}{V^2} x_0 F_0.$$

Stellt man F_0 durch eine unendliche Reihe dar, in welcher x_0 die Veränderliche ist, so ergibt sich für $\sin 2\varphi$ ein Ausdruck von der Form

2) $$\sin 2\varphi = k_1 x_0 + k_2 x_0^2 + k_3 x_0^3 + \cdots\cdots,$$

worin die Parameter k_1, k_2, k_3 u. s. w., welche von der Anfangsgeschwindigkeit V und vom sogenannten ballistischen Koeffizienten*) abhängen, auf Grund von Versuchsdaten zu bestimmen sind. Ist die Anfangsgeschwindigkeit bekannt, so ist $k_1 = \frac{g}{V^2}$. Da für $x_0 = 0$ auch $\varphi = 0$ sein muß, so darf die rechte Seite von 2) kein von x_0 unabhängiges Glied enthalten.

Denkt man sich x_0 unendlich klein, so können die Flugverhältnisse im lufterfüllten Raume gleich jenen im leeren Raume angenommen werden; da ferner für diesen Fall in 2) die zweiten und höheren Potenzen von x_0 vernachlässigt werden können, so folgt

3) $$\sin 2\varphi = k_1 x_0.$$

Weil für den leeren Raum $x_0 = \frac{V^2}{g} \sin 2\varphi$ ist, so findet man nach Einsetzung dieses Wertes in 3) wieder $k_1 = \frac{g}{V^2}$.

Die Parameter können auf Grund bekannter Wertepaare von φ und x_0 ermittelt werden. Liegen mehr Wertepaare als Parameter vor, so daß also letztere überbestimmt sind, so berechnet man dieselben nach der Methode der kleinsten Quadrate; angenähert werden in dem betrachteten Falle die Parameter bestimmt, wenn man so viele schicklich gewählte Wertepaare von x_0 und φ einführt, als die Zahl zu ermittelnder Parameter beträgt; sind z. B. drei Parameter zu bestimmen, so führe man den Abgangswinkel für eine kleine, eine mittlere und eine große Entfernung ein u. s. f.

Die so berechneten Parameter werden auch bei der Lösung der Aufgaben unter *b)* bis einschließlich *f)* benützt.

Von einem gewissen Gliede der rechten Seite der Gleichung 2) angefangen werden die Parameter verschwinden oder doch so klein ausfallen, daß man die folgenden Glieder vernachlässigen kann; der Exponent der höchsten Potenz von x_0 gibt dann den Grad der Reihe an. Ist z. B. 4 der höchste Exponent von x_0, so bilden die Werte von $\sin 2\varphi$ eine Reihe vom vierten Grade, d. h. es sind die vierten Differenzen dieser Reihe konstant und die höheren Differenzen gleich Null.

---

*) Siehe „Lehrbuch der äußeren Ballistik" von Wuich, Wien 1882, Seite 116.

Analog wie $\sin 2\varphi$ können $tg\,\varphi$, $\sin\varphi$ u. s. w. als Potenzreihen nach x_0 dargestellt werden.

Um den Erhebungswinkel (bei Geschützen) oder den Vibrationswinkel (bei Handfeuerwaffen) Δ einzuführen, setze man $\varphi = \varepsilon + \Delta$; bekanntlich ist erfahrungsgemäß der Winkel Δ von der Größe des Abgangswinkels praktisch unabhängig, sonach konstant. Es ist daher

$$\sin 2\varphi = \sin 2(\varepsilon + \Delta) = \sin 2\varepsilon \cos 2\Delta + \cos 2\varepsilon \sin 2\Delta.$$

Da Δ so klein ist, daß $\cos 2\Delta$ näherungsweise gleich 1 angenommen werden darf, so hat man

$$\sin 2\varphi = \sin 2\varepsilon + \cos 2\varepsilon \sin 2\Delta,$$

daraus

$$4)\quad \begin{cases} \sin 2\varepsilon = -\cos 2\varepsilon \sin 2\Delta + \sin 2\varphi = \\ \quad = -\cos 2\varepsilon \sin 2\Delta + k_1 x_0 + k_2 x_0^2 + k_3 x_0^3 + \cdots\cdots \end{cases}$$

Sind auch die Elevationswinkel sehr klein, so kann man sich erlauben, $\cos 2\varepsilon = 1$ zu setzen; hiedurch geht 4) in

$$\sin 2\varepsilon = -\sin 2\Delta + k_1 x_0 + k_2 x_0^2 + k_3 x_0^3 + \cdots\cdots$$

über.

b) Berechnung der Ordinaten (Aufstellung der Flugbahngleichung).

Als Ausgangspunkt für die Untersuchungen dient die Flugbahngleichung

$$5)\qquad y = x\,tg\,\varphi\left(1 - \frac{\sin 2\varphi_x}{\sin 2\varphi}\right) = x\,tg\,\varphi - \frac{x \sin 2\varphi_x}{2\cos^2\varphi},$$

worin φ den Abgangswinkel für die zu berechnende Bahn und φ_x den der Abszisse x entsprechenden Abgangswinkel bedeutet, soferne x als horizontale Schußweite aufgefaßt wird.

Die Gleichung 5) gilt für den leeren Raum unter allen Umständen und für den lufterfüllten Raum dann, wenn in der modifizierenden Funktion der Flugbahngleichung der Abgangswinkel φ nicht vorkommt, sonach bei flachen Bahnen unter allen Verhältnissen, bei steilen Bahnen jedoch nur dann, wenn die Bedingungen des Schießens — wie beim Schießen mit der oberen Winkelgruppe auf den kleinen Distanzen — derart sind, daß die Bewegungsverhältnisse des lufterfüllten Raumes von jenen des leeren Raumes wenig abweichen.

Die Formel 5) wird in nachstehender Weise abgeleitet: die horizontale Schußweite x_0 im leeren Raume ist gegeben durch $x_0 = \frac{V^2}{g}\sin 2\varphi$; demnach muß zwischen φ_x und x die Beziehung be-

stehen $x = \frac{V^2}{g} \sin 2\,\varphi_x$. Aus diesen für x und x_0 gefundenen Ausdrücken folgt $\frac{x}{x_0} = \frac{\sin 2\,\varphi_x}{\sin 2\,\varphi}$. Setzt man diesen Wert für $\frac{x}{x_0}$ in die bekannte Gleichung der Parabel $y = x\,tg\,\varphi\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)$ ein, so gelangt man zur Formel 5).

Die Formel zur analytischen Berechnung der Ordinaten ergibt sich durch Verbindung der Gleichungen 5) und 2); man erhält, wenn man mit dem Gliede $k_4 x^4$ abbricht,

$$6)\qquad y = x\,tg\,\varphi - \frac{x}{2\cos^2\varphi}(k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + k_4 x^4),$$

oder wenn der durch die Formel $k_1 = \frac{g}{V^2}$ bestimmte Wert von k_1 berücksichtigt wird,

$$7)\qquad y = x\,tg\,\varphi - \frac{g x^2}{2 V^2 \cos^2\varphi}\left(1 + \frac{k_2}{k_1} x + \frac{k_3}{k_1} x^2 + \frac{k_4}{k_1} x^3\right).$$

Ist die Gleichung der Flugbahn bekannt, so können die Gleichungen zur Ermittlung des Tangentenwinkels, der Geschwindigkeit und der Flugzeit durch einfache Operationen gefunden werden.

Sei allgemein $y = f(x)$ die Gleichung der Flugbahn, so ist nach den Lehren der Mathematik beziehungsweise der Ballistik

$$8)\qquad tg\,\vartheta = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

die Gleichung zur Berechnung des Tangentenwinkels,

$$9)\qquad \frac{1}{(v\cos\vartheta)^2} = \frac{1}{v_x^2} = -\frac{1}{g}\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{g}\frac{d\,tg\,\vartheta}{dx}$$

die Gleichung zur Berechnung der Geschwindigkeit und

$$10)\qquad t = \int_0^x \frac{dx}{v_x}$$

die Gleichung zur Berechnung der Flugzeit.

c) Berechnung des Tangentenwinkels.

Die Formel für die analytische Berechnung von ϑ ergibt sich aus 7) mit

$$11)\qquad \frac{dy}{dx} = tg\,\vartheta = tg\,\varphi - \frac{g x}{V^2\cos^2\varphi}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{k_2}{k_1} x + \frac{4}{2}\frac{k_3}{k_1} x^2 + \frac{5}{2}\frac{k_4}{k_1} x^3\right).$$

Hieraus folgt für den absoluten Wert des Einfallwinkels

12) $$tg\,\Theta = \frac{g\,x_0}{V^2 \cos^2\varphi}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{k_2}{k_1}x_0 + \frac{4}{2}\frac{k_3}{k_1}x_0^2 + \frac{5}{2}\frac{k_4}{k_1}x_0^3\right) - tg\,\varphi.$$

Setzt man in 11) $\vartheta = 0$, so kann aus der so entstandenen Gleichung die Abszisse x_s des Scheitels berechnet werden. Durch Einsetzen von x_s in die Flugbahngleichung resultiert die Scheitelordinate y_s.

d) Berechnung der Geschwindigkeit in einem beliebigen Bahnpunkte.

Die Geschwindigkeit v in jedem beliebigen Bahnpunkte wird, anschließend an die Formel 11) zur Berechnung des Tangentenwinkels nach Formel 9), d. i. mittels $\frac{1}{v_x^2} = -\frac{1}{g}\frac{d\,tg\,\vartheta}{d\,x}$ bestimmt. Man findet

$$\frac{1}{v_x^2} = \frac{1}{V_x^2}\left(1 + 3\frac{k_2}{k_1}x + 6\frac{k_3}{k_1}x^2 + 10\frac{k_4}{k_1}x^3\right).$$

Diese Formel gibt nur die horizontale Projektion v_x der Geschwindigkeit. Da aber nach früherem der Tangentenwinkel ϑ gefunden werden kann, so ist v durch

$$v = \frac{v_x}{\cos\vartheta}$$

bestimmt. Man hat also

13) $$v = \frac{V_x}{\cos\vartheta\sqrt{1 + 3\frac{k_2}{k_1}x + 6\frac{k_3}{k_1}x^2 + 10\frac{k_4}{k_1}x^3}}.$$

Die Endgeschwindigkeit ergibt sich aus 13), wenn man hierin $x = x_0$ (horizontale Schußweite) und $\vartheta = \Theta$ (Einfallwinkel) substituiert.

Um die Scheitelgeschwindigkeit zu erhalten, ist $x = x_s$ und $\vartheta = 0$ zu setzen.

e) Berechnung der Flugzeit.

Kennt man die horizontalen Projektionen der Geschwindigkeiten einer Bahn, so können die Flugzeiten mittels der Formel 10), dies ist nach

14) $$t = \int_0^x \frac{d\,x}{v_x} = \frac{1}{V_x}\int_0^x d\,x\sqrt{1 + 3\frac{k_2}{k_1}x + 6\frac{k_3}{k_1}x^2 + 10\frac{k_4}{k_1}x^3}$$

berechnet werden. Die Integration in geschlossener Form gelingt nur dann, wenn die Funktion unter dem Wurzelzeichen höchstens vom 2. Grade ist.

f) Berechnung des Luftwiderstandes.

Da durch den gesetzmäßigen Verlauf der Reihe der Abgangswinkel der Einfluß des Luftwiderstandes zum Ausdruck gebracht wird, so muß es auch möglich sein, die Größe des Luftwiderstandes in jedem beliebigen Bahnpunkte zu finden.

Wird die Kenntnis der Geschwindigkeiten und der Tangentenwinkel vorausgesetzt, so kann die Verzögerung $\mathfrak{V}$ durch den Luftwiderstand mittels der aus der Ballistik bekannten Gleichung

$$\frac{d v_x}{d t} = - \mathfrak{V} \cos \vartheta$$

bestimmt werden; weil aber

$$\frac{d v_x}{d t} = \frac{d v_x}{d x} \cdot \frac{dx}{dt} = v_x \frac{d v_x}{d x},$$

so ist auch

$$v_x \frac{d v_x}{d x} = - \mathfrak{V} \cos \vartheta;$$

hieraus folgt

15) $$\mathfrak{V} = - \frac{1}{\cos \vartheta} \cdot v_x \frac{d v_x}{d x}.$$

Aus der Verzögerung $\mathfrak{V}$ ergibt sich der Luftwiderstand W mit

16) $$W = \frac{P}{g} \mathfrak{V},$$

worin P das Geschoßgewicht bedeutet.

18. Bestimmung des Erhebungswinkels, des ballistischen Koeffizienten und der Anfangsgeschwindigkeit auf Grund von Punktbedingungen.

Der Erhebungswinkel sei mit Δ, der ballistische Koeffizient, welcher den gesamten Einfluß der Geschoßkonstruktion zum Ausdrucke bringt, mit m und die Anfangsgeschwindigkeit mit V bezeichnet. Zur Unterscheidung der ballistischen Koeffizienten bei den verschiedenen eingliedrigen Luftwiderstandsgesetzen wird dem Buchstaben m die charakteristische Ziffer als Weiser beigefügt. Man bezeichnet demnach den ballistischen Koeffizienten beim quadratischen, kubischen, biquadratischen u. s. w. Luftwiderstandsgesetze beziehungsweise mit m_2, m_3, m_4 u. s. w.

Den Ausgangspunkt für die folgenden Untersuchungen bildet die Flugbahngleichung

1) $$y = x\,tg\,\varphi - \frac{g\,x^2}{2\,V^2\cos^2\varphi}(1+F);$$

hierin bedeutet $1+F$ die modifizierende Funktion der Gleichung zur Berechnung der Ordinaten. Dividiert man die Gleichung 1) durch x und setzt $\frac{y}{x} = tg\,n$, so ergibt sich

2) $$tg\,n = tg\,\varphi - \frac{g\,x}{2\,V^2\cos^2\varphi}(1+F).$$

Hieraus folgt

$$tg\,\varphi - tg\,n = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} - \frac{\sin n}{\cos n} = \frac{\sin(\varphi - n)}{\cos\varphi\cos n} = \frac{g\,x}{2\,V^2\cos^2\varphi}(1+F);$$

3) $$\sin(\varphi - n)\cos\varphi = \frac{g\,x}{2\,V^2}(1+F)\cos n.$$

Bei Anwendung der Formel $\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$ findet man $\sin(\varphi-n)\cos\varphi = \frac{\sin(2\,\varphi - n) - \sin n}{2}$; hiemit übergeht 3) in

4) $$\sin(2\,\varphi - n) = \frac{g\,x}{V^2}(1+F)\cos n + \sin n.$$

Ist die Flugbahn der Bedingung unterworfen, daß sie durch den Punkt L_i geht, so muß die Gleichung 4) der Flugbahn durch die Koordinaten x_i, n_i des Punktes L_i befriedigt werden; es muß also stattfinden

5) $$\sin(2\,\varphi_i - n_i) = \frac{g\,x_i}{V^2}(1+F_i)\cos n_i + \sin n_i.$$

Um den Erhebungswinkel Δ, dessen Größe erfahrungsgemäß von der Größe des Abgangswinkels φ praktisch unabhängig ist, in die Gleichung 5) einzuführen, setze man

$$\varphi_i = \varepsilon_i + \Delta,$$

worin ε_i den Elevationswinkel bezeichnet; es ergibt sich somit:

6) $$\sin\{(2\,\varepsilon_i - n_i) + 2\,\Delta\} = \frac{g\,x_i}{V^2}(1+F_i)\cos n_i + \sin n_i.$$

Für das quadratische Luftwiderstandsgesetz, welches hier als Grundlage genommen wird, ist

7) $$1 + F_i = \frac{e^{\xi_i} - \xi_i - 1}{\frac{1}{2}\xi_i^2}, \quad \text{wobei} \quad \xi_i = \alpha\,m_2\,\sigma\,x_i;$$

hierin bedeutet α den sogenannten Didionschen Mittelwert und σ das spezifische Gewicht der Luft zunächst der Mündung.

Durch Einsetzung dieses Wertes für $1+F_i$ in 6) würde die letztere Formel für die vorzunehmenden Bestimmungen sehr unbequem sein. Man muß also trachten, den Ausdruck für $1+F_i$ zu vereinfachen. Zu diesem entwickle man e^{ξ_i} in eine unendliche Reihe; hiedurch entsteht

$$e^{\xi_i}=1+\frac{\xi_i}{1!}+\frac{\xi_i^2}{2!}+\frac{\xi_i^3}{3!}+\ldots\ldots;$$

wird diese Reihe mit dem vierten Gliede abgebrochen, so erhält man für $1+F_i$ einen linearen Ausdruck von ξ_i, nämlich

$$8)\quad 1+F_i=\frac{1+\frac{\xi_i}{1!}+\frac{\xi_i^2}{2!}+\frac{\xi_i^3}{3!}-\xi_i-1}{\frac{1}{2}\xi_i^2}=1+\frac{1}{3}\xi_i=1+\frac{1}{3}\alpha\, m_2\, \sigma\, x_i.$$

Nach Einsetzen dieses Wertes in 6) folgt

$$9)\quad \sin\left\{(2\,\varepsilon_i-n_i)+2\,\Delta\right\}=\frac{g\,x_i}{V^2}\left(1+\frac{1}{3}\alpha\, m_2\,\sigma\, x_i\right)\cos n_i+\sin n_i.$$

Beim biquadratischen Gesetze hat die modifizierende Funktion der Gleichung zur Berechnung der Ordinaten die Form $1+F_i=1+\frac{1}{3}\xi_i$, wobei jedoch ξ_i den Wert $\xi_i=\alpha^3\cos^2\varphi\, m_4\, V^2\,\sigma\, x$ hat. Hiemit geht die Gleichung 6) in

$$10)\quad \sin\left\{(2\,\varepsilon_i-n_i)+2\,\Delta\right\}=\frac{g\,x_i}{V^2}\left(1+\frac{1}{3}\alpha^3\cos^2\varphi\, m_4\, V^2\,\sigma\, x_i\right)\cos n_i+\sin n_i$$

über. Dies sei hier nur nebenbei bemerkt.

Wird $\sin\left\{(2\,\varepsilon_i-n_i)+2\,\Delta\right\}$ entwickelt und erlaubt man sich mit Rücksicht auf die Kleinheit von Δ annähernd $\cos 2\,\Delta=1$ zu setzen, so resultiert

$$\sin\left\{(2\,\varepsilon_i-n_i)+2\,\Delta\right\}=\sin(2\,\varepsilon_i-n_i)+\cos(2\,\varepsilon_i-n_i)\sin 2\,\Delta.$$

Wird dieser Wert in 9) eingesetzt und werden dann beide Seiten der Gleichung mit $\frac{V^2}{g\,x_i}$ multipliziert, so folgt

$$\frac{V^2}{g\,x_i}\sin(2\,\varepsilon_i-n_i)+\frac{V^2}{g\,x_i}\cos(2\,\varepsilon_i-n_i)\sin 2\,\Delta-$$
$$-\frac{V^2}{g\,x_i}\sin n_i-\frac{1}{3}\alpha\,\sigma\, x_i\cos n_i\,.\,m_2=\cos n_i,$$

oder anders geordnet:

$$11)\quad \left\{\begin{aligned}&-\frac{1}{3}\alpha\,\sigma\, x_i\cos n_i\,.\,m_2+\frac{1}{g\,x_i}\left\{\sin(2\,\varepsilon_i-n_i)-\sin n_i\right\}V^2+\\ &\qquad+\frac{1}{g\,x_i}\cos(2\,\varepsilon_i-n_i)\,V^2\sin 2\,\Delta=\cos n_i.\end{aligned}\right.$$

In dieser Gleichung sind m_2, V^2 und $V^2 \sin 2\Delta$ die Unbekannten; die Koeffizienten derselben sowie die Größe $\cos n_i$ auf der rechten Seite der Gleichung sind bekannt. Setzt man zur Abkürzung

$$12) \quad \begin{cases} -\frac{1}{3}\alpha\sigma x_i \cos n_i = a_i, & \frac{1}{g x_i}\{\sin(2\varepsilon_i - n_i) - \sin n_i\} = b_i, \\ \frac{1}{g x_i}\cos(2\varepsilon_i - n_i) = c_i, & \cos n_i = d_i, \end{cases}$$

so nimmt 11) die Form an

$$13) \quad a_i m_i + b_i V^2 + c_i V^2 \sin 2\Delta = d_i.$$

Sind nur drei voneinander unabhängige Wertsysteme, also drei Punkte L_1, L_2, L_3 (d. h. $i = 1, 2, 3$) gegeben, oder drei Distanzen der Rechnung zu Grunde gelegt, so resultiert ein zur Bestimmung der Werte der Unbekannten gerade ausreichendes System. Diese Werte wären aber nicht die wahren, denn die Bestimmungsstücke der Punkte L_1, L_2, L_3 sind mit unvermeidlichen Fehlern behaftet. In Wirklichkeit wird man sich also nicht mit nur soviel Distanzen zufrieden stellen, als Unbekannte vorhanden sind, sondern wird mehr als drei Distanzen wählen und auf Grund dieses Beobachtungsmateriales die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten nach der Methode der kleinsten Quadrate ermitteln.

Dividiert man die Unbekannte $V^2 \sin 2\Delta$ durch V^2, so erhält man auch $\sin 2\Delta$ und daraus Δ, womit die eingangs gestellte Aufgabe auch gelöst erscheint.

Die Anfangsgeschwindigkeit V und der Erhebungswinkel Δ sind zumeist schon bekannt, weil durch das Experiment ermittelt. Die Bestimmung von V und Δ nach dieser Methode erfolgt nur zur Prüfung der Rechnung, welche die durch das Experiment gefundenen Werte geben muß.

Wenn V und Δ ziemlich mit den im Versuchswege gefundenen Werten stimmen, so ist das ein Kriterium für die Verläßlichkeit von m.

Es muß besonders bemerkt werden, daß die Elevationswinkel für möglichst nahe beieinander liegende Entfernungen eingeführt werden müssen, um den Fehler in der Bestimmung des als unveränderlich angenommenen ballistischen Koeffizienten tunlichst zu verkleinern.

Ist $n_i = 0$, d. h. liegt der Punkt L_i im Mündungshorizonte, so geht die Gleichung 11) über in

$$14) \quad -\frac{1}{3}\alpha\sigma x_{i0} m_2 + \frac{1}{g x_{i0}} \sin 2\varepsilon_i V^2 + \frac{1}{g x_{i0}} \cos 2\varepsilon_i V^2 \sin 2\Delta = 1.$$

Bezüglich des in den vorhergegangenen Gleichungen auftretenden α-Wertes sei bemerkt, daß derselbe bei kleinen Elevationswinkeln (Bahnschwenken zulässig) gleich 1 gesetzt werden darf; in allen übrigen Fällen ist α dem Elevationswinkel ε entsprechend näherungsweise zu ermitteln.

Bei kleinen Elevationswinkeln (flachen Bahnen) folgt also aus Gleichung 11)

$$15)\quad \left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{3}\sigma x_i \cos n_i m_2 + \frac{1}{g x_i}\left\{\sin(2\varepsilon_i - n_i) - \sin n_i\right\} V^2 + \\ & \qquad + \frac{1}{g x_i}\cos(2\varepsilon_i - n_i) V^2 \sin 2\Delta = \cos n_i . \end{aligned} \right.$$

Ist $n_i = 0$, so geht 15) über in

$$-\frac{1}{3}\sigma x_{i0} m_2 + \frac{1}{g x_{i0}} \sin 2\varepsilon_i V^2 + \frac{1}{g x_{i0}} \cos 2\varepsilon_i V^2 \sin 2\Delta = 1.$$

Wenn überdies ε_i sehr klein ist, so darf $\cos 2\varepsilon_i$ näherungsweise gleich 1 gesetzt werden und man erhält

$$-\frac{1}{3}\sigma x_{i0} m_2 + \frac{1}{g x_{i0}} \sin 2\varepsilon_i V^2 + \frac{1}{g x_{i0}} V^2 \sin 2\Delta = 1.$$

Es ist klar, daß bei der Bestimmung von Δ für Mörser und Haubitzen weder α noch $\cos 2\varepsilon_i$ der Einheit gleich gesetzt werden darf.

Ebenso ist das Verfahren, wenn man das biquadratische Luftwiderstandsgesetz zu Grunde legt.

Wenn beim quadratischen Luftwiderstandsgesetze

$$1 + F = \frac{e^{\xi} - \xi - 1}{\frac{1}{2}\xi^2} = 1 + \frac{1}{3}\xi$$

gesetzt und der Übergang vom quadratischen zum biquadratischen Gesetze dadurch bewerkstelligt wird, daß man statt α den Wert $\alpha^3 \cos^2\varphi$ und statt m den Ausdruck $m V^2$ einführt, so erhält man dann mit Bezug auf die Gleichung 11) wieder lineare Gleichungen, aus welchen $m V^2$, V^2 und $V^2 \sin 2\Delta$ zu bestimmen sind (beim quadratischen Luftwiderstandsgesetze waren m, V^2 und $V^2 \sin 2\Delta$ die Unbekannten).

D. Interpolationsformeln abgeleitet auf Grund der Methode der kleinsten Quadrate.

19. Allgemeine Bemerkungen.

Um das Wesen der Aufgabe, um deren Lösung es sich in diesem Subabschnitte handelt, gründlich zu erfassen, sollen einige Resul-

tate der vorangegangenen Untersuchungen dieses Abschnittes kurz wiederholt werden.

Im Gebiete der Schießtheorie begegnet man häufig der Tatsache, daß der Zusammenhang zwischen dem Argumente x und dem Funktionswerte u nur zahlenmäßig, d. i. durch eine Tabelle gegeben ist, welche die am Versuchswege erhaltenen Resultate verzeichnet. So kennt man beispielsweise durch den Versuch die horizontalen Schußweiten x_0, welche unter gegebenen Verhältnissen für bestimmt angenommene Elevationswinkel ε bei konstanter Anfangsgeschwindigkeit erhalten werden, ohne den analytischen Zusammenhang zwischen ε und x_0 zu kennen.

Mittels der Interpolationsformeln kann man den wahrscheinlichsten Wert der Funktion für beliebige Werte der unabhängigen Variabeln angeben. Diese Interpolationsformeln ermöglichen also auch solche Funktionswerte zu bestimmen, die anderen als den beim Versuch in Betracht gekommenen Argumentenwerten entsprechen. Diese Argumentenwerte dürfen aber die Grenzen jener Argumentenwerte, welche beim Versuche vorkamen, nicht überschreiten; hiedurch wird das Gebiet einer Interpolationsformel genau abgegrenzt.

Wenn sich der Funktionswert u bei stetiger Änderung des Argumentes x auch stetig ändert, kann man den Zusammenhang zwischen x und u empirisch durch die Potenzreihe

$$1) \qquad u = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots\cdots$$

darstellen, wobei die Koeffizienten $k_0, k_1, k_2, \ldots\ldots.$ aus den beobachteten Funktionswerten $u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots., u_n$, welche den Argumentenwerten $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots., x_n$ zugeordnet sind, nach den bisherigen Untersuchungen auf Grund der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden. Hiezu ist erforderlich, daß die Anzahl der Beobachtungen größer ist als die Anzahl der unbekannten Parameter $k_0, k_1, k_2, \ldots.$

Graphisch gedeutet, wird die den Zusammenhang zwischen x und u darstellende Kurve durch eine Gerade beziehungsweise durch eine Parabel 2-ter, 3-ter, ... Ordnung herbeigeführt, je nachdem man sich auf die ersten 2 beziehungsweise ersten 3, 4 u. s. w. Glieder der Reihe auf der rechten Seite in der Formel 1) beschränkt.

In der Schießtheorie kommen fast ausschließlich nur folgende zwei Formen der als Interpolationsformeln verwendeten Potenzreihen vor, nämlich:

$$2) \qquad u = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + \cdots\cdots$$

und

3) $u = k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + \cdots\cdots = x(k_1 + k_2 x + k_3 x^2 + \cdots\cdots)$;

hieraus ist ersichtlich, daß, wenn die Interpolationsformel in der allgemeinen Form

4) $u = f(x)(k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + k_4 x^4 + \cdots\cdots)$

angenommen wird, die Resultate den für die Schießtheorie nötigen Grad der Allgemeinheit haben werden; hiebei bedeutet $f(x)$ eine gegebene Funktion der unabhängigen Veränderlichen x.

Dies vorausgesetzt, soll nun die allgemeine Charakterisierung derjenigen Interpolationsformeln erfolgen, welche in den nachstehenden Punkten abgeleitet werden.

Wenn die wahrscheinlichsten Werte der Parameter k_0, k_1, k_2 u. s. w. nach der Methode der kleinsten Quadrate auf Grund der bisherigen Untersuchungen bestimmt werden, ist es nötig, stets das ganze Gleichungssystem von neuem zu berechnen, wenn man eine neue Annahme bezüglich der Anzahl der Parameter k_0, k_1, k_2 u. s. w. oder, was dasselbe ist, bezüglich des erlangten Grades der Genauigkeit des erhaltenen Resultates macht. Dies ist umso beschwerlicher, als man eine solche Rechnung meist einigemal wiederholen muß, ehe man zu einem Ausdrucke gelangt, welcher die gesuchte Funktion mit der verlangten Genauigkeit darstellt; denn es ist schwierig, von vornherein anzugeben, wieviel Parameter hiezu erforderlich sind.

Der russische Mathematiker Tchebycheff hat nun Interpolationsformeln angegeben, nach welchen Polynome — nach steigenden Potenzen von x geordnet und alle diese Potenzen von der nullten angefangen enthaltend — mit wahrscheinlichsten Parameterwerten erhalten werden können. Der große Vorteil dieser Interpolationsformeln besteht darin, daß es nicht notwendig ist, die schon erhaltenen Koeffizienten nochmals zu berechnen, falls zur Erlangung des geforderten Genauigkeitsgrades weitere Potenzen von x zu den bisher schon berechneten hinzugenommen werden müssen. Außerdem rühren von Tchebycheff Formeln her, welche gestatten, die Summe der Fehlerquadrate zu berechnen, mit welchen das Polynom für die Funktion u behaftet ist, wenn man sich auf 1, 2, 3 u. s. w. Glieder beschränkt. Man weiß also auch stets aus der Größe des mittleren Fehlers, ob zur Erreichung eines bestimmten Genauigkeitsgrades noch weitere Potenzen von x hinzugenommen werden müssen.

Die erwähnten Formeln wurden von Tchebycheff auf Grund der Eigenschaften der Kettenbrüche abgeleitet. Später gab der fran-

zösische Ballistiker E. Jouffret eine bequemere Ableitung dieser Formeln, indem er die Normalgleichungen mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten auflöste. Nachstehend wird unverändert und fast wörtlich der Entwicklungsvorgang von Jouffret gegeben. Siehe das Werk: „Sur l'établissement et l'usage des tables de tir" par E. Jouffret, Paris 1874, Seite 21 bis einschließlich Seite 36.

20. Aufstellung der Normalgleichungen.

Für die nachfolgenden Untersuchungen wird die Interpolationsformel in der Form

$$y = f(x)(k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots\cdots)$$

angenommen, wobei $f(x)$ irgend eine gegebene Funktion der unabhängigen Veränderlichen x bedeuten möge.

Nimmt man von dem Polynom innerhalb der Klammern die ersten $p+1$ Glieder, so kann man schreiben:

$$1)\qquad y_p = f(x)(k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots\cdots + k_p x^p).$$

Durch n sei die Anzahl der Beobachtungen ausgedrückt und $n > p+1$ angenommen; x_i sei der Wert der unabhängigen Veränderlichen, welcher der i-ten Beobachtung entspricht, y_i der entsprechende Wert der Funktion y; das Gewicht der i-ten Beobachtung sei durch g_i bezeichnet (sind jedoch alle Beobachtungen von gleichem Gewichte, dann ist $g_i = 1$); mit u_i sei der Wert der Funktion $f(x)$ für $x = x_i$ dargestellt.

Bedeutet δ_i den Fehler, der begangen wird, wenn man zur Darstellung der Beziehung zwischen der i-ten Beobachtung y_i und der Größe x_i die Gleichung 1) benützt, so ist

$$2)\qquad \delta_i = u_i(k_0 + k_1 x_i + k_2 x_i^2 + \cdots\cdots + k_p x_i^p) - y_i.$$

Die unbekannten Parameter $k_0, k_1, k_2, \ldots\ldots, k_p$ sollen derart bestimmt werden, daß die Summe $[g_i \delta_i \delta_i]$ ein Minimum werde. Die ersten partiellen Differentialquotienten dieser Summe nach den Unbekannten müssen sonach gleich Null werden. Bezeichnet k_μ irgend einen der unbekannten Parameter, so ist

$$\frac{\partial \delta_i}{\partial k_\mu} = u_i x_i^\mu \quad \text{und} \quad \frac{\partial (g_i \delta_i \delta_i)}{\partial k_\mu} = \frac{\partial (g_i \delta_i \delta_i)}{\partial \delta_i} \frac{\partial \delta_i}{\partial k_\mu} = 2 g_i u_i x_i^\mu \delta_i;$$

demnach muß stattfinden

$$\frac{\partial [g_i \delta_i \delta_i]}{\partial k_\mu} = 2 [g_i u_i x_i^\mu \delta_i] = 0$$

oder, wenn durch 2 abgekürzt wird,

3) $$[g_i u_i x_i^{\mu} \delta_i] = 0.$$

Führt man hierin für δ_i den Wert aus 2) ein, so ergibt sich

4) $$k_0 [g_i u_i^2 x_i^{\mu}] + k_1 [g_i u_i^2 x_i^{\mu+1}] + \cdots\cdots + k_p [g_i u_i^2 x_i^{\mu+p}] = [g_i u_i x_i^{\mu} y_i].$$

Setzt man zur Abkürzung

5) $$\begin{cases} [g_i u_i^2 x_i^{\mu}] = \varphi(\mu), \\ [g_i u_i x_i^{\mu} y_i] = \psi(\mu), \end{cases}$$

so kann die Gleichung 4) in der Form

6) $$\varphi(\mu) k_0 + \varphi(\mu+1) k_1 + \varphi(\mu+2) k_2 + \cdots\cdots + \varphi(\mu+p) k_p = \psi(\mu)$$

geschrieben werden.

Die Gleichung 6) ist die gemeinsame Type aller $p+1$ Normalgleichungen, welche aus 6) dadurch erhalten werden, daß sukzessive für μ die Werte 0, 1, 2, 3, ..., p gesetzt werden. Man findet auf diese Weise:

7) $$\begin{cases} \varphi(0) k_0 + \varphi(1) k_1 + \varphi(2) k_2 + \cdots\cdots + \varphi(p) k_p = \psi(0), \\ \varphi(1) k_0 + \varphi(2) k_1 + \varphi(3) k_2 + \cdots\cdots + \varphi(p+1) k_p = \psi(1), \\ \varphi(2) k_0 + \varphi(3) k_1 + \varphi(4) k_2 + \cdots\cdots + \varphi(p+2) k_p = \psi(2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi(p) k_0 + \varphi(p+1) k_1 + \varphi(p+2) k_2 + \cdots\cdots + \varphi(2p) k_p = \psi(p). \end{cases}$$

21. Auflösung der Normalgleichungen nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten.

a) Bestimmung der Parameter *k*.

Zur Auflösung der Normalgleichungen soll die sogenannte Methode der unbestimmten Koeffizienten angewendet werden. Zu diesem Zwecke addiere man die Normalgleichungen, nachdem man dieselben der Reihe nach das erste Mal mit 1, 0, 0, ..., das zweite Mal mit α_1, 1, 0, 0, ..., das dritte Mal mit α_2, β_2, 1, 0, 0, ..., das vierte Mal mit α_3, β_3, γ_3, 1, 0, 0, ... u. s. w. multipliziert hat.

Zur Abkürzung führe man die nachfolgenden Bezeichnungen ein; in diesen bedeutet χ die eine oder die andere der zwei Funktionen φ, ψ und μ irgend eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, ..., p:

8) $$\begin{cases} \chi_1(\mu) = \chi(\mu)\alpha_1 + \chi(\mu+1), \\ \chi_2(\mu) = \chi(\mu)\alpha_2 + \chi(\mu+1)\beta_2 + \chi(\mu+2), \\ \chi_3(\mu) = \chi(\mu)\alpha_3 + \chi(\mu+1)\beta_3 + \chi(\mu+2)\gamma_3 + \chi(\mu+3), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Mit Hilfe der Bezeichnungen*) 8) ergeben die oben vorgeschriebenen Rechnungsoperationen aus den Normalgleichungen 7) andere, in welchen die noch vorläufig willkürlichen Konstanten α_1; α_2, β_2; α_3, β_3, γ_3; ..... vorkommen. Aus letzterem Grunde kann man einige der Koeffizienten von k_0, k_1, k_2, ... der neuen Gleichungen gleich Null setzen, wodurch sich dann Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der Konstanten α, β, γ, ... ergeben. Die gleich Null zu setzenden Koeffizienten sollen derart gewählt werden, daß bei der Addition der mit den oben angegebenen Faktoren erweiterten Normalgleichungen 7) das folgende Gleichungssystem resultiert:

$$9)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(0)k_0 + \varphi(1)k_1 + \varphi(2)k_2 + \cdots\cdots + \varphi(p)k_p &= \psi(0), \\ \varphi_1(1)k_1 + \varphi_1(2)k_2 + \cdots\cdots + \varphi_1(p)k_p &= \psi_1(0), \\ \varphi_2(2)k_2 + \cdots\cdots + \varphi_2(p)k_p &= \psi_2(0), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \varphi_p(p)k_p &= \psi_p(0). \end{aligned}\right.$$

Hienach wurden folgende Bedingungsgleichungen eingeführt:

$$10)\quad \varphi_1(0) = \varphi(0)\alpha_1 + \varphi(1) = 0,$$

eine Gleichung, die sich aus $\varphi_1(\mu) = 0$ für $\mu = 0$ ergibt;

$$11)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi_2(0) &= \varphi(0)\alpha_2 + \varphi(1)\beta_2 + \varphi(2) = 0, \\ \varphi_2(1) &= \varphi(1)\alpha_2 + \varphi(2)\beta_2 + \varphi(3) = 0; \end{aligned}\right.$$

zwei Gleichungen, welche sich aus $\varphi_2(\mu) = 0$ für $\mu = 0$ und $\mu = 1$ ergeben;

$$12)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi_3(0) &= \varphi(0)\alpha_3 + \varphi(1)\beta_3 + \varphi(2)\gamma_3 + \varphi(3) = 0, \\ \varphi_3(1) &= \varphi(1)\alpha_3 + \varphi(2)\beta_3 + \varphi(3)\gamma_3 + \varphi(4) = 0, \\ \varphi_3(2) &= \varphi(2)\alpha_3 + \varphi(3)\beta_3 + \varphi(4)\gamma_3 + \varphi(5) = 0; \end{aligned}\right.$$

drei Gleichungen, welche aus $\varphi_3(\mu) = 0$ für $\mu = 0$, $\mu = 1$ und $\mu = 2$ erhalten werden.

Auf diese Art fährt man fort. Um sonach die $(h+1)$-te der Gleichungen 9) zu erhalten $(h < p)$, ist es notwendig, die Koeffizienten der h ersten unbekannten Parameter k_0, k_1, k_2, ..., k_{h-1} gleich Null zu setzen. Die Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der h Konstanten α_h, β_h, γ_h, ... folgen daher aus

$$13)\quad \varphi_h(\mu) = 0 \quad \text{für} \quad \mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ h-1.$$

---

*) In den zusammenhängenden Punkten 20 bis einschließlich 25 erfolgt die Numerierung der Gleichungen durchlaufend.

Um also die noch unbestimmten Konstanten α_1; α_2 und β_2; α_3, β_3 und γ_3 u. s. w. zu finden, hat man die Gleichungen 10), 11), 12) u. s. w. aufzulösen. Der Koeffizient α_1 ergibt sich aus 10) unmittelbar. Um die anderen Koeffizienten zu finden, schlage man denselben Vorgang ein, welcher eingehalten wurde, um vom System der Normalgleichungen 7) zum System der Gleichungen 9) zu gelangen.

Multipliziert man also das Gleichungssystem 11) der Reihe nach zuerst mit 1, 0, sodann mit α_1, 1 und addiert jedesmal, so erhält man das Gleichungssystem

$$\varphi(0)\,\alpha_2 + \varphi(1)\,\beta_2 + \varphi(2) = 0,$$
$$\{\varphi(0)\,\alpha_1 + \varphi(1)\}\,\alpha_2 + \{\varphi(1)\alpha_1 + \varphi(2)\}\,\beta_2 + \varphi(2)\,\alpha_1 + \varphi(3) = 0.$$

Zufolge 10) und 8) reduziert sich die letzte Gleichung auf $\varphi_1(1)\,\beta_2 + \varphi_1(2) = 0$. Auf diese Weise wurde das System der folgenden zwei Gleichungen gewonnen:

$$14)\qquad \begin{cases} \varphi(0)\,\alpha_2 + \varphi(1)\,\beta_2 + \varphi(2) = 0, \\ \qquad\quad \varphi_1(1)\,\beta_2 + \varphi_1(2) = 0. \end{cases}$$

Multipliziert man das Gleichungssystem 12) der Reihe nach zuerst mit 1, 0, 0; dann mit α_1, 1, 0; schließlich mit α_2, β_2, 1 und addiert wieder jedesmal, so gelangt man mit Rücksicht auf die Gleichungen 10), 11) und 8) zu dem Gleichungssystem

$$15)\qquad \begin{cases} \varphi(0)\,\alpha_3 + \varphi(1)\,\beta_3 + \varphi(2)\,\gamma_3 + \varphi(3) = 0, \\ \qquad\quad \varphi_1(1)\,\beta_3 + \varphi_1(2)\,\gamma_3 + \varphi_1(3) = 0, \\ \qquad\qquad\qquad \varphi_2(2)\,\gamma_3 + \varphi_2(3) = 0. \end{cases}$$

Die für die Berechnung der Funktionen φ_1, φ_2 und φ_3 nach den Formeln 8) notwendigen Koeffizienten α_1; α_2, β_2 und α_3, β_3, γ_3 werden aus den Gleichungen 10), 14) und 15) erhalten. Die folgenden Koeffizienten gehen aus den in gleicher Weise gebildeten weiteren Bedingungsgleichungen hervor.

Dividiert man jede der Gleichungen 10), 14), 15) u. s. f. durch den Koeffizienten ihres ersten Gliedes und setzt

$$16)\qquad \left\{ \begin{array}{llll} a = -\dfrac{\varphi(1)}{\varphi(0)}, & b = -\dfrac{\varphi(2)}{\varphi(0)}, & c = -\dfrac{\varphi(3)}{\varphi(0)}, & \ldots\ldots \\ & b' = -\dfrac{\varphi_1(2)}{\varphi_1(1)}, & c' = -\dfrac{\varphi_1(3)}{\varphi_1(1)}, & \ldots\ldots \\ & & c'' = -\dfrac{\varphi_2(3)}{\varphi_2(2)}, & \ldots\ldots \\ & & & \ldots\ldots \end{array} \right\}$$

Der Rang des Buchstabens im Alphabete stimmt mit der Ziffer im Zähler und die Anzahl der Akzente bei den Buchstaben stimmt mit der Ziffer im Nenner überein.

so nehmen dann die Gleichungen 10), 14), 15) u. s. f. die nachstehenden Formen an:

$$
17)\quad \begin{cases}
\alpha_1 = a, & \alpha_2 = a\,\beta_2 + b, \quad \alpha_3 = a\,\beta_3 + b\,\gamma_3 + c, \quad \ldots\ldots \\
& \beta_2 = \qquad b', \quad \beta_3 = \qquad b'\gamma_3 + c', \quad \ldots\ldots \\
& \qquad\qquad \gamma_3 = \qquad c'', \quad \ldots\ldots \\
& \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots
\end{cases}
$$

Setzt man noch

$$
18)\quad L_0 = \frac{\psi(0)}{\varphi(0)}, \quad L_1 = \frac{\psi_1(0)}{\varphi_1(1)}, \quad L_2 = \frac{\psi_2(0)}{\varphi_2(2)}, \quad \ldots\ldots, \quad L_p = \frac{\psi_p(0)}{\varphi_p(p)},
$$

so gehen die Gleichungen 9) mit Rücksicht auf 16) über in:

$$
19)\quad \begin{cases}
k_0 = L_0 + a\,k_1 + b\,k_2 + c\,k_3 + \cdots\cdots \\
k_1 = \qquad L_1 + b'k_2 + c'k_3 + \cdots\cdots \\
k_2 = \qquad\qquad L_2 + c''k_3 + \cdots\cdots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}
$$

b) Transformation der für die Parameter k gewonnenen Beziehungen.

Aus dem Gleichungssystem 19) kann man die unbekannten Parameter k sukzessive bestimmen, wenn man von der letzten Gleichung ausgeht, dann zur vorletzten übergeht u. s. w. Es ist aber möglich, die Unbekannten unabhängig voneinander auszudrücken. Um dies zu zeigen, ergänze man alle Kolonnen des Schemas 17) durch die Identität $0 = 0$, um auf diese Weise in allen Kolonnen gleich viel Gleichungen zu haben. Aus dem so ergänzten Schema bilde man ein neues auf folgende Art: Die Gleichungen jeder Zeile werden der Reihe nach von links nach rechts, und zwar das erste Mal mit 1, 0, 0, ... multipliziert und sodann addiert; das zweite Mal erfolgt die Multiplikation mit $-b'$, 1, 0, 0, ..., worauf wieder alle Gleichungen in jeder Zeile addiert werden; das dritte Mal multipliziere man die Gleichungen jeder Zeile mit $-c'$, $-c''$, 1, 0, 0, ... und addiere hierauf wieder die Gleichungen jeder Zeile. Indem man auf diese Art fortfährt, ergibt sich das folgende Schema:

$$
20)\quad \begin{cases}
\alpha_1 = a, & \alpha_2 = b'\alpha_1 + b, \quad \alpha_3 = c''\alpha_2 + c'\alpha_1 + c, \quad \ldots\ldots \\
& \beta_2 = \qquad b', \quad \beta_3 = \qquad c''\beta_2 + c', \quad \ldots\ldots \\
& \qquad\qquad \gamma_3 = \qquad c'', \quad \ldots\ldots \\
& \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots
\end{cases}
$$

Nun multipliziere man die Gleichungen 19) zuerst mit $1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots$, dann mit $0, 1, \beta_2, \beta_3, \ldots\ldots$, ferner mit $0, 0, 1, \gamma_3, \ldots\ldots$ u. s. w. und addiere jedesmal. Mit Rücksicht auf das Schema 20) folgt auf diese Weise

$$
21) \quad \left\{\begin{array}{l}
k_0 = L_0 + \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \cdots\cdots + \alpha_p L_p, \\
k_1 = \qquad\quad L_1 + \beta_2 L_2 + \cdots\cdots + \beta_p L_p, \\
k_2 = \qquad\qquad\qquad L_2 + \cdots\cdots + \gamma_p L_p, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
k_p = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad L_p.
\end{array}\right.
$$

Werden schließlich diese Gleichungen der Reihe nach noch mit $1, x, x^2, \ldots\ldots, x^p$ multipliziert, sodann addiert und die Summe mit $f(x)$ multipliziert, so ergibt sich, wenn

$$
22) \quad \left\{\begin{array}{l}
\lambda_1(x) = \alpha_1 + x, \\
\lambda_2(x) = \alpha_2 + \beta_2 x + x^2, \\
\lambda_3(x) = \alpha_3 + \beta_3 x + \gamma_3 x^2 + x^3, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\lambda_p(x) = \alpha_p + \beta_p x + \gamma_p x^2 + \cdots\cdots + x^p
\end{array}\right.
$$

gesetzt und λ als Funktionszeichen benützt wird:

$$
23) \quad \left\{\begin{array}{l}
y_p = f(x)(k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots\cdots + k_p x^p) = \\
\quad = f(x)\{L_0 \lambda_0(x) + L_1 \lambda_1(x) + L_2 \lambda_2(x) + \cdots\cdots + L_p \lambda_p(x)\},
\end{array}\right.
$$

worin $\lambda_0(x) = 1$ ist. Durch diese Formel ist das durch y_p dargestellte Polynom als Funktion von Größen dargestellt, welche nach dem Vorhergehenden berechnet werden können.

22. Kriterium für die erforderliche Anzahl Glieder in der Interpolationsformel.

Wenn das Problem darin bestünde, ein Polynom y von einem bestimmten Grade zu finden, so wäre nach dem Vorhergehenden dieses Problem gelöst; allgemeiner formuliert, liegt jedoch die Aufgabe vor, das Polynom des Klammerausdruckes auf der rechten Seite der Formel

$$
24) \qquad y = f(x)(k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots\cdots)
$$

auf die zwei ersten oder drei ersten oder vier ersten Glieder u. s. w. zu kürzen. Es ist deshalb zweckmäßiger, nach folgender Methode zu verfahren:

Um die Rechnung, durch welche man zur Formel 1) gelangt, möglichst zu vereinfachen, muß man einerseits die Anzahl der Glieder des Klammerausdruckes möglichst reduzieren; anderseits darf der mittlere Fehler, mit welchem die genannte Formel die Beobachtungen darstellt und welcher durch

25) $$\mu_p = \sqrt{\frac{[g_i \delta_i \delta_i]}{n}}$$

definiert werden kann, einen gewissen Grenzwert nicht überschreiten. Macht man die Voraussetzung $p = 3$ und die Annahme, daß der gegebene Grenzwert nennenswert überschritten erscheint, so wird man sich bemüssigt sehen, zunächst die Annahme $p = 4$ zu machen, vielleicht sogar auf die Annahme $p = 5$ zu übergehen u. s. w. Es kommt also darauf an, diese sukzessiven Versuche derart anzulegen, daß man nicht jedesmal alle diese Berechnungen von neuem machen muß und daß die Arbeit tunlichst reduziert werde.

Um den zu befolgenden Vorgang zu verdeutlichen, drücke man zunächst die Größe μ_p in 25) durch solche Größen aus, welche schon vorstehend benützt wurden.

Multipliziert man die Gleichung 2) mit $g_i \delta_i$ und bildet dann die Summe für alle Werte von i, so ergibt sich mit Rücksicht auf 3)

$$[g_i \delta_i \delta_i] = -[g_i y_i \delta_i].$$

Führt man auf der rechten Seite für δ_i seinen Wert aus 2) ein, so ergibt sich:

$$-[g_i y_i \delta_i] = [g_i y_i y_i] - k_0 [g_i u_i y_i] - k_1 [g_i u_i x_i y_i] - \cdots\cdots - k_p [g_i u_i x_i^p y_i],$$

oder mit Rücksicht auf die in 5) eingeführten Bezeichnungen

$$-[g y_i \delta_i] = [g_i y_i y_i] - k_0 \psi(0) - k_1 \psi(1) - \cdots\cdots - k_p \psi(p).$$

Es ist also, wenn $S_p = [g_i \delta_i \delta_i]$ gesetzt wird,

26) $$S_p = [g_i y_i y_i] - k_0 \psi(0) - k_1 \psi(1) - \cdots\cdots - k_p \psi(p).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung kann man durch die Koeffizienten L_0, L_1, ..., L_p ausdrücken. Hiezu multipliziere man die Gleichungen 21) der Reihe nach mit $\psi(0)$, $\psi(1)$, $\psi(2)$, ..., $\psi(p)$ und addiere sie. Mit Rücksicht auf die durch 8) eingeführten Bezeichnungen folgt alsdann

$$k_0 \psi(0) + k_1 \psi(1) + \cdots\cdots + k_p \psi(p) =$$
$$= L_0 \psi(0) + L_1 \psi_1(0) + \cdots\cdots + L_p \psi_p(0).$$

Hiemit nimmt die Gleichung 26) die Form an

$$S_p = [g_i y_i y_i] - L_0 \psi(0) - L_1 \psi_1(0) - \cdots\cdots - L_p \psi_p(0),$$

oder zufolge der Gleichungen 18)

27) $$S_p = [g_i y_i y_i] - L_0^2 \varphi(0) - L_1^2 \varphi_1(1) - \cdots\cdots - L_p^2 \varphi_p(p).$$

Es sei nun μ' der Grenzwert, welchen der mittlere Fehler μ_p der Beobachtungen, nach der Formel 25) berechnet, nicht überschreiten darf. Ist $\mu_p > \mu'$, d. h. findet man, wenn S_p durch die Formel 27) ausgedrückt wird, $S_p > n\,\mu'^2$, so kann man folgern, daß der Klammerausdruck (1) nicht mit einer genügend großen Anzahl von Gliedern genommen wurde und daß man im Klammerausdruck ein Glied mehr nehmen, also y_{p+1} untersuchen muß. Hiefür wird es genügen:

a) für das Schema 20) die neue Serie der Größen α_{p+1}, β_{p+1}, γ_{p+1}, ... zu berechnen;

b) mit deren Hilfe die Werte

$$\varphi_{p+1}(p+1), \quad \psi_{p+1}(0), \quad L_{p+1} = \frac{\psi_{p+1}(0)}{\varphi_{p+1}(p+1)}$$

zu bestimmen und die Funktion

$$\lambda_{p+1}(x) = \alpha_{p+1} + \beta_{p+1} x + \gamma_{p+1} x^2 + \cdots\cdots + x^{p+1}$$

zu bilden.

Alsdann ist y_{p+1} gegeben durch

28) $$y_{p+1} = y_p + f(x)\, L_{p+1}\, \lambda_{p+1}(x);$$

der korrespondierende Wert für die Summe $[g_i \delta_i \delta_i]$ lautet:

29) $$S_{p+1} = S_p - L_{p+1}^2\, \varphi_{p+1}(p+1).$$

Aus den Formeln 28) und 29) ersieht man, daß beim Übergange von den Größen y und S, welche den Index p haben, zu den Größen mit dem Index $p+1$ die schon gerechneten Größen keine Änderung erleiden; der Übergang reduziert sich auf die Berechnung je eines neuen Gliedes für y und S.

Dies führt zu einer Interpolationsmethode, mit welcher man direkt, ohne Tatonnement und ohne die Arbeit vergrößerndes Verfahren das Polynom y erhalten kann, welches dann folgenden zwei Bedingungen Genüge leistet:

a) Die Beobachtungen mit einem kleineren mittleren Fehler darzustellen, als derselbe bei jedem anderen Polynom desselben Grades auftreten würde.

b) Den Grad unter allen Polynomen am meisten erniedrigt zu haben, für welche dieser mittlere Fehler kleiner ist als der für ihn angenommene Grenzwert.

23. Zusammenstellung der Rechnungsvorgänge für die Berechnung der einzelnen Glieder der Interpolationsformel.

Für praktische Rechnungen wird es zweckmäßig sein, die sukzessiven Rechnungsvorgänge anzugeben, welche die Berechnung der Glieder der Interpolationsformel nach dieser Methode erfordert.

Erstes Glied L_0.

$$\varphi(0) = [g_i u_i^2], \qquad \psi(0) = [g_i u_i y_i];$$
$$L_0 = \frac{\psi(0)}{\varphi(0)}, \qquad S_0 = [g_i y_i^2] - L_0^2 \varphi(0).$$

Zweites Glied $L_1 \lambda_1(x)$.

$$\varphi(1) = [g_i u_i^2 x_i], \qquad \varphi(2) = [g_i u_i^2 x_i^2]; \qquad \psi(1) = [g_i u_i x_i y_i];$$
$$\alpha_1 = -\frac{\varphi(1)}{\varphi(0)}; \qquad \begin{cases} \varphi_1(1) = \alpha_1 \varphi(1) + \varphi(2), \\ \psi_1(0) = \alpha_1 \psi(0) + \psi(1); \end{cases}$$
$$L_1 = \frac{\psi_1(0)}{\varphi_1(1)}; \qquad \begin{cases} \lambda_1(x) = \alpha_1 + x, \\ S_1 = S_0 - L_1^2 \varphi_1(1). \end{cases}$$

Drittes Glied $L_2 \lambda_2(x)$.

$$\varphi(3) = [g_i u_i^2 x_i^3], \qquad \varphi(4) = [g_i u_i^2 x_i^4]; \qquad \psi(2) = [g_i u_i x_i^2 y_i];$$
$$\varphi_1(2) = \alpha_1 \varphi(2) + \varphi(3);$$
$$\beta_2 = -\frac{\varphi_1(2)}{\varphi_1(1)}, \qquad \alpha_2 = -\frac{\varphi_1(2)}{\varphi_1(1)} \alpha_1 - \frac{\varphi(2)}{\varphi(0)};$$
$$\varphi_2(2) = \alpha_2 \varphi(2) + \beta_2 \varphi(3) + \varphi(4),$$
$$\psi_2(0) = \alpha_2 \psi(0) + \beta_2 \psi(1) + \psi(2);$$
$$L_2 = \frac{\psi_2(0)}{\varphi_2(2)}; \qquad \begin{cases} \lambda_2(x) = \alpha_2 + \beta_2 x + x^2, \\ S_2 = S_1 - L_2^2 \varphi_2(2). \end{cases}$$

Viertes Glied $L_3 \lambda_3(x)$.

$$\varphi(5) = [g_i u_i^2 x_i^5], \qquad \varphi(6) = [g_i u_i^2 x_i^6]; \qquad \psi(3) = [g_i u_i x_i^3 y_i];$$

$$\varphi_1(3) = \alpha_1 \varphi(3) + \varphi(4);$$

$$\varphi_2(3) = \alpha_2 \varphi(3) + \beta_2 \varphi(4) + \varphi(5);$$

$$\begin{cases} \gamma_3 = -\dfrac{\varphi_2(3)}{\varphi_2(2)}, \qquad \beta_3 = -\dfrac{\varphi_2(3)}{\varphi_2(2)}\beta_2 - \dfrac{\varphi_1(3)}{\varphi_1(1)}, \\ \alpha_3 = -\dfrac{\varphi_2(3)}{\varphi_2(2)}\alpha_2 - \dfrac{\varphi_1(3)}{\varphi_1(1)}\alpha_1 - \dfrac{\varphi(3)}{\varphi(0)}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_3(3) = \alpha_3 \varphi(3) + \beta_3 \varphi(4) + \gamma_3 \varphi(5) + \varphi(6), \\ \psi_3(0) = \alpha_3 \psi(0) + \beta_3 \psi(1) + \gamma_3 \psi(2) + \psi(3); \end{cases}$$

$$L_3 = \frac{\psi_3(0)}{\varphi_3(3)}, \qquad \begin{cases} \lambda_3(x) = \alpha_3 + \beta_3 x + \gamma_3 x^2 + x^3, \\ S_3 = S_2 - L_3^2 \varphi_2(2). \end{cases}$$

Und so weiter fort.

Bei diesen Rechnungen kann man die Werte S_0, S_1, S_2, S_3 u. s. w. nach Maßgabe, als sie entstanden sind, mit der konstanten Zahl $n\mu'^2$ vergleichen und dann stehen bleiben, wenn man zu einem Werte gelangt, der gleich oder kleiner ist als diese Zahl. Bezeichnet man mit $p+1$ die Anzahl der so gewonnenen Ausdrücke, so hat man $\mu_p < \mu'$; folglich ist

$$y_p = f(x)\{L_0 + L_1 \lambda_1(x) + L_2 \lambda_2(x) + \cdots\cdots + L_p \lambda_p(x)\}$$

das gesuchte Polynom.

Die Raschheit, mit welcher die Werte S abnehmen oder besser gesagt, der Grad der Kleinheit der Differenz $\mu_p - \mu_{p+1}$, wenn man noch ein Glied mehr hinzunehmen will, gibt einen Anhaltspunkt für die Eignung der Formel $y = f(x)(k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots)$, die Beobachtungen darzustellen.

24. Allgemeines Prinzip zur weiteren Vereinfachung der gefundenen Interpolationsformel. Definition der Hilfsgrößen q_1, q_2 und p_2.

Mit Hilfe der abgeleiteten Formeln ist es möglich, der Reihe nach weitere Glieder des Polynoms

$$u = f(x)(k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots\cdots + k_p x^p)$$

zu berechnen, ohne die vorhergehenden Glieder nochmals neu aufstellen zu müssen. Es kommt jedoch hier noch eine größere Anzahl

(p Gruppen) von Hilfsgrößen α, β, γ, ... vor, während in den eigentlichen Formeln von Tchebycheff nur noch zwei Gruppen von Hilfsgrößen zu finden sind, welche mit p_i und q_i bezeichnet werden mögen.

Zunächst sollen die vier Größen q_1, q_2 und p_1, p_2 durch Gleichungen definiert werden.

Man setze $q_1 = \alpha_1$, also zufolge der Formeln 16), 17) und 22)

$$q_1 = -\frac{\varphi(1)}{\varphi(0)} \quad \text{und} \quad \lambda_1(x) = x + q_1.$$

Die Funktion $\lambda_h(x)$ soll stets aus den vorhergehenden Funktionen $\lambda_{h-1}(x)$, $\lambda_{h-2}(x)$, ... hervorgehen. Man setze

$$\lambda_2(x) = (x + q_2)\,\lambda_1(x) + p_2.$$

Zur Ermittlung von q_2 und p_2 hat man zwei Bedingungsgleichungen. Die erste derselben wird erhalten, wenn man in die letzte Formel $x + q_1$ statt $\lambda_1(x)$ setzt; hiedurch findet man

$$\lambda_2(x) = (x + q_2)(x + q_1) + p_2 = x^2 + (q_1 + q_2)\,x + q_1 q_2 + p_2.$$

Nach Formel 22) ist

$$\lambda_2(x) = \alpha_2 + \beta_2 x + x^2.$$

Durch Vergleich der beiden Ausdrücke für $\lambda_2(x)$ folgt:

$$\beta_2 = q_1 + q_2 \quad \text{und} \quad \alpha_2 = q_1 q_2 + p_2,$$

woraus mit Rücksicht auf 16), 17) und die für q_1 aufgestellte Definitionsgleichung

$$q_2 = \beta_2 - q_1 = \frac{\varphi(1)}{\varphi(0)} - \frac{\varphi_1(2)}{\varphi_1(1)}$$

resultiert; weiters ist

$$p_2 = \alpha_2 - q_1 q_2 = \alpha_2 - q_1(\beta_2 - q_1).$$

Nun ist zufolge der Formeln 16) und 17)

$$\alpha_2 = q_1 \beta_2 + b = q_1 \beta_2 - \frac{\varphi(2)}{\varphi(0)},$$

ferner nach 8)

$$\varphi_1(1) = \varphi(1)\,\alpha_1 + \varphi(2) = \varphi(1)\,q_1 + \varphi(2).$$

Hiemit ergibt sich schließlich:

$$p_2 = q_1 \beta_2 - \frac{\varphi(2)}{\varphi(0)} - q_1 \beta_2 + q_1^2 = -\frac{\varphi(1)\,q_1 + \varphi(2)}{\varphi(0)} = -\frac{\varphi_1(1)}{\varphi(0)}.$$

Man hat also

$$q_1 = -\frac{\varphi(1)}{\varphi(0)}, \quad q_2 = \frac{\varphi(1)}{\varphi(0)} - \frac{\varphi_1(2)}{\varphi_1(1)}, \quad p_2 = -\frac{\varphi_1(1)}{\varphi(0)};$$

für p_1 ist der Wert Null zu nehmen, also $p_1 = 0$ zu setzen.

25. Beziehungen für die Bestimmung der weiteren, von Tchebycheff eingeführten Hilfsgrößen p und q.

Aus der obersten Zeile des Schemas 20) folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} a - \alpha_1 &= 0, \\ b + b'\,\alpha_1 - \alpha_2 &= 0, \\ c + c'\,\alpha_1 + c''\,\alpha_2 - \alpha_3 &= 0, \\ d + d'\alpha_1 + d''\alpha_2 + d'''\alpha_3 - \alpha_4 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Man multipliziere diese Gleichungen der Reihe nach mit α_1, 1, 0, 0, ...; dann mit α_2, β_2, 1, 0, 0, ...; ferner mit α_3, β_3, γ_3, 1, 0, 0, ... u. s. w. und addiere sodann jedesmal die Produkte. Um das Gesetz der Bildung von p und q zu erkennen, betrachte man die Gleichung, welche infolge der dritten Operation entsteht; diese heißt:

$$30)\qquad m_4 + n_4\,\alpha_1 + p_4\,\alpha_2 + q_4\,\alpha_3 - \alpha_4 = 0.$$

Hierin wurde zur Abkürzung gesetzt:

$$31)\qquad \left\{\begin{aligned} m_4 &= \alpha_3\,a \;+ \beta_3\,b + \gamma_3\,c + d, \\ n_4 &= -\,\alpha_3 + \beta_3\,b' + \gamma_3\,c' + d', \\ p_4 &= \qquad\;\; -\beta_3 \;+ \gamma_3\,c'' + d'', \\ q_4 &= \qquad\qquad\quad\; -\gamma_3 \;+ d'''. \end{aligned}\right.$$

Man betrachte nun die zwei letzten Gleichungen des Systems 12) und die Gleichung, welche aus der dritten des Gleichungssystems 8) hervorgeht, wenn in ihr χ durch φ ersetzt und $\mu = 3$ gesetzt wird; also die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\varphi(1)\,\alpha_3 + \varphi(2)\,\beta_3 + \varphi(3)\,\gamma_3 + \varphi(4) = 0, \\ &\varphi(2)\,\alpha_3 + \varphi(3)\,\beta_3 + \varphi(4)\,\gamma_3 + \varphi(5) = 0, \\ &\varphi(3)\,\alpha_3 + \varphi(4)\,\beta_3 + \varphi(5)\,\gamma_3 + \varphi(6) = \varphi_3(3). \end{aligned}$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach zuerst mit 1, 0, 0, dann mit α_1, 1, 0, schließlich mit α_2, β_2, 1 und addiert jedesmal, dann folgt mit Rücksicht auf die Beziehungen 8)

$$32)\qquad \left\{\begin{aligned} &\varphi(1)\,\alpha_3 + \varphi(2)\,\beta_3 + \varphi(3)\,\gamma_3 + \varphi(4) = 0, \\ &\varphi_1(1)\,\alpha_3 + \varphi_1(2)\,\beta_3 + \varphi_1(3)\,\gamma_3 + \varphi_1(4) = 0, \\ &\varphi_2(1)\,\alpha_3 + \varphi_2(2)\,\beta_3 + \varphi_2(3)\,\gamma_3 + \varphi_2(4) = \varphi_3(3). \end{aligned}\right.$$

Dividiert man die erste dieser Gleichungen durch $\varphi(0)$, die zweite durch $\varphi_1(1)$ und die dritte durch $\varphi_2(2)$, so ergibt sich mit

Rücksicht auf die eingeführten Bezeichnungen 16) und weil zufolge Gleichung 11) $\varphi_2(1)=0$ ist:

33) $$\begin{cases} \alpha_3 a+\beta_3 b+\gamma_3 c+d=0, \\ -\alpha_3 \quad +\beta_3 b'+\gamma_3 c'+d'=0, \\ \quad -\beta_3 \quad +\gamma_3 c''+d''=-\dfrac{\varphi_3(3)}{\varphi_2(2)}. \end{cases}$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit den Gleichungen 31), so folgt

$$m_4=0, \quad n_4=0, \quad p_4=-\frac{\varphi_3(3)}{\varphi_2(2)}.$$

Die vierte der Gleichungen 31) kann man mit Rücksicht auf die in 16) und 17) eingeführten Bezeichnungen auch in der Form

$$q_4=\frac{\varphi_2(3)}{\varphi_2(2)}-\frac{\varphi_3(4)}{\varphi_3(3)}$$

schreiben. Bestimmt man aus 30) die Größe α_4, so erhält man, da $m_4=0$ und $n_4=0$ ist,

$$\alpha_4=q_4\alpha_3+p_4\alpha_2.$$

Auf dieselbe Weise findet man

34) $$\begin{cases} p_h=-\dfrac{\varphi_{h-1}(h-1)}{\varphi_{h-2}(h-2)}, \\ q_h=\dfrac{\varphi_{h-2}(h-1)}{\varphi_{h-2}(h-2)}-\dfrac{\varphi_{h-1}(h)}{\varphi_{h-1}(h-1)} \end{cases}$$

und

35) $$\alpha_h=q_h\alpha_{h-1}+p_h\alpha_{h-2}.$$

Durch die letzte Gleichung ist die Berechnung der Hilfsgröße α_h auf die Berechnung der zwei unmittelbar vorhergehenden Hilfsgrößen α_{h-1} und α_{h-2} reduziert. Für $h=1$ ist $p_1=0$ und $q_1=-\dfrac{\varphi(1)}{\varphi(0)}$ zu nehmen.

Wenn man im Schema 17) alle leeren Stellen durch die Identität $0=0$ ergänzt und mit den folgenden Zeilen dieselben Operationen vórnimmt, durch welche aus der ersten Zeile der Ausdruck 35) erhalten wurde, so folgt:

36) $$\begin{cases} \beta_h=q_h\beta_{h-1}+p_h\beta_{h-2}+\alpha_{h-1}, \\ \gamma_h=q_h\gamma_{h-1}+p_h\gamma_{h-2}+\beta_{h-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Multipliziert man die Gleichungen 35) und 36) zuerst der Reihe nach mit $\varphi(\mu)$, $\varphi(\mu+1)$, $\varphi(\mu+2)$ u. s. w. und addiert, multipliziert ferner dieselben Gleichungen 35) und 36) der Reihe nach mit 1, x, x^2, x^3 u. s. w. und addiert wieder, dann ergibt sich mit Rücksicht auf 8) und 22)

$$37) \quad \begin{cases} \varphi_h(\mu) = q_h\,\varphi_{h-1}(\mu) + p_h\,\varphi_{h-2}(\mu) + \varphi_{h-1}(\mu+1), \\ \lambda_h(x) = q_h\,\lambda_{h-1}(x) + p_h\,\lambda_{h-2}(x) + x\,\lambda_{h-1}(x). \end{cases}$$

Diese Formeln gestatten mit Hilfe der Größen p und q die Werte von φ und λ zu bestimmen; die Reihe der Größen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots.$ ist in diesem Falle hiezu nicht notwendig. Die gefundenen Größen sind für die Bildung der Koeffizienten des Polynoms, welches y_p darstellt, erforderlich.

In den Ausdrücken 18) für die Koeffizienten L_0, L_1, L_2 u. s. w. kommen auch die Funktionen ψ vor. Es soll noch gezeigt werden, wie auch diese Funktionen unabhängig von α, β, γ u. s. w. gefunden werden können. Zufolge 8) hat man

$$\begin{aligned} \psi(0) &= \psi(0), \\ \psi_1(0) &= \psi(0)\,\alpha_1 + \psi(1), \\ \psi_2(0) &= \psi(0)\,\alpha_2 + \psi(1)\,\beta_2 + \psi(2), \\ \psi_3(0) &= \psi(0)\,\alpha_3 + \psi(1)\,\beta_3 + \psi(2)\,\gamma_3 + \psi(3), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Diese Gleichungen multipliziere man der Reihe nach erstens mit $-a$, 1, 0, ...; zweitens mit $-b$, $-b'$, 1, 0, ...; drittens mit $-c$, $-c'$, $-c''$, 1, 0, ... u. s. w. und addiere jedesmal die Produkte. Man erhält alsdann mit Rücksicht auf die in 17) angeführten Beziehungen

$$\begin{aligned} \psi_1(0) &= \psi(1) + a\,\psi(0), \\ \psi_2(0) &= \psi(2) + b\,\psi(0) + b'\,\psi_1(0), \\ \psi_3(0) &= \psi(3) + c\,\psi(0) + c'\,\psi_1(0) + c''\,\psi_2(0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

oder zufolge der Bezeichnungen 16) und 18)

$$\begin{aligned} \psi_1(0) &= \psi(1) - \varphi(1)\,L_0, \\ \psi_2(0) &= \psi(2) - \varphi(2)\,L_0 - \varphi_1(2)\,L_1, \\ \psi_3(0) &= \psi(3) - \varphi(3)\,L_0 - \varphi_1(3)\,L_1 - \varphi_2(3)\,L_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

26. Zusammenstellung der Rechnungsvorgänge für die Berechnung der einzelnen Glieder der Interpolationsformel nach dem Verfahren von Tchebycheff.

Nachstehend sei ein Schema gegeben, auf Grund welches nach dem Verfahren von Tchebycheff die sukzessive Berechnung der Glieder der Interpolationsformel

$$y = f(x)\{L_0\lambda_0(x) + L_1\lambda_1(x) + L_2\lambda_2(x) + \cdots + L_\mu\lambda_\mu(x) + \cdots + L_p\lambda_p(x)\}$$

vorgenommen werden kann. In diesen Formeln erstreckt sich die Summierung stets auf alle Werte von i von $i = 1$ bis $i = n$, wobei n die Anzahl der Beobachtungen bedeutet. Man findet ferner in diesen Formeln die Größe p zur Bequemlichkeit der praktischen Rechnung mit entgegengesetztem Vorzeichen eingeführt.

Erstes Glied $L_0\lambda_0(x)$.

$$\varphi(0) = [g_i u_i^2]; \qquad \psi(0) = [g_i u_i y_i];$$
$$L_0 = \frac{\psi(0)}{\varphi(0)}; \qquad S_0 = [g_i y_i^2] - L_0^2\varphi(0).$$

Zweites Glied $L_1\lambda_1(x)$.

$$\varphi(1) = [g_i u_i^2 x_i], \qquad \varphi(2) = [g_i u_i^2 x_i^2]; \qquad \psi(1) = [g_i u_i x_i y_i];$$
$$q_1 = -\frac{\varphi(1)}{\varphi(0)}; \qquad \begin{cases} \varphi_1(1) = \varphi(2) + q_1\varphi(1), \\ \psi_1(0) = \psi(1) - L_0\varphi(1); \end{cases}$$
$$L_1 = -\frac{\psi_1(0)}{\varphi_1(1)}; \qquad \begin{cases} \lambda_1(x) = x + q_1, \\ S_1 = S_0 - L_1^2\varphi_1(1). \end{cases}$$

Drittes Glied $L_2\lambda_2(x)$.

$$\varphi(3) = [g_i u_i^2 x_i^3], \qquad \varphi(4) = [g_i u_i^2 x_i^4]; \qquad \psi(2) = [g_i u_i x_i^2 y_i];$$
$$\begin{cases} \varphi_1(2) = \varphi(3) + q_1\varphi(2), \\ \varphi_1(3) = \varphi(4) + q_1\varphi(3); \end{cases}$$
$$p_2 = \frac{\varphi_1(1)}{\varphi(0)}, \qquad q_2 = \frac{\varphi(1)}{\varphi(0)} - \frac{\varphi_1(2)}{\varphi_1(1)};$$
$$\begin{cases} \varphi_2(2) = \varphi_1(3) + q_2\varphi_1(2) + p_2\varphi(2), \\ \psi_2(0) = \psi(2) - \varphi(2)L_0 - \varphi_1(2)L_1; \end{cases}$$
$$L_2 = \frac{\psi_2(0)}{\varphi_2(2)}, \qquad \begin{cases} \lambda_2(x) = (x + q_2)\lambda_1(x) - p_2, \\ S_2 = S_1 - L_2^2\varphi_2(2). \end{cases}$$

Viertes Glied $L_3 \lambda_3(x)$.

$$\varphi(5) = [g_i u_i^2 x_i^5], \qquad \varphi(6) = [g_i u_i^2 x_i^6]; \qquad \psi(3) = [g_i u_i x_i^3 y_i];$$

$$\begin{cases} \varphi_1(4) = \varphi(5) + q_1 \varphi(4), \\ \varphi_1(5) = \varphi(6) + q_1 \varphi(5); \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi_2(3) = \varphi_1(4) + q_2 \varphi_1(3) - p_2 \varphi(3), \\ \varphi_2(4) = \varphi_1(5) + q_2 \varphi_1(4) - p_2 \varphi(4); \end{cases}$$

$$p_3 = \frac{\varphi_2(2)}{\varphi_1(1)}, \qquad q_3 = \frac{\varphi_1(2)}{\varphi_1(1)} - \frac{\varphi_2(3)}{\varphi_2(2)};$$

$$\varphi_3(3) = \varphi_2(4) + q_3 \varphi_2(3) + p_3 \varphi_1(3),$$
$$\psi_3(0) = \psi(3) - \varphi(3) L_0 - \varphi_1(3) L_1 - \varphi_2(3) L_2;$$

$$L_3 = \frac{\psi_3(0)}{\varphi_3(3)}, \qquad \begin{cases} \lambda_3(x) = (x + q_3) \lambda_2(x) - p_3 \lambda_1(x), \\ S_3 = S_2 - L_3^2 \varphi_3(3). \end{cases}$$

Formeln zur Berechnung des Gliedes $L_\mu \lambda_\mu(x)$.

$$\varphi(2\mu-1) = [g_i u_i^2 x_i^{2\mu-1}], \quad \varphi(2\mu) = [g_i u_i^2 x_i^{2\mu}]; \quad \psi(\mu) = [g_i u_i x_i^\mu y_i];$$

$$\varphi_1(2\mu-2) = \varphi(2\mu-1) + q_1 \varphi(2\mu-2),$$
$$\varphi_1(2\mu-1) = \varphi(2\mu) + q_1 \varphi(2\mu-1),$$
$$\varphi_2(2\mu-3) = \varphi_1(2\mu-2) + q_2 \varphi_1(2\mu-3) - p_2 \varphi(2\mu-3),$$
$$\varphi_2(2\mu-2) = \varphi_1(2\mu-1) + q_2 \varphi_1(2\mu-2) - p_2 \varphi(2\mu-2),$$

. . . .

$$\varphi_{\mu-1}(\mu) = \varphi_{\mu-2}(\mu+1) + q_{\mu-1} \varphi_{\mu-2}(\mu) - p_{\mu-1} \varphi_{\mu-3}(\mu),$$
$$\varphi_{\mu-1}(\mu+1) = \varphi_{\mu-2}(\mu+2) + q_{\mu-1} \varphi_{\mu-2}(\mu+1) - p_{\mu-1} \varphi_{\mu-3}(\mu+1);$$

$$p_\mu = \frac{\varphi_{\mu-1}(\mu-1)}{\varphi_{\mu-2}(\mu-2)}, \qquad q_\mu = \frac{\varphi_{\mu-2}(\mu-1)}{\varphi_{\mu-2}(\mu-2)} - \frac{\varphi_{\mu-1}(\mu)}{\varphi_{\mu-1}(\mu-1)};$$

$$\varphi_\mu(\mu) = \varphi_{\mu-1}(\mu+1) + q_\mu \varphi_{\mu-1}(\mu) - p_\mu \varphi_{\mu-2}(\mu),$$
$$\psi_\mu(0) = \psi(\mu) - \varphi(\mu) L_0 - \varphi_1(\mu) L_1 - \cdots\cdots - \varphi_{\mu-1}(\mu) L_{\mu-1};$$

$$L_\mu = \frac{\psi_\mu(0)}{\varphi_\mu(\mu)}, \qquad \begin{cases} \lambda_\mu(x) = (x + q_\mu) \lambda_{\mu-1}(x) - p_\mu \lambda_{\mu-2}(x), \\ S_\mu = S_{\mu-1} - L_\mu^2 \varphi_\mu(\mu). \end{cases}$$

27. Zusammenstellung der Rechnungsvorgänge für die Interpolationsformel von Tchebycheff, wenn Funktionswerte bekannt sind, welche äquidistanten Werten der unabhängigen Variabeln entsprechen.

Die Formeln im Punkte 26 dieses Abschnittes erhalten eine einfachere Gestalt, im Falle die Funktionswerte $y = y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ den äquidistanten Argumentenwerten $x = 1, 2, \ldots, n$ entsprechen.

Wenn in diesem Falle die wahrscheinlichsten Werte der Koeffizienten $k_0, k_1, k_2, \ldots\ldots$ einer Funktion

$$y = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots\cdots$$

ermittelt werden sollen, hat man zu setzen

$$y = L_0 \lambda_0(x) + L_1 \lambda_1(x) + L_2 \lambda_2(x) + \cdots\cdots$$

Die Glieder auf der rechten Seite können dann mittels der nachfolgenden Formeln berechnet werden, vorausgesetzt, daß alle Beobachtungen von gleicher Genauigkeit sind, also $g_i = 1$ ist. Vorher soll der Vorgang angedeutet werden, wie man diese spezialisierten Formeln aus den allgemeinen Formeln erhält.

In den nachstehenden Formeln sind alle Summierungen bezüglich i von $i = 1$ bis $i = n$ zu erstrecken; ferner ist zu setzen:

$$\varDelta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad \varDelta^2 y_i = \varDelta y_{i+1} - \varDelta y_i, \quad \varDelta^3 y_i = \varDelta^2 y_{i+1} - \varDelta^2 y_i \text{ u. s. w.}$$

Die Bezeichnungen $\varphi_r(\mu)$, $\lambda_\mu(x)$ und L_μ haben im vorliegenden Falle eine etwas andere Bedeutung als die gleichlautenden Bezeichnungen im allgemeinen Falle. Hier ist

1) $$\lambda_\mu(x) = 1 + \varphi_1(\mu) x + \varphi_2(\mu) x^2 + \cdots\cdots + \varphi_\mu(\mu) x^\mu$$

und unterscheidet sich von $\lambda_\mu(x)$ im allgemeinen Falle durch einen konstanten Faktor. Um die Bezeichnungen des allgemeinen Falles von jenen des speziellen Falles zu unterscheiden, sollen die Bezeichnungen für den Spezialfall mit dem Zeichen (1) versehen werden.

Wie entsteht nun $L_\mu^{(1)} \lambda_\mu^{(1)}(x)$ aus $L_\mu \lambda_\mu(x)$?

Hier soll nur der spezielle Fall $\mu = 1$ betrachtet werden; mit anderen Worten, in

2) $$L_1^{(1)} \lambda_1^{(1)}(x) = L_1 \lambda_1(x)$$

sollen $\lambda_1(x)$ und L_1 derart modifiziert werden, daß ihr Produkt $L_1^{(1)} \lambda_1^{(1)}(x)$ gibt.

Es ist

3) $$\lambda_1(x) = x + q_1 = q_1\left(1 + \frac{1}{q_1} x\right).$$

Setzt man gemäß der Formel 1)

4) $$\lambda_1^{(1)}(x) = 1 + \frac{1}{q_1} x = 1 + \varphi_1^{(1)}(1)\, x,$$

so wird

5) $$\lambda_1(x) = q_1 \lambda_1^{(1)}(x).$$

Für $x_i = i$, $g_i = 1$, $f(x_i) = u_i = 1$ folgt aus den Formeln des allgemeinen Falles (Punkt 26 dieses Abschnittes)

$$\varphi(0) = [g_i u_i^2] = n, \qquad \psi(0) = [g_i u_i y_i] = [y_i],$$

$$L_0 = \frac{\psi(0)}{\varphi(0)} = \frac{[y_i]}{n}, \qquad \varphi(1) = [g_i u_i^2 x_i] = [i] = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\varphi(2) = [g_i u_i^2 x_i^2] = [i^2] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3},$$

$$\psi(1) = [g_i u_1 x_i y_i] = [i y_i], \qquad q_1 = -\frac{\varphi(1)}{\varphi(0)} = -\frac{n+1}{2},$$

$$\varphi_1(1) = \varphi(2) + q_1 \varphi(1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3} - \frac{n(n+1)^2}{4} = \frac{n(n+1)(n-1)}{3.2^2},$$

$$L_1 = \frac{\psi_1(0)}{\varphi_1(0)}.$$

Aus 4) folgt $\varphi_1^{(1)}(1) = \frac{1}{q_1} = -\frac{2}{n+1}$.

Aus 2) und 5) findet man $L_1 q_1 \lambda_1^{(1)}(x) = L_1^{(1)} \lambda_1^{(1)}(x)$; hieraus ergibt sich

$$L_1^{(1)} = L_1 q_1 = \frac{\psi_1(0)}{\varphi_1(1)} q_1 = -\frac{3.2}{n(n-1)} \psi_1(0).$$

Für den Faktor $\psi_1(0)$ hat man

$$\psi_1(0) = \psi(1) - L_0 \varphi(1) = [i y_i] - \frac{\psi(0)}{\varphi(0)}[i] = [i y_i] - \frac{[i][y_i]}{n} =$$

$$= [i y_i] - \frac{n+1}{2}[y_i] = -\frac{1}{2}[(n+1-2i) y_i].$$

Dieser Ausdruck für $\psi_1(0)$ kann noch transformiert werden. Zu diesem Zwecke multipliziere man der Reihe nach

$y_1 = y_1$ mit $-(n-1)$,

$y_2 = y_1 + \Delta y_1$ „ $-(n-3)$,

$y_3 = y_2 + \Delta y_2 = y_1 + \Delta y_1 + \Delta y_2$ „ $-(n-5)$,

. . . .

$y_i = y_1 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \cdots\cdots + \Delta y_{i-1}$ mit $-(n+1-2i)$,

. . . .

$y_{n-1} = y_1 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \cdots\cdots + \Delta y_{n-2}$ mit $-(-n+3)$,

$y_n = y_1 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \cdots\cdots + \Delta y_{n-1}$ „ $-(-n+1)$,

und bilde die Summe der erhaltenen Produkte, so ergibt sich

$$-[(n+1-2i)\,y_i] = 0\,.\,y_1 + 1\,.\,(n-1)\,\Delta y_1 + 2\,.\,(n-2)\,\Delta y_2 + \cdots\cdots =$$
$$= [i\,(n-i)\,\Delta y_i];$$

hiemit wird

$$L_1^{(1)} = \frac{-\frac{3}{n}\left[\frac{i\,(n-i)}{1^2}\,\Delta y_i\right]}{\frac{n-1}{1}}.$$

In derselben Weise lassen sich aus den allgemeinen Formeln des Punktes 26 dieses Abschnittes die anderen Formeln für den Spezialfall (äquidistante Werte der unabhängigen Variabeln) herleiten.

Erstes Glied $L_0\,\lambda_0\,(x)$.

$$L_0 = \frac{[u_i]}{n}; \qquad \lambda_0\,(x) = 1; \qquad S_0 = [u_i^2] - \frac{n}{1}\,L_0^2.$$

Zweites Glied $L_1\,\lambda_1\,(x)$.

$$L_1 = -\frac{3}{n}\,\frac{\left[\frac{i\,(n-i)}{1^2}\,\Delta y_i\right]}{\frac{n-1}{1}}, \qquad \varphi_1\,(1) = -\frac{2}{n+1}, \qquad \lambda_1\,(x) = 1 + \varphi_1\,(1)\,x,$$

$$S_1 = S_0 - \frac{n}{3}\,\frac{n-1}{n+1}\,L_1^2.$$

Drittes Glied $L_2\,\lambda_2\,(x)$.

$$L_2 = \frac{5}{n}\,\frac{\left[\frac{i\,(i+1)\,(n-i)\,(n-i-1)}{1^2\,.\,2^2}\,\Delta^2 y_i\right]}{\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}},$$

$$\varphi_1\,(2) = -\frac{6}{n+2}, \qquad \varphi_2\,(2) = \frac{6}{(n+1)\,(n+2)},$$

$$\lambda_2\,(x) = 1 + \varphi_1\,(2)\,x + \varphi_2\,(2)\,x^2,$$

$$S_2 = S_1 - \frac{n}{5}\cdot\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n+2}\,L_2^2.$$

Viertes Glied $L_3 \lambda_3(x)$.

$$L_3 = -\frac{7}{n}\,\frac{\left[\frac{i(i+1)(i+2)(n-i)(n-i-1)(n-i-2)}{1^2 . 2^2 . 3^2}\,\Delta^3 y_i\right]}{\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{3}},$$

$$\varphi_1(3) = -\frac{2(6n^2+15n+11)}{(n+1)(n+2)(n+3)}, \qquad \varphi_2(3) = \frac{30}{(n+2)(n+3)},$$

$$\varphi_3(3) = -\frac{20}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

$$\lambda_3(x) = 1 + \varphi_1(3)\,x + \varphi_2(3)\,x^2 + \varphi_3(3)\,x^3,$$

$$S_3 = S_2 - \frac{n}{7}\cdot\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n+2}\cdot\frac{n-3}{n+3}\,L_3^2.$$

Und so weiter fort.

Die allgemeine Formel zur Ermittlung von L_0, L_1, L_2, ..., L_μ heißt

$$L_\mu = (-1)^\mu\,\frac{2\mu+1}{n}\,\frac{\left[\binom{i+\mu-1}{\mu}\binom{n-i}{\mu}\Delta^\mu y_i\right]}{\binom{n-1}{\mu}};$$

die Größen

$$\begin{array}{llll} \varphi_1(1), & \varphi_1(2), & \varphi_1(3), \ldots\ldots, & \varphi_1(p), \\ & \varphi_2(2), & \varphi_2(3), \ldots\ldots, & \varphi_2(p), \\ & & \varphi_3(3), \ldots\ldots, & \varphi_3(p), \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

ergeben sich eine nach der anderen aus der Formel

$$\varphi_r(i+1) = \frac{2i+1}{i+1}\cdot\frac{n+1}{n+i+1}\left\{\varphi_r(i) - \frac{2}{n+1}\varphi_{r-1}(i)\right\} - \\ - \frac{i}{i+1}\cdot\frac{n-i}{n+i+1}\,\varphi_r(i-1),$$

wobei zu setzen ist

$$\varphi_0(0) = 1, \quad \varphi_0(1) = 1, \quad \varphi_0(2) = 1, \quad \ldots\ldots;$$

$$\varphi_r(i) = 0 \text{ für } r > i; \qquad \varphi_{r-1}(i) = 0 \text{ für } r-1 > i;$$

$$\varphi_r(i-1) = 0 \text{ für } r > i-1; \qquad \varphi_r(i+1) = 0 \text{ für } r > i+1.$$

Beispiel.*) **Berechnung der Flugbahngleichung sphärischer Geschosse (Rundgeschosse) bei gegebenem Elevationswinkel aus den durch den Versuch ermittelten Ordinaten, welche äquidistanten Abszissenwerten entsprechen.**

Beim Schießen von Rundgeschossen auf dem Wolkowschen Felde im Jahre 1858 aus einer 24-pfündigen glatten Belagerungskanone mit einer Pulverladung von 8 Pfund Pulver unter einem Elevationswinkel von $1^0 45'$ wurden auf vertikalen Netzen, welche auf 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450 Saschén (Klafter)**) vom Geschütz aufgestellt waren, nachfolgende, aus 22 Schüssen berechnete mittlere Werte der Ordinaten erhalten:

Abszisse x in Saschén	Ordinate y in Fuß
50	10·10
100	18·85
150	24·67
200	28·68
250	29·42
300	26·90
350	20·38
400	9·76
450	— 5·47

Zur Berechnung der Flugbahngleichung aus diesen Daten sei dieselbe in der Form

$$1)\qquad y = a\,x + b\,x^2 + c\,x^3 + \cdots\cdots$$

angenommen. Um die in diesem Punkte für äquidistante Argumente abgeleiteten Formeln anwenden zu können, muß man vorher die Formel 1) auf die Form $y = k_0 + k_1\,x + k_2\,x^2 + \cdots\cdots$ bringen. Dies geschieht dadurch, daß man beide Seiten von 1) durch x dividiert.***)

*) Das Beispiel ist entnommen dem in russischer Sprache erschienenen Werke von Majevski: „Darstellung der Methode der kleinsten Quadrate", 1881 (Seite 223 bis einschließlich Seite 230); es ist auch enthalten in „Traité de balistique extérieure" par Majevski, 1873 (Seite 271 bis einschließlich Seite 275).

**) 1 Saschén = 7 Fuß = 2·133 53 m.

***) Die Division beider Teile der Gleichung 1) durch x führt zur Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die bezüglichen relativen Fehler der Ordinaten

$$\Delta_1' = U_1 - u_1 = \frac{Y_1}{h} - \frac{y_1}{h},\quad \Delta_2' = U_2 - u_2 = \frac{Y_2}{2\,h} - \frac{y_2}{2\,h},\quad \cdots\cdots,\quad \Delta_9' = \frac{Y_9}{9\,h} - \frac{y_9}{9\,h},$$

worin h die Größe der gleichweit abstehenden Intervalle bedeutet, statt diese Methode auf die absoluten Fehler der Ordinaten

$$\Delta_1 = Y_1 - y_1,\quad \Delta_2 = Y_2 - y_2,\quad \Delta_9 = Y_9 - y_9$$

anzuwenden; hiedurch wird die Wichtigkeit der beobachteten Ordinaten auf großen Entfernungen abgeschwächt. Siehe auch den Schluß zum 1. Beispiel auf Seite 165 im I. Bande.

Hiedurch resultiert:

$$2)\qquad u = \frac{y}{x} = a + bx + cx^2 + \cdots\cdots$$

Bei in Saschén ausgedrückten x und in Fuß ausgedrückten y hat man

x in Saschén	u
50	0·2020
100	0·1885
150	0·1645
200	0·1434
250	0·1176
300	0·0897
350	0·0581
400	0·0244
450	— 0·0122

Nimmt man 50 Saschén als Maßeinheit für die Abszissen an und bezeichnet diese zum Unterschiede von jenen Abszissen, deren Maßeinheit eine Saschén ist, durch x', so hat man in den Formeln dieses Punktes $x = x'$ und, weil die Anzahl der beobachteten Ordinaten neun beträgt, $n = 9$ zu setzen. Hienach kann folgende Tabelle zusammengestellt werden.

i	u_i	Δu_i	$\Delta^2 u_i$	$\Delta^3 u_i$
1	0·2020	— 0·0135	— 0·0105	0·0134
2	0·1885	— 0·0240	0·0029	— 0·0076
3	0·1645	— 0·0211	— 0·0047	0·0026
4	0·1434	— 0·0258	— 0·0021	— 0·0016
5	0·1176	— 0·0279	— 0·0037	0·0016
6	0·0897	— 0·0316	— 0·0021	— 0·0008
7	0·0581	— 0·0337	— 0·0029	
8	0·0244	— 0·0366		
9	— 0·0122			
	0·9760 = $[u_i]$			

Um u durch ein Glied $L_0 \lambda_0 (x')$ auszudrücken, hat man

$$L_0 = \frac{[u_i]}{n} = \frac{0{\cdot}9760}{9} = 0{\cdot}10844, \quad \lambda_0 (x') = 1,$$

folglich

$$L_0 \lambda_0 (x') = 0{\cdot}10844.$$

Um die Summe der Fehlerquadrate S_0 zu finden, sind folgende Berechnungen auszuführen:

	u_i^2
	0·040 804 00
	0·035 532 25
	0·027 060 25
	0·020 563 56
	0·013 829 76
	0·008 046 09
	0·003 375 61
	0·000 595 36
	0·000 148 84
$[u_i^2] =$	0·149 985 82
$-\frac{n}{1} L_0^2 =$	$-$ 0·105 833 11
$S_0 =$	0·044 152 71

Der mittlere Fehler, mit welchem das gefundene Glied die gegebenen Größen u ausdrückt, folgt aus

$$\mu = \sqrt{\frac{S_0}{n}} = 0{\cdot}070.$$

Weil ein so großer mittlerer Fehler unzulässig ist, so wird das zweite Glied $L_1 \lambda_1 (x')$ gesucht. Hiezu ist zunächst die durch L_1 ausgedrückte Summe zu berechnen. Man findet

$$\frac{i(n-i)}{1^2} \varDelta u_i$$

$$\begin{aligned}
1.8.&-0{\cdot}0135 = -0{\cdot}1080\\
2.7.&-0{\cdot}0240 = -0{\cdot}3360\\
3.6.&-0{\cdot}0211 = -0{\cdot}3798\\
4.5.&-0{\cdot}0258 = -0{\cdot}5160\\
5.4.&-0{\cdot}0279 = -0{\cdot}5580\\
6.3.&-0{\cdot}0316 = -0{\cdot}5688\\
7.2.&-0{\cdot}0337 = -0{\cdot}4718\\
8.1.&-0{\cdot}0366 = -0{\cdot}2928
\end{aligned}$$

$$\left[\frac{i(n-i)}{1^2} \varDelta u_i\right] = -3{\cdot}2312;$$

setzt man diesen Summenwert in den Ausdruck für L_1 ein, so ergibt sich

$$L_1 = 0{\cdot}13463.$$

$$\varphi_1(1) = -\frac{2}{10},$$

$$\lambda_1(x') = 1 - \frac{2}{10} x',$$

somit ist

$$L_1 \lambda_1 (x') = 0{\cdot}134\,63 - 0{\cdot}026\,926\, x'.$$

Zur Bestimmung von S_1 hat man

$$\begin{array}{rr} S_0 = & 0{\cdot}044\,152\,71 \\ -\frac{n}{3}\frac{n-1}{n+1} L_1^2 = & -\,0{\cdot}043\,500\,57 \\ \hline S_1 = & 0{\cdot}000\,652\,14. \end{array}$$

Der mittlere Fehler, mit welchem die beiden ersten Glieder die Größen u ausdrücken, resultiert aus

$$\mu = \sqrt{\frac{S_1}{n}} = 0{\cdot}0085.$$

Da dieser Fehler noch zu groß ist, so ist das dritte Glied $L_2 \lambda_2 (x')$ zu bestimmen. Zu diesem Zwecke hat man zunächst die durch L_2 ausgedrückte Summe zu berechnen. Man findet

$$\begin{array}{r} \frac{i(i+1)(n-i)(n-i-1)}{1^2 . 2^2} \Delta^2 u_i \\ 1 . 28 . -0{\cdot}0105 = -0{\cdot}2940 \\ 3 . 21 . +0{\cdot}0029 = 0{\cdot}1827 \\ 6 . 15 . -0{\cdot}0047 = -0{\cdot}4230 \\ 10 . 10 . -0{\cdot}0021 = -0{\cdot}2100 \\ 15 . \;\;6 . -0{\cdot}0037 = -0{\cdot}3300 \\ 21 . \;\;3 . -0{\cdot}0021 = -0{\cdot}1323 \\ 28 . \;\;1 . -0{\cdot}0029 = -0{\cdot}0812 \\ \hline \left[\frac{i(i+1)(n-1)(n-i-1)}{1^2 . 2^2} \Delta^2 u_i\right] = -\,1{\cdot}2878; \end{array}$$

setzt man diesen Summenwert in den Ausdruck für L_2 ein, so folgt

$$L_2 = -0{\cdot}025\,552.$$

$$\varphi_1(2) = -\frac{6}{11}, \quad \varphi_2(2) = \frac{6}{110}$$

$$\lambda_2 (x') = 1 - \frac{6}{11} x' + \frac{6}{110} x'^2,$$

somit ist

$$L_2 \lambda_2 (x') = -0{\cdot}025\,552 + 0{\cdot}013\,937\, x' - 0{\cdot}001\,393\,7\, x'^2.$$

Zur Bestimmung von S_2 hat man

$$\begin{array}{rr} S_1 = & 0{\cdot}000\,652\,14 \\ -\frac{n}{5} \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n+2} L_2^2 = & -\,0{\cdot}000\,598\,30 \\ \hline S_2 = & 0{\cdot}000\,053\,84. \end{array}$$

Der mittlere Fehler, mit welchem die drei ersten Glieder die Größen u ausdrücken, ergibt sich aus

$$\mu = \sqrt{\frac{S_2}{n}} = 0{\cdot}0024.$$

Diesen mittleren Fehler kann man als zulässig erklären; es soll aber noch die Berechnung des vierten Gliedes $L_3 \lambda_3(x')$ gezeigt werden. Hiezu ist zunächst die durch L_3 bezeichnete Summe zu berechnen. Es ist

$$\frac{i(i+1)(i+2)(n-i)(n-i-1)(n-i-2)}{1^2 . 2^2 . 3^2} \Delta^3 u_i$$

$$\begin{array}{rrcr} 1 . 56 . & 0{\cdot}0134 & = & 0{\cdot}7504 \\ 4 . 35 . & -0{\cdot}0076 & = & -1{\cdot}0640 \\ 10 . 20 . & 0{\cdot}0026 & = & 0{\cdot}5200 \\ 20 . 10 . & -0{\cdot}0016 & = & -0{\cdot}3200 \\ 35 . \;\;4 . & 0{\cdot}0016 & = & 0{\cdot}2240 \\ 56 . \;\;1 . & -0{\cdot}0008 & = & -0{\cdot}0448 \end{array}$$

$$\left[\frac{i(i+1)(i+2)(n-i)(n-i-1)(n-i-2)}{1^2 . 2^2 . 3^2} \Delta^3 u_i\right] = 0{\cdot}0656;$$

setzt man diesen Summenwert in den Ausdruck für L_3 ein, so ergibt sich

$$L_3 = -\,0{\cdot}000\,911$$

$$\varphi_1(3) = -\frac{587}{660} \qquad \varphi_2(3) = \frac{10}{44} \qquad \varphi_3(3) = -\frac{1}{66},$$

$$\lambda_3(x') = 1 - \frac{587}{660} x' + \frac{10}{44} x'^2 - \frac{1}{66} x'^3,$$

somit ist

$$L_3 \lambda_3(x') = -\,0{\cdot}000\,911 + 0{\cdot}000\,810\,x' - 0{\cdot}000\,207\,1\,x'^2 + 0{\cdot}000\,013\,8\,x'^3.$$

Zur Bestimmung von S_3 hat man

$$\begin{array}{rl} S_2 = & 0{\cdot}000\,053\,84 \\ -\frac{n}{7} \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n+2} \cdot \frac{n-3}{n+3} L_3^2 = & -\,0{\cdot}000\,000\,27 \\ \hline S_3 = & 0{\cdot}000\,053\,57. \end{array}$$

Der mittlere Fehler, mit welchem die vier ersten Glieder die Größen u ausdrücken, resultiert aus

$$\mu = \sqrt{\frac{S_3}{n}} = 0{\cdot}0024.$$

Bei den gefundenen 4 Gliedern der Reihe stehen bleibend, erhält man für die gesuchte Größe u

$$\begin{array}{rl} & 0{\cdot}108\,44 \\ & 0{\cdot}134\,63 - 0{\cdot}026\,93\,x' \\ & -\,0{\cdot}025\,55 + 0{\cdot}013\,94\,x' - 0{\cdot}001\,394\,x'^2 \\ & -\,0{\cdot}000\,91 + 0{\cdot}000\,81\,x' - 0{\cdot}000\,207\,x'^2 + 0{\cdot}000\,013\,8\,x'^3 \\ \hline u = & 0{\cdot}216\,61 - 0{\cdot}012\,18\,x' - 0{\cdot}001\,601\,x'^2 + 0{\cdot}000\,013\,8\,x'^3. \end{array}$$

Weil $x' = \frac{x}{50}$ ist, so hat man

$$u = 0{\cdot}216\,61 - 0{\cdot}000\,243\,6\,x - 0{\cdot}000\,000\,6404\,x^2 + 0{\cdot}000\,000\,000\,1104\,x^3.$$

Da $u = \frac{y}{x}$ gesetzt wurde, so folgt schließlich für die zu suchende Flugbahngleichung

$$y = 0{\cdot}216\,61\,x - 0{\cdot}000\,243\,6\,x^2 - 0{\cdot}000\,000\,6404\,x^3 + 0{\cdot}000\,000\,000\,1104\,x^4;$$

hierin erscheint x in Saschén und y in Fuß ausgedrückt.

Wenn man mit Hilfe dieser Gleichung die Werte der Ordinaten für jene Abszissenwerte berechnet, für welche die Ordinaten durch Beobachtung gefunden wurden, so erhält man die folgende Zusammenstellung

x in Saschén	y in Fuß gerechnet	y in Fuß beobachtet	Differenz zwischen der gerechneten und der beobachteten Ordinate
50	10·14	10·10	0·04
100	18·60	18·85	— 0·25
150	24·95	24·67	0·28
200	28·63	28·68	— 0·05
250	29·36	29·42	— 0·06
300	26·66	26·90	— 0·24
350	20·17	20·33	— 0·16
400	9·51	9·76	— 0·25
450	— 5·68.	— 5·47	— 0·21

Der Vergleich mit den durch Beobachtung gefundenen Werten läßt nichts zu wünschen übrig und bestätigt neuerdings die Zulässigkeit der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Schießtheorie.

Eine weitere nützliche Anwendung der Interpolationsformeln nach der Methode der kleinsten Quadrate findet man in „Mémoire sur les expériences faites a l'établissement de M. Krupp, a Essen, au mois de novembre 1867, pour déterminer les pressions des gaz de la poudre dans l'ame des bouches a feu; par N. Mayevski". Extrait du tome XXI des Mémoires couronnés et autres Mémoires, publiés par l'Académie royale de Belgique. — 1869.

28. Allgemeine Anhaltspunkte für die Durchführung von Rechnungen, wenn die Reihe der Abgangswinkel gegeben ist.

Sei φ_x der der horizontalen Entfernung x entsprechende Abgangswinkel, so kann gesetzt werden

$$\sin 2\varphi_x = k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + \cdots\cdots,$$

wobei $k_1 = \frac{g}{V^2}$. Man kann dann, wenn V bekannt ist, für die weitere Rechnung die Formel

$$\sin 2\varphi_x - \frac{g}{V^2} x = k_2 x^3 + k_3 x^3 + \cdots\cdots$$

zu Grunde legen. Sind die Werte des Argumentes x äquidistant vorausgesetzt, so wird man die vereinfachten Formeln des speziellen Falles im Punkte 27 dieses Abschnittes benützen und den Versuch in nachstehender Weise durchführen.

Beim Gewehre werden in gleichen Abständen voneinander und vom schießenden Gewehre Scheiben aufgestellt und die beim Schießen erhaltenen Terrainwinkel vom Gewehre zum mittleren Treffpunkte der abgegebenen Schußserie von dem tatsächlichen Abgangswinkel abgezogen, um vergleichbare Resultate zu erhalten.

Bei Geschützen schießt man am besten auf 1000 *m*, 2000 *m*, 3000 *m* u. s. w. mit Abgangswinkeln, welche annähernd diese Distanzen ergeben.

Die aus Versuchen erhaltenen, diesen Abgangswinkeln zugehörigen mittleren Schußweiten können auf allen Entfernungen als mit gleicher Genauigkeit ermittelt angesehen werden, ohne daß durch diese der Wirklichkeit nicht ganz entsprechende Annahme ein größerer Fehler begangen wird.

Findet das Schießen an verschiedenen Tagen statt, so müssen überdies die erhaltenen Schußweiten auf ein und dasselbe spezifische Luftgewicht und auf Windstille reduziert werden.

Hat man die Entfernungen, welche den verschiedenen Abgangswinkeln entsprechen, ermittelt, so sucht man die Differenz Δx der gefundenen Entfernung von der nächstliegenden der äquidistanten Schußweiten 1000 *m*, 2000 *m*, 3000 *m* u. s. w. und berechnet mittels der betreffenden Formeln der äußeren Ballistik die Änderung $\Delta\varphi$ des Abgangswinkels, welche notwendig ist, um eine Schußweite von 1000 *m* beziehungsweise 2000 *m* u. s. w. zu erreichen.

Auf diese Weise findet man die Abgangswinkel, welche äquidistanten Schußweiten entsprechen, und kann nunmehr die vereinfachten Formeln des speziellen Falles im Punkte 27 dieses Abschnittes anwenden.

Benützte Quellen.

Bei der Bearbeitung dieses Abschnittes wurden vorzugsweise nachstehende Werke benützt:

Ausführliches Lehrbuch der höheren Mathematik von Adam Burg. Erster Band. Wien 1832.

Vollständiger Lehrkurs der reinen Mathematik von L. B. Francoeur, aus dem Französischen übersetzt von Dr. Edmund Külp. Zweiten Bandes drittes Buch. Bern, Chur und Leipzig 1850.

Lehrbuch der Elementar-Mathematik von Dr. Theodor Wittstein. Dritter Band. Erste Abteilung. Zweite Auflage. Hannover 1880.

Lehrbuch der höheren Mathematik von Dr. Josef Ph. Herr. Dritte verbesserte Auflage. Erster Band. Wien 1877.

Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens von Dr. Heinrich Bruns. Leipzig 1903.

Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendungen auf die Geodäsie, die Physik und die Theorie der Meßinstrumente von F. R. Helmert. Zweite Auflage. Leipzig und Berlin 1907.

Die Theorie der Wahrscheinlichkeit und ihre Anwendung im Gebiete des Schießwesens von Nikolaus Wuich. Wien 1877.

Sur l'établissement et l'usage des tables de tir par E. Jouffret. Paris 1874.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung, ihre Anwendung auf das Schießen und auf die Theorie des Einschießens von N. Sabudski, aus dem Russischen übersetzt von Ritter von Eberhard. Stuttgart 1906.

Traité de balistique extérieure par N. Mayevski. Paris 1872.

V. Abschnitt.

Streuung und deren Ursachen.

A. Streuung der Flugbahnen.

1. Streuung der Treffpunkte im einfachen Trefferbilde.

Bei Untersuchung von Schießergebnissen sind zwei Fälle gesondert zu unterscheiden:

a) Die Treffpunkte der Geschosse liegen alle in einer Ebene — Schießen von Aufschlaggeschossen — und

b) die Sprengpunkte der mit Zeitzündern versehenen Geschosse sind im Raume nach allen Richtungen verteilt — Schießen von Tempiergeschossen oder Zeitzündergeschossen.

In diesem Abschnitte werden jene Ursachen angegeben, durch welche die verschiedenen Lagen der Treffpunkte beziehungsweise der Sprengpunkte hervorgerufen werden.

Wird aus einer Feuerwaffe unter anscheinend vollkommen gleichen Verhältnissen in unmittelbarer Aufeinanderfolge eine Anzahl von Schüssen mit Aufschlaggeschossen abgegeben, so werden die Treffpunkte nicht in einem Punkte zusammenfallen, sondern sich auf der Zielfläche verteilen und man erhält ein sogenanntes einfaches Trefferbild, welches, je nachdem die Zielfläche eine horizontale oder vertikale Ebene ist, horizontales oder vertikales einfaches Trefferbild genannt wird.

Die Existenz verschiedener Treffpunktslagen zeigt, daß die Flugbahnen der einzelnen Geschosse nicht in eine einzige zusammenfallen, sondern daß sie eine Flugbahngarbe oder den sogenannten Flugbahnkegel bilden. Entsprechend der Bezeichnung „einfaches Trefferbild" spricht man mitunter von einer einfachen Flugbahngarbe.

Die Erscheinung der Abweichung der einzelnen Bahnen und Treffpunkte voneinander trotz scheinbar gleicher Schußelemente wird

Streuung der Flugbahnen, auch Streuung der Treffpunkte oder kurz Streuung, ihre Ursachen werden Streuungsursachen oder zufällige Ursachen genannt.

Die Streuungsursachen oder zufälligen Ursachen bei einer Feuerwaffe sind in Ungleichmäßigkeiten der Abgangsrichtung, der Anfangsgeschwindigkeit, der Luftdichte, der Form und Querschnittsbelastung (Kaliber und Gewicht) des Geschosses, der Abgangsrichtung der Geschoßachse, der Richtung und Stärke des Windes u. s. w. zu suchen.

Die Abgangsrichtung wird sich bei der einzelnen Feuerwaffe infolge der Veränderlichkeit des Vibrations-(Erhebungs-)Winkels von Schuß zu Schuß ändern; auch kann sie dadurch beeinflußt werden, daß der Geschoßschwerpunkt nicht genau in der Längenachse des Geschosses liegt; ferner tragen Richtfehler des Mannes und beim Gewehr außerdem Fehler im Abkommen, schließlich die beim Ausströmen der Pulvergase aus der Mündung entstehenden Seitendrücke zur zufälligen Änderung der Abgangsrichtung bei.

Gewisse Ungleichmäßigkeiten in der Bedienung und Handhabung der Feuerwaffe sind selbst bei der sorgfältigsten Ausbildung des Soldaten unvermeidlich und bilden gleichfalls ein Glied in der Reihe von Zufälligkeiten, welche die Streuung verursachen. So ist es beispielsweise unmöglich, die Richtmittel, welche einen verschiedenen Grad von Empfindlichkeit haben, beim Gebrauche gleichmäßig einzustellen, sowie es auch unmöglich ist, die durch die Visierpunkte bestimmte Visierlinie in jedem Falle genau auf denselben Punkt einzustellen. Verschiedenheiten in dieser Hinsicht involvieren aber Änderungen der Abgangsrichtung, mithin auch Änderungen in der Lage der Flugbahn.

Die wichtigsten zufälligen Ursachen, welche Ungleichmäßigkeiten in der Anfangsgeschwindigkeit bedingen, sind: Unterschiede im Gewichte der Pulverladung, in der Lagerung, Größe (Oberfläche) und Dichte der Pulverelemente (Röhre, Band, Plättchen, Scheibchen u. s. w.) sowie in der chemischen Zusammensetzung, im Feuchtigkeitsgehalte und der Temperatur des Pulvers (Ungleichheit der chemischen Vorgänge bei der Verbrennung); Verschiedenheiten im Gewichte und Kaliber der Geschosse, in den Dimensionen der Führungsteile derselben, wechselnde Beschaffenheit der Bohrung, bedingt durch den Grad der Erhitzung des Rohrmetalles, durch Pulverrückstände im Laderaume sowie durch Verunreinigung der Bohrung; verschiedene Einwirkung der Zündmittel auf die Pulverladung; Verschiedenheiten in der Größe des anfänglichen Verbrennungsraumes, welcher durch verschiedenes Ansetzen der Geschosse beeinflußt werden kann u. s. w.

Unterschiede in der spezifischen Querschnittsbelastung, Geschoßform, Schwerpunktslage, ferner die anfängliche Stellung der Längenachse des Geschosses in Bezug auf die Abgangsrichtung, die von der veränderlichen Anfangsgeschwindigkeit abhängige und deshalb selbst veränderliche Rotationsgeschwindigkeit bedingen Verschiedenheiten in dem Einflusse des Luftwiderstandes auf die Geschoßbewegung.

Außer den zufälligen oder Streuungsursachen treten bei einer Feuerwaffe noch sogenannte regelmäßige oder systematische Ursachen auf, durch welche das Trefferbild nur eine Verschiebung im Sinne dieser Ursachen erfährt, während die Gruppierung der Treffer durch dieselben nicht beeinflußt wird.

Zu den regelmäßigen oder systematischen Ursachen gehören: Fehlerhafte Stellung der Visierpunkte oder der Richtbogen-(Quadranten-)Ebene (schiefer Räderstand beziehungsweise nicht horizontale Schildzapfenachse, Verdrehen der Feuerwaffe); Fehler in der Distanzbestimmung; konstante Abweichung der herrschenden Luftdichte — Tagesdichte — von der Normaldichte, d. h. jener Dichte, welche der Ermittlung des erforderlichen Abgangswinkels zu Grunde gelegt wurde (Höhenlage des Schießplatzes); konstante Windströmung; Einfluß der Eigenbewegung des Geschützes, z. B. auf Schiffen; Abweichung der Beschleunigung der Schwere und des Einflusses der Erdrotation am Schießorte von jenen, welche der Ermittlung der Schußelemente zu Grunde gelegt wurden; die atmosphärische Refraktion, durch welche der richtende (zielende) Mann das Ziel in einer Lage erblickt, welche von der wirklichen abweicht; ungünstige Beleuchtung der Visierpunkte oder des Zieles; veränderter Zustand der Munition u. dgl.

Die durch die regelmäßigen Ursachen hervorgerufenen Geschoßabweichungen können entweder im vorhinein berechnet, daher auch berücksichtigt werden, oder sie können nachträglich durch eine entsprechende Korrektur beseitigt werden, sobald deren Größe empirisch festgestellt wurde.

Beim praktischen Schießen sind die regelmäßigen Fehlerursachen zu Beginn der Feuertätigkeit nur teilweise, meist aber gar nicht bekannt. Es muß daher zuerst das Einschießen erfolgen, welches die durch die regelmäßigen Ursachen hervorgerufenen Abweichungen der Trefferbilder ausschalten soll.

Aus dem Vorhergehenden erkennt man, daß die durch die zufälligen Ursachen hervorgerufenen Geschoßabweichungen unausschaltbar, jene durch die regelmäßigen Ursachen hervorgerufenen hingegen ausschaltbar sind.

2. Mittlerer Treffpunkt einer Schußserie und mittlerer Treffpunkt. Streuungsfläche. Trefferbildachsen.

Es sei die Annahme gemacht, daß man die genauen Schußelemente, welche für das Schießen mit einer Feuerwaffe gegen einen bestimmten, beispielsweise auf einer zur Schußrichtung senkrechten Zielebene — Scheibe — markierten Punkt erforderlich sind, kennt und auch benützt, und daß keine regelmäßigen Ursachen auf eine Ablenkung der Geschosse hinwirken. Daß trotzdem nicht alle Schüsse den in Betracht gezogenen Punkt treffen werden, wurde bereits erkannt. Vielmehr werden die einzelnen Treffer der Größe und dem Sinne nach verschiedene Entfernungen, Abweichungen genannt, von irgend einer in der Scheibenebene durch den erwähnten Punkt gezogenen Geraden aufweisen.

Die durch die zufälligen Ursachen hervorgerufenen Abweichungen der Treffpunkte folgen einander hinsichtlich ihres Sinnes bei oberflächlicher Beurteilung anscheinend völlig regellos. Und doch weisen sie eine bemerkenswerte Gesetzmäßigkeit auf, welche umso deutlicher hervortritt, je mehr Treffer sich zu einem Trefferbilde vereinen. Diese Gesetzmäßigkeit äußert sich darin, daß die Anzahl oder die Dichte der Treffer (in der etwa zur Schußrichtung senkrecht gedachten Scheibe von hinreichender Ausdehnung) in der Umgebung eines, ungefähr die Mitte des Trefferbildes einnehmenden Punktes am größten ist und von da nach allen Richtungen hin ziemlich rasch abnimmt. Dieser Punkt wird als der mittlere Treffpunkt der Schußserie bezeichnet. Stillschweigend wird hiebei eine endliche Schußzahl vorausgesetzt.

Wie man diesen ausgezeichneten Punkt bestimmt, ist im Punkte 4 dieses Abschnittes angegeben. Im Punkte 6 wird gezeigt, daß die Summe der Quadrate der Abstände der einzelnen Treffer von irgend einer durch den mittleren Treffpunkt der Serie gezogenen Geraden (Fehlerquadratsumme) ein Minimum wird; es ist also insbesondere auch die Summe der Quadrate der in horizontaler Richtung genommenen Abweichungen und ebenso jene der in vertikaler Richtung genommenen Abstände ein Minimum.

Es sei schon hier darauf hingewiesen, daß sich durch Anreihung eines Treffers oder mehrerer Treffer zu einem bereits gegebenen Trefferbilde die Lage des der gesamten Schußserie zukommenden mittleren Treffpunktes ändert.

Die dem mittleren Treffpunkte einer Schußserie entsprechende Geschoßbahn wird die mittlere Flugbahn dieser Schußserie genannt.

Der Ort, wo sich der mittlere Treffpunkt einer Schußserie befinden soll, heißt beabsichtigter mittlerer Treffpunkt der Schußserie zum Unterschiede von dem wirklichen mittleren Treffpunkte der Schußserie, d. i. dem Orte, wo der mittlere Treffpunkt der Schußserie sich tatsächlich befindet.

Von dem einer Serie von Schüssen beschränkter Anzahl zukommenden mittleren Treffpunkt ist jener mittlere Treffpunkt zu unterscheiden, welcher aus einer unendlich großen Anzahl von unter scheinbar gleichen Verhältnissen abgegebenen Schüssen resultieren würde. Dieser Punkt heißt der mittlere Treffpunkt; man sieht leicht ein, daß dieser nie genau bestimmt werden kann.

Gegebenen und scheinbar unveränderlichen Bedingungen des Schießens entspricht ein ganz bestimmter mittlerer Treffpunkt. Zur Vorstellung desselben gelangt man auf folgende Art:

Wenn bei einer Serie von Schüssen, die aus einer Feuerwaffe abgegeben wird, die Bedingungen des Schießens kongruent wären, so müßten sich die Bahnen der Geschoßschwerpunkte vollkommen decken; alle Bahnen der Serie wären dann in einer einzigen Bahn konzentriert. Solchen Bedingungen entspräche in der Zielfläche ein ganz bestimmter Punkt, nämlich der gemeinsame Durchgangspunkt sämtlicher Bahnen. Dieser Punkt wäre der mittlere Treffpunkt, die ihm entsprechende Bahn die mittlere Flugbahn. Die Erfahrung lehrt jedoch, wie schon gesagt wurde, daß sich die Bedingungen des Schießens von Schuß zu Schuß ändern, man erhält anstatt einer einzigen Flugbahn eine Garbe von Flugbahnen, die sogenannte einfache Flugbahngarbe.

Werden die äußersten Treffpunkte miteinander kontinuierlich verbunden, so schließt die so erhaltene geschlossene Linie die Streuungsfläche ein. Mit zunehmender Schußzahl macht sich sowohl in der Gestalt der Streuungsfläche als auch in der Gruppierung der Treffer eine symmetrische Anordnung bezüglich zweier zu einander senkrechten Achsen immer deutlicher geltend. Diese Achsen liegen bei vertikalen und horizontalen Scheiben in der durch die Schußrichtung gedachten Vertikalebene und senkrecht zu derselben.

Diese zwei Achsen heißen die Trefferbildachsen des Systems. Ihr regelmäßiges Auftreten läßt sich einfach dadurch erklären, daß die Streuungsursachen hauptsächlich nach zwei Richtungen, der vertikalen und horizontalen, in unabhängiger Weise tätig sind, oder anders ausgedrückt, es ruft ein Teil der Fehlerursachen allein in der Richtung der einen Trefferbildachse, ein anderer Teil unabhängig von dem anderen allein in der Richtung der zweiten Treffer-

bildachse Abweichungen hervor. Die gewählte Bezeichnung erscheint dadurch gerechtfertigt, daß in Bezug auf diese beiden Geraden achsiale (orthogonale) Symmetrie*) im Trefferbilde herrscht, oder mit anderen Worten, jedem Treffer auf einer Seite der Achse entspricht mit gleicher Wahrscheinlichkeit ein symmetrisch gelegener Treffer auf der anderen Seite der Achse. Diese Eigenschaft kommt in einem Trefferbilde, dessen Ausdehnung in einer Richtung von der Lage derselben abhängig ist, nur den erwähnten Achsen zu; in Bezug auf jede andere Richtung kann von achsialer Symmetrie nicht gesprochen werden. Nur dann, wenn zufällig die Streuungen nach den beiden Richtungen der Achsen gleich groß sind, herrscht bezüglich jeder durch den mittleren Treffpunkt gelegten Geraden achsiale Symmetrie.

Die Bestimmung der Richtungen der Trefferbildachsen enthält der Punkt 8 dieses Abschnittes, ferner der VIII. Abschnitt, welcher das Gesetz der Fehler in der Ebene behandelt.

Ein das Trefferbild umfassendes Rechteck, dessen Seiten zu den Trefferbildachsen des Systems parallel sind, heißt Streuungsrechteck.

Die Gruppierungsgesetze der Bahnen in der einfachen Flugbahngarbe beziehungsweise der Treffer im einfachen Trefferbilde bilden den Gegenstand der Treffwahrscheinlichkeitstheorie.

3. Streuung der mittleren Treffpunkte. Zusammengesetzter mittlerer Treffpunkt.

Denkt man sich mehrere Feuerwaffen derselben Gattung gegen denselben Zielpunkt gleichzeitig tätig, d. h. es wird aus jeder dieser Feuerwaffen eine Serie von Schüssen abgegeben, so müßten bei vollkommen gleichem Verhalten der Feuerwaffen und gleichen Schußelementen die diesen Serien zukommenden mittleren Treffpunkte der einzelnen Feuerwaffen in einem Punkte der Zielfläche zusammenfallen. Dies wird jedoch infolge der unvermeidlichen Verschiedenheiten in den einzelnen Feuerwaffen und ihrer Richtmittel, ferner infolge der Un-

---

*) Die Drehung einer ebenen Figur um eine Achse, die in ihrer Ebene liegt, um einen gestreckten oder flachen Winkel (180°), heißt Umwendung oder Umklappung. Eine Figur, welche nach einer Umwendung ihre Anfangslage deckt, heißt symmetrisch in Bezug auf die Drehachse. Zwei Stücke, die bei der Umklappung ihre Lagen vertauschen, heißen entsprechend oder homolog. Über zentrische Symmetrie siehe die Fußnote zum Punkte 5 dieses Abschnittes.

gleichheiten bei der Bedienung und Handhabung der Feuerwaffen und ihrer Richtmittel, wodurch insbesondere der Zielpunkt nicht mit gleicher Schärfe erfaßt wird, weiters infolge der Ungleichheiten im Gewichte und der Elastizität der Schießgestelle, im Verhalten deren Unterlagen u. s. w. nicht der Fall sein, sondern die mittleren Treffpunkte werden sich über eine gewisse Fläche ausbreiten, was man Streuung der diesen Serien zukommenden mittleren Treffpunkte nennt. Diese Streuung wird also durch die bei den einzelnen Feuerwaffen auftretenden regelmäßigen Ursachen, die sich aber von Feuerwaffe zu Feuerwaffe ändern, hervorgerufen. So wird z. B. eine Feuerwaffe konstant höher (weiter), eine andere konstant tiefer (kürzer) schießen als die übrigen u. s. w., so daß sich hiedurch Porteedifferenzen ergeben. Durch das Einschießen werden die Folgen der regelmäßigen Ursachen wohl tunlichst verkleinert, aber nie ganz ausgeschaltet werden können. Die den einzelnen Feuerwaffen zukommenden regelmäßigen Ursachen bekommen beim Zusammenwirken der Feuerwaffen den Charakter der Zufälligkeit. Das Trefferbild dieser mittleren Treffpunkte muß, weil durch zufällige Ursachen bedingt, dieselbe gesetzmäßige Gruppierung aufweisen, wie das einfache Trefferbild.

Bezüglich der Qualifikation der Ursachen als regelmäßig ist es also notwendig, zu unterscheiden, ob man ein einfaches oder zusammengesetztes Trefferbild vor sich hat; denn gewisse Ursachen, welche beim einfachen Trefferbilde den Charakter von regelmäßigen Ursachen haben, erhalten beim zusammengesetzten Trefferbild den Charakter der Zufälligkeit.

Sieht man von der Streuung der mittleren Treffpunkte ab und berücksichtigt nur die den einzelnen Feuerwaffen eigentümlichen — als gleich angenommenen — Streuungen, so resultiert eine Flugbahngarbe beziehungsweise ein Trefferbild, das dieselbe Ausdehnung erwarten läßt und dieselben Gruppierungsgesetze besitzt wie die einfache Flugbahngarbe beziehungsweise das einfache Trefferbild. Die Gruppierung der Treffer wird jedoch dichter als im vorhergehenden Falle sein.

Kombiniert man die Streuung der mittleren Treffpunkte mit der Streuung der einzelnen Waffen, so ergibt sich das den wirklichen Verhältnissen entsprechende zusammengesetzte oder kombinierte Trefferbild, auch Trefferbild im Abteilungsfeuer genannt. Der einem solchen Trefferbilde entsprechende mittlere Treffpunkt heißt zusammengesetzter mittlerer Treffpunkt der Serien.

Die den Treffpunkten im zusammengesetzten Trefferbilde zukommenden Bahnen bilden die zusammengesetzte Flugbahn-

garbe; mitunter wird letztere als Flugbahngarbe beim Abteilungsfeuer bezeichnet.

Die vorstehend angeführten Begriffe über die Streuung der mittleren Treffpunkte und das zusammengesetzte Trefferbild treten klar aus dem folgenden Beispiele, welchem das Schießen aus Handfeuerwaffen zu Grunde gelegt ist, hervor. Hiebei geht man zunächst von idealen Voraussetzungen aus und betrachtet *z* Schützen, welche sich sowohl vollkommen kongruent verhalten als auch mit vollkommen kongruenten Feuerwaffen ausgerüstet sind.

Ist der Zielpunkt gemeinsam, so wird man unter den gemachten Voraussetzungen bei Abgabe von *n* Salven *z* mathematisch genau sich überdeckende einfache Trefferbilder erhalten, mit anderen Worten, es würde eine Konzentration der einfachen Trefferbilder beziehungsweise der einfachen mittleren Treffpunkte stattfinden. Also nur unter diesen idealen Verhältnissen wären die Verhältnisse beim Abteilungsfeuer jenen beim Schießen des einzelnen Soldaten identisch.

Wird auf reale Verhältnisse übergegangen, d. h. nimmt man die Schützen und die Feuerwaffen, wie sie tatsächlich sind, so ergibt sich: Die Schützen kommen verschieden ab, ebenso weichen die Feuerwaffen von einander ab und sind namentlich die Unterschiede im Abkommen der Schützen ziemlich bedeutend.

Was wird nun die Folge der Einwirkung der erwähnten, ganz zufälligen Abweichungen sein?

Ebenso wie sich beim Schießen des einzelnen Soldaten die *n* Punkte von ihrem Konzentrationspunkte entfernen, werden sich hier beim Abteilungsfeuer die *z* mittleren Treffpunkte — und mit ihnen die zugehörigen Trefferbilder — von dem gemeinsamen Konzentrationspunkte nach denselben Gesetzen entfernen wie die einzelnen Treffpunkte im einfachen Trefferbilde.

Dieses Auseinandergehen der einfachen Trefferbilder beziehungsweise der mittleren Treffpunkte nennt man, wie bereits gesagt, die Streuung der mittleren Treffpunkte beziehungsweise die Streuung der Trefferbilder und den Konzentrationspunkt der ersteren den zusammengesetzten mittleren Treffpunkt oder auch den mittleren Treffpunkt des zusammengesetzten Trefferbildes.

Den Streuungsgesetzen zufolge wird die Dichte der Gruppierung der einfachen mittleren Treffpunkte beziehungsweise der einfachen Trefferbilder um den zusammengesetzten mittleren Treffpunkt mit der Entfernung von demselben gesetzmäßig abnehmen. Die einfachen

Trefferbilder werden sich umsomehr übergreifen, je größer die abgegebene Schußzahl war. Dadurch erklärt sich die Erscheinung, daß bei hinreichend großer Zahl abgegebenen Schüssen und tätigen Feuerwaffen ein zusammengesetztes Trefferbild resultiert, welches die gleiche Gesetzmäßigkeit in der Treffergruppierung aufweist wie ein einfaches Trefferbild, das man dann erhalten würde, wenn die gleiche Schußzahl von einem einzelnen Schützen, jedoch mit entsprechend geringerer Schußpräzision abgegeben worden wäre. Diese Tatsache wird durch neuere Schießversuche in ausreichendem Maße bestätigt und es ist daher die Annahme einer Kernzone (Kerngarbe), welche 70% der im Abteilungsfeuer abgegebenen Schüsse in fast gleichmäßiger Verteilung enthalten soll, nur als grober, aber für die Praxis hinreichend genauer Näherungswert zu betrachten.

Nun sind auch regelmäßige Ursachen für das zusammengesetzte Trefferbild denkbar, z. B. eine auftretende konstante Windströmung, eine Änderung der Luftdichte, der Temperatur u. s. w.; hiedurch erfährt das gesamte Trefferbild eine Verschiebung, und zwar ohne Änderung der relativen Lage der einfachen Trefferbilder und ohne Änderung der zu erwartenden Ausdehnung der letzteren (Wandern der mittleren Treffpunkte). Es ist klar, daß sich die angeführten Ursachen während des Schießens vergrößern oder verkleinern können.

Von diesen regelmäßigen Ursachen sind jene regelmäßigen Ursachen beim einfachen Trefferbilde zu unterscheiden, welche nur eine Vergrößerung oder Verkleinerung der Trefferbilder der einzelnen Waffen und somit auch jene sämtlicher Waffen — ohne Änderung der Lage der mittleren Treffpunkte in den einfachen Trefferbildern — zur Folge haben. Zum Beispiel: die allmählich zunehmende, also nicht wechselnde Verunreinigung der Bohrung durch den Rückstand oder durch die Führungsteile am Geschosse (metallische Verunreinigung, Verbleiung), kurz gesagt der Konservierungsgrad der einzelnen Feuerwaffen aber auch der ihrer Richtmittel, ferner die allmählich zunehmende Erhitzung des Rohres u. s. w. Es ist klar, daß die erwähnten störenden Ursachen nicht bei allen Feuerwaffen gleich sein müssen und sich, wie z. B. die Windströmung, während des Schießens vergrößern oder verkleinern können.

4. Bestimmung der Lage der einzelnen Treffpunkte und des mittleren Treffpunktes einer Schußserie.

Um die Lage der einzelnen Treffpunkte eines Trefferbildes anzugeben, bedient man sich eines rechtwinkeligen Koordinaten-

systems, dessen Ursprung aus praktischen Bedürfnissen gewöhnlich in den Zielpunkt oder in den beabsichtigten mittleren Treffpunkt verlegt wird. Bei horizontalen Trefferbildern pflegt man eine Koordinatenachse in der Schußrichtung, die andere senkrecht darauf, bei vertikalen Trefferbildern die eine Achse horizontal, die andere vertikal anzunehmen. Die Koordinaten in Bezug auf ein solches Koordinatensystem heißen die praktisch ermittelten oder kurz die praktischen Abweichungen. In einem horizontalen Trefferbilde ist sonach die Lage eines Treffers durch seine praktisch ermittelte Längen- und Seiten-(Breiten-)Abweichung, in einem vertikalen Trefferbilde durch seine praktisch ermittelte Höhen- und Seiten-(Breiten-)Abweichung bestimmt.

Der den gegebenen Bedingungen des Schießens entsprechende mittlere Treffpunkt heiße M; der mittlere Treffpunkt einer unter denselben Schießbedingungen abgegebenen Schußserie heiße M_s. In Bezug auf das angenommene Koordinatensystem seien X, Y die Koordinaten von M. Da die wahre Lage des mittleren Treffpunktes M stets unbekannt bleibt, so kann man auch nie die Werte X, Y finden. Es wird sich also darum handeln, die auf Grund der abgegebenen Schußserie plausiblen (vorteilhaftesten oder wahrscheinlichsten) Werte von X, Y, welche mit x, y bezeichnet werden mögen, zu ermitteln.

Denkt man sich durch den mittleren Treffpunkt M ein zum vorigen Koordinatensystem paralleles Koordinatensystem gelegt, so heißen die in Bezug auf dieses Koordinatensystem sich ergebenden Koordinaten der einzelnen Treffpunkte deren zufällige (unregelmäßige oder unvermeidliche) Abweichungen.

Die Bestimmung der wahrscheinlichsten Werte x, y von X, Y erfolgt nach dem Satze vom arithmetischen Mittel, dem zufolge der wahrscheinlichste Wert einer Unbekannten das arithmetische Mittel aus den direkten Beobachtungsresultaten ist.

In der Fig. 2 sei $OA = x_i$ die praktisch ermittelte Abszisse des Treffpunktes T_i, $OP = X$ die Abszisse des mittleren Treffpunktes M, dann bestimmt sich die zufällige Abweichung $MQ = PA = a_i$ des Treffpunktes T_i, zufolge der bekannten Beziehung (I. Band, Seite 8)

Beobachtungsgröße — Sollbetrag = Fehler (Widerspruch),

aus der Gleichung

1) $$x_i - X = a_i,$$

wobei x_i und X die betreffenden Abszissen sowohl der Größe als auch der Qualität (dem Vorzeichen) nach darstellen. Für die zufällige Abweichung $QT_i = b_i$ ergibt sich analog

Fig. 2.

2) $$y_i - Y = b_i.$$

Im nachfolgenden werden die Abweichungen der einzelnen Treffpunkte sowie der mittleren Treffpunkte M und M_s nur nach der Richtung der Abszissenachse näher ins Auge gefaßt, da die Untersuchung für die Richtung der Ordinatenachse dieselbe bleibt.

Bezeichnet man also mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die praktisch ermittelten Längenabweichungen der einzelnen n Treffer, so stellen die Gleichungen

$$x_1 - X = a_1,\ x_2 - X = a_2,\ \ldots\ldots,\ x_n - X = a_n$$

deren zufällige (unregelmäßige oder unvermeidliche) Abweichungen dar. Mittels Addition und Division durch n folgt daraus

3) $$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = X + \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Nach der Methode von Gauß (Band I, Punkt 3 des II. Abschnittes) drückt aber das arithmetische Mittel

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n}{n}$$

den wahrscheinlichsten (vorteilhaftesten oder plausiblen) Wert der Abszisse X des mittleren Treffpunktes aus. Bezeichnet man, wie oben angeführt, den Wert dieses arithmetischen Mittels mit x, so hat man also als wahrscheinlichsten (vorteilhaftesten oder plausiblen) Wert der Abszisse des mittleren Treffpunktes

4) $$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n}{n} = \frac{[x]}{n};$$

demnach kann man 3) auch in der Form schreiben:

5) $$x = X + \frac{a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n}{n}.$$

Da nun, gleiche Sorgfalt bei jedem Schusse vorausgesetzt, positive und negative zufällige Längenabweichungen von derselben absoluten Größe gleich wahrscheinlich sind, d. h. gleich häufig vorkommen, so muß die Summe $a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n$ und damit der Quotient $\frac{a_1 + a_2 + \cdots\cdots\cdots + a_n}{n}$ sich umsomehr der Grenze Null nähern, je größer die Schußzahl ist, folglich bei einer unendlichen Anzahl von Beobachtungen das arithmetische Mittel (der wahrscheinlichste oder plausible Wert) x dem wahren Werte X gleich werden.

Durch Vergleich des arithmetischen Mittels x mit den praktisch ermittelten Abweichungen gelangt man zu den *scheinbaren Abweichungen; diese stellen die wahrscheinlichsten oder plausiblen Werte der wahren Abweichungen* dar. Werden die Werte der scheinbaren Abweichungen mit $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_n$ bezeichnet, so ist:

6) $$\mathfrak{x}_1 = x_1 - x, \quad \mathfrak{x}_2 = x_2 - x, \quad \ldots\ldots, \quad \mathfrak{x}_n = x_n - x.$$

Die Addition dieses Gleichungssystems liefert die Beziehung:

$$\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \cdots\cdots + \mathfrak{x}_n = x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n - nx,$$

welche wegen 4) in

7) $$\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \cdots\cdots + \mathfrak{x}_n = 0 \quad \text{oder kurz} \quad [\mathfrak{x}] = 0$$

übergeht. Man beachte, daß $[\mathfrak{x}]$ immer (gleichsam erzwungen) gleich Null, $[a]$ hingegen im allgemeinen nicht Null ist, sich jedoch diesem Werte umsomehr nähert, je größer n, d. h. je größer die Schußzahl wird. Es ist demnach für das arithmetische Mittel x schon bei einer *endlichen* Anzahl von Schüssen jene Bedingung erfüllt, welche für den wahren Wert X erst bei einer unendlichen Anzahl von Schüssen stattfinden würde; man kann daher gewiß sein, sich durch die Annahme des arithmetischen Mittels $x = \frac{[x]}{n}$ als *wahrscheinlichsten* oder plausiblen Wert für X dem wahren Werte soweit zu nähern, als es die begrenzte Anzahl von Schüssen erlaubt und demselben durch Vermehrung dieser Anzahl immer näher zu kommen.

In der Formel 7) liegt eine Kontrolle der Richtigkeit der Berechnung von x nach der Formel 4), insoferne die Summe der positiven und der negativen scheinbaren Abweichungen dem absoluten Werte nach einander gleich sein müssen.

Bei einem horizontalen, in der durch den Mündungsmittelpunkt gelegten wagrechten Ebene (Mündungshorizont genannt) liegenden Trefferbilde nennt man die Entfernung des mittleren Treffpunktes

einer abgegebenen Schußserie vom Mündungsmittelpunkte der Feuerwaffe die mittlere Schußweite (mittlere Portee).

Der mittlere Treffpunkt einer Schußserie, welcher mit M_s bezeichnet wurde, ist also durch die Gleichungen gegeben:

8) $$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n}{n} = \dfrac{[x]}{n}, \\ y = \dfrac{y_1 + y_2 + \cdots\cdots + y_n}{n} = \dfrac{[y]}{n}. \end{cases}$$

Die Bestimmung dieser Koordinaten erfolgt demnach auf Grund der bekannten, praktisch ermittelten Abweichungen nach folgender Regel:

Man bildet die algebraische Summe der praktisch ermittelten Abweichungen einer Richtung (Länge, Höhe, Breite), und dividiert sie durch die Anzahl der Treffer; der Quotient ist nach Zeichen und Größe die Koordinate des mittleren Treffpunktes der Schußserie nach der betreffenden Richtung. Ermittelt man auf diese Weise die Abweichungen in Bezug auf zwei Koordinatenachsen, so ist die Lage des mittleren Treffpunktes M_s der Schußserie im Trefferbilde gefunden.

Den mittleren Treffpunkt M kann man, wie schon wiederholt gesagt wurde, nie finden, sondern sich der Bestimmung seiner wirklichen Lage immer nur nähern, und zwar umsomehr, je mehr Schüsse zu einer Serie oder Gruppe vereinigt werden. Die nach der obigen Regel bestimmten Werte für die Koordinaten des mittleren Treffpunktes einer abgegebenen Schußserie sind sonach als die dem gegebenen Trefferbilde entsprechenden wahrscheinlichsten oder plausiblen Werte des mittleren Treffpunktes anzusehen; die wahren Werte der Koordinaten dieses Punktes bleiben stets unbekannt. Man hat also immer den mittleren Treffpunkt von dem auf Grund des Beobachtungsmaterials berechneten mittleren Treffpunkte — dem Treffpunkte der abgegebenen Schußserie — strenge zu unterscheiden.

Es wurde bereits im Punkte 2 dieses Abschnittes gesagt, daß sich bei der angegebenen Bestimmungsart durch Anreihung eines weiteren Treffers oder mehrerer Treffer zu einem bereits gegebenen Trefferbilde die Lage, also auch die Koordinaten des mittleren Treffpunktes einer Schußserie beständig ändern müssen.

Wird, um dies beispielsweise bei einem horizontalen Trefferbilde für eine Koordinate zu zeigen, der Mündungsmittelpunkt als Koordinatenursprung, ferner die Abszissenachse im Mündungshori-

zonte, ihre positive Richtung gleichsinnig mit der Schußrichtung angenommen, so stellen dann die Abszissen der Treffpunkte die Werte der horizontalen Schußweiten dar.

Hat man aus n für gleich gut zu achtenden horizontalen Schußweiten $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ das arithmetische Mittel, d. i. die mittlere Schußweite

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n}{n}$$

gebildet, und tritt noch eine Schußweite x_{n+1} hinzu, welche nicht mehr Zweifel einflößt als die vorhergehenden Schußweiten, so ist auf die $n+1$ Beobachtungen $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ der Satz vom arithmetischen Mittel wieder anwendbar und gibt als neues Mittel

$$x' = \frac{n\,x + x_{n+1}}{n+1} = x + \frac{x_{n+1} - x}{n+1}.$$

Ist nun die Schußweite x_{n+1} außergewöhnlich groß, dann wird das arithmetische Mittel x' auch wesentlich größer als x, d. h. je mehr x_{n+1} von x abweicht, desto größer ist sein Einfluß bei der Bildung des neuen arithmetischen Mittels, was zu Bedenken Anlaß gibt; denn je mehr die neue Schußweite x_{n+1} von x abweicht, desto mehr Grund hat man, zu vermuten, sie sei minder verläßlich, desto weniger also sollte man sie auf das Endresultat Einfluß nehmen lassen. Hier stehen zwei Vermutungen einander gegenüber: die vor der Rechnung aus inneren (in der Beobachtung der Schußweite liegenden) Gründen aufgestellte Vermutung, die neue Schußweite sei ebenso verläßlich wie die früheren, und die nach der Rechnung aus äußeren Gründen geschöpfte Vermutung, sie sei minder verläßlich als jene. (Kritik des arithmetischen Mittels von Estienne; siehe hierüber: „Theorie der Beobachtungsfehler von E. Czuber", Seite 47.)

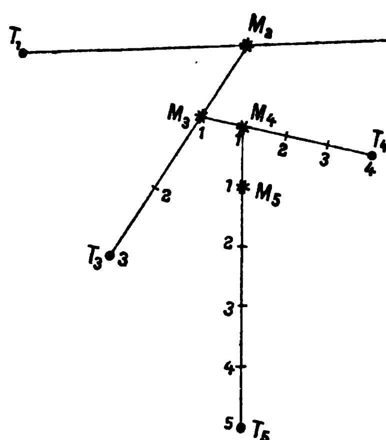
Für die Werte der Koordinaten des mittleren Treffpunktes einer abgegebenen Schußserie wurde gefunden:

$$x = \frac{[x]}{n}, \quad y = \frac{[y]}{n}.$$

Hienach kann der mittlere Treffpunkt einer Schußserie auch als der Schwerpunkt des Systemes aller Treffpunkte angesehen und konstruiert werden, wobei man sich in den einzelnen Treffpunkten gleiche Gewichte, etwa je die Gewichtseinheit, angebracht denkt. Das graphische Verfahren besteht hiebei in folgendem: Ist ein Treffer T_1 (Fig. 3) gegeben, so wird derselbe auch als der zu suchende mittlere Treffpunkt angesehen, weil irgend eine andere Annahme

noch viel weniger berechtigt wäre. Liegen zwei Treffer vor, T_1 und T_2, so ist die Lage des mittleren Treffpunktes dieser Schußserie in der Mitte der Verbindungslinie von T_1 mit T_2, also in M_2. Sind drei Treffer im Trefferbilde, so bestimmt man zuerst, wie zuvor, aus T_1 und T_2 den Punkt M_2 und es repräsentiert nun M_2 diese zwei Treffer; der mittlere Treffpunkt aller drei Treffer muß nun auf der Geraden M_2 T_3 liegen, und zwar wegen der Doppelwertigkeit von M_2 halb so weit von M_2 als von T_3, also in M_3. In dieser Weise wird das Verfahren weiter fortgesetzt; gut brauchbar ist es jedoch nur, wenn das Trefferbild materiell gegeben und dabei die Trefferzahl eine geringe ist.

Fig. 3.



Eine andere Methode, den mittleren Treffpunkt einer Schußserie durch Konstruktion zu finden, ist im nächsten Punkte dieses Abschnittes angeführt.

5. Gruppierungsgesetze.

Das Nachfolgende ist eigentlich nur eine Zusammenfassung der bereits erläuterten Gesetze über die Gruppierung beziehungsweise Verteilung der Treffer im einfachen Trefferbilde.

Betrachtet man ein einfaches, nur aus wenigen Treffern bestehendes Trefferbild, so scheinen die Treffer ganz willkürlich gruppiert zu sein; mit der Vergrößerung der Trefferzahl tritt jedoch eine auffallende Regelmäßigkeit in der Gruppierung der Treffer ein, die erfahrungsgemäß nach bestimmten Gesetzen erfolgt.

Die wichtigsten dieser Gruppierungsgesetze ergeben sich unmittelbar aus dem Wesen der zufälligen Ursachen, welche die Streuungen hervorrufen.

Zufällige Abweichungen in einer bestimmten, sonst jedoch beliebigen Richtung weisen folgende Gesetzmäßigkeiten auf, wenn die Abweichungen in unendlicher Zahl gedacht sind:

I) Jeder positiven zufälligen Abweichung entspricht eine gleich große negative Abweichung, oder: positive und

negative gleich große Abweichungen sind gleich wahrscheinlich; denn hätte das Zeichen + vor dem Zeichen — oder umgekehrt einen Vorzug, so wäre der Zufall ausgeschlossen.

Aus diesem Gesetze, welches die zentrische Symmetrie*) der Treffpunkte zum Ausdrucke bringt, ergibt sich:

a) beiderseits einer beliebigen durch den mittleren Treffpunkt gezogenen Geraden befindet sich die gleiche Trefferzahl;

b) die algebraische Summe der Werte der zufälligen Abweichungen in einer bestimmten, aber sonst beliebigen Richtung muß gleich Null sein.

Dem in *a)* Gesagten zufolge kann der einer abgegebenen Schußserie entsprechende mittlere Treffpunkt näherungsweise konstruktiv bestimmt werden. Hiezu legt man durch das Trefferbild zwei Gerade so, daß auf beiden Seiten jeder dieser Geraden je die Hälfte der Treffer sich befindet; der Schnittpunkt der zwei Geraden ist der der abgegebenen Schußserie zukommende mittlere Treffpunkt. Die Anwendung dieses Verfahrens ist dann zweckmäßig, wenn das Trefferbild materiell vorliegt. Es empfiehlt sich dabei, die zwei Geraden ungefähr rechtwinkelig zu einander anzuordnen.

II) Aus der Erwägung, daß kleine zufällige Abweichungen häufiger vorkommen werden als große, sobald der Bedienung der Feuerwaffe, der Erzeugung der Munition u. s. f. die größte Sorgfalt zugewendet wird, ergibt sich der Schluß, daß die Dichte der Treffer zunächst des mittleren Treffpunktes am größten sein muß und daß diese Dichte mit der Entfernung von diesem Punkte stetig abnehmen wird. Dieses Gesetz wird gewöhnlich als das Gesetz der Dichte bezeichnet.

6. Die Summe der Quadrate der scheinbaren Abweichungen von irgend einer durch den berechneten mittleren Treffpunkt gezogenen Geraden ist ein Minimum.

Dies wird bewiesen, indem man zeigt, daß der Ausdruck

$$1) \qquad S = (x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + \cdots\cdots + (x_n - x)^2 = [(x_i - x)^2],$$

hierin x veränderlich gedacht, dann am kleinsten wird, wenn

*) Unter Umdrehung einer ebenen Figur versteht man eine Drehung in der Figurebene um einen gestreckten oder flachen Winkel (180°). Eine ebene Figur, die nach einer Umdrehung um einen festen Punkt ihre frühere Lage deckt, heißt zentrisch symmetrisch für den Punkt als Mittelpunkt. Zwei Stücke, welche dabei ihre Lage vertauschen, heißen entsprechend oder homolog.

2) $$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n}{n} = \frac{[x]}{n},$$

d. h. x dem arithmetischen Mittel aller praktisch ermittelten Abweichungen gleich ist.

Soll S ein Minimum werden, so muß nach der Theorie über extreme Werte zunächst $\frac{dS}{dx} = 0$ sein. Differentiiert man die Gleichung 1) nach x, so folgt:

3) $$\frac{dS}{dx} = -2\left\{(x_1 - x) + (x_2 - x) + \cdots\cdots + (x_n - x)\right\};$$

somit resultiert als Bedingungsgleichung für das Minimum

$$(x_1 - x) + (x_2 - x) + \cdots\cdots + (x_n - x) = 0;$$

daraus folgt für x der in Gleichung 2) angegebene Wert, welcher gleich ist der Abszisse des berechneten mittleren Treffpunktes. Da ferner durch Differentiation von 3)

$$\frac{d^2 S}{dx^2} = 2n, \text{ d. h. } \frac{d^2 S}{dx^2} > 0$$

folgt, wird S für $x = \frac{[x]}{n}$ tatsächlich ein Minimum. Mit diesem Werte von x stellen aber die Differenzen $x_1 - x$, $x_2 - x$, ..., $x_n - x$ die scheinbaren oder plausiblen Abweichungen beziehungsweise die Fehler in Bezug auf die durch den berechneten mittleren Treffpunkt beliebig gezogene Gerade dar.

Dem Vorstehenden gemäß ist also die Summe der Quadrate der scheinbaren oder plausiblen Abweichungen einer bestimmten Richtung für diese Richtung ein Minimum, d. h. bildet man die Summe der Quadrate der Abweichungen der Treffpunkte von einer nicht durch den berechneten mittleren Treffpunkt gehenden Geraden g_0, so ist diese Summe stets größer als die Summe der Quadrate der Abweichungen dieser Treffpunkte von der zu g_0 parallelen, jedoch durch den berechneten mittleren Treffpunkt gehenden Geraden g.

7. Bestimmung der Summe der Quadrate der scheinbaren Abweichungen.

Sind die Werte x_1, x_2, ..., x_n große Zahlen, so wird die Ausrechnung des arithmetischen Mittels nach der Formel

1) $$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{[x]}{n}$$

sehr schwerfällig. Führt man dagegen einen dem arithmetischen Mittel x sich möglichst anschmiegenden Näherungswert ein, der mit u bezeichnet werden möge und stellen u_i, wobei $i = 1, 2, \ldots, n$ ist, die an diesem Näherungswert anzubringenden kleinen Zuschläge dar, um die Werte x_i zu erhalten, so besteht das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 &= u + u_1 \\ x_2 &= u + u_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= u + u_n \\ \hline \text{Summe } [x] &= n\,u + [u]; \end{aligned}$$

dividiert man diese Gleichung durch n, so folgt:

2) $$x = \frac{[x]}{n} = u + \frac{[u]}{n}.$$

Um die Fehlerquadratsumme $[\mathfrak{x}\mathfrak{x}]$ direkt zu finden, geht man von dem Gleichungssystem aus

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_1 &= x_1 - x, & \mathfrak{x}_1^2 &= x_1^2 - 2\,x_1\,x + x^2 \\ \mathfrak{x}_2 &= x_2 - x, & \mathfrak{x}_2^2 &= x_2^2 - 2\,x_2\,x + x^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{x}_n &= x_n - x, & \mathfrak{x}_n^2 &= x_n^2 - 2\,x_n\,x + x^2 \\ & & [\mathfrak{x}\mathfrak{x}] &= [x\,x] - 2\,[x]\,x + n\,x^2; \end{aligned}$$

wegen 1) übergeht der Ausdruck für die Summe $[\mathfrak{x}\mathfrak{x}]$ in:

$$[\mathfrak{x}\mathfrak{x}] = [x\,x] - 2\,[x]\cdot\frac{[x]}{n} + n\cdot\frac{[x]^2}{n^2} = [x\,x] - \frac{[x]^2}{n};$$ es ist also

3) $$[\mathfrak{x}\mathfrak{x}] = [x\,x] - \frac{[x]^2}{n}.$$

Die Gleichung 3) ist praktisch nicht zweckmäßig verwendbar; dagegen kann man sie hiezu geeignet machen, wenn man sie mit der zur Ableitung der Gleichung 2) benützten allgemeinen Gleichung $u_i = x_i - u$ verbindet.

Man hat nämlich:

$$\begin{aligned} u_1^2 &= x_1^2 - 2\,x_1\,u + u^2 \\ u_2^2 &= x_2^2 - 2\,x_2\,u + u^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n^2 &= x_n^2 - 2\,x_n\,u + u^2 \\ \hline [u\,u] &= [x\,x] - 2\,u\,[x] + n\,u^2. \end{aligned}$$

Weil zufolge 3) $[x\,x] = [\mathfrak{x}\mathfrak{x}] + \frac{[x]^2}{n}$ und zufolge 1) $x = \frac{[x]}{n}$ ist, geht der Ausdruck für die Summe $[u\,u]$ über in:

$$[u\,u] = [\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}] + n\,x^2 - 2\,u\,.\,n\,x + n\,u^2 = [\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}] + n\,(x - u)^2;$$

daraus folgt:

$$4)\qquad [\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}] = [u\,u] - n\,(x - u)^2,$$

oder mit Rücksicht auf 2):

$$5)\qquad [\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}] = [u\,u] - \frac{[u]^2}{n}.$$

Man kann also $[\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}]$ ohne frühere Berechnung der einzelnen scheinbaren Fehler $\mathfrak{x}$, ja sogar ohne frühere Berechnung des arithmetischen Mittels gewinnen.

Die Gleichung 4) zeigt, daß für $x \gtrless u$, also unter allen Umständen $[u\,u] > [\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}]$, wodurch der im Punkte 6 dieses Abschnittes ausgesprochene Satz neuerdings bewiesen erscheint.

Zur Bestimmung von $[\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}]$ genügt also nach Gleichung 5) die Kenntnis der Quadrate der Differenzen der einzelnen praktisch ermittelten Abweichungen und einer beliebig gewählten Größe u, welche, wie bereits gesagt, so angenommen wird, daß die Differenzen $x_1 - u$, $x_2 - u, \ldots\ldots, x_n - u$, d. h. die Größen $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n$ leicht bestimmt werden können und möglichst klein ausfallen; dazu ist nur nötig, daß u eine x nahe gelegene, runde Zahl ist.

Selbstverständlich gilt die vorstehende Ableitung für die scheinbaren oder plausiblen Abweichungen der Treffer von jeder durch den berechneten mittleren Treffpunkt gezogenen Geraden

8. Bestimmung der scheinbaren Abweichungen in Bezug auf eine beliebige, durch den berechneten mittleren Treffpunkt gezogene Gerade. Richtungen der Trefferbildachsen.

Angenommen, es sei aus einer Serie von unter scheinbar gleichen Verhältnissen abgegebenen Schüssen derjenige Punkt, den man auf Grund des vorliegenden Beobachtungsmaterials für den mittleren Treffpunkt halten muß, durch Berechnung seiner Koordinaten bestimmt worden. Man denke sich nun durch denselben irgend eine Gerade, welche g heißen möge, gelegt; es müssen dann die Abstände der Treffpunkte von dieser Geraden, das sind die scheinbaren oder plausiblen Abweichungen, folgende zwei Bedingungen erfüllen:

a) die algebraische Summe der scheinbaren Abweichungen muß, da positive und negative gleich große Abweichungen gleich wahrscheinlich sind, offenbar Null sein;

b) die Summe der Quadrate der scheinbaren Abweichungen ist ein Minimum, d. h. werden die Abstände der ein-

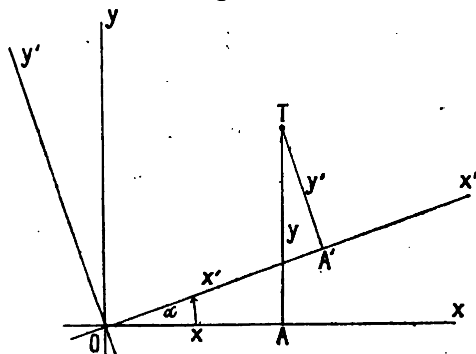
zelnen Treffpunkte von irgend einer zur angenommenen Geraden g parallelen Geraden gezählt, so ist die Summe der Quadrate dieser Abstände stets größer als die Quadratsumme der scheinbaren Abweichungen.

Läßt man hingegen die Gerade g ihre Lage ändern, was nur durch Drehung dieser Geraden um den berechneten mittleren Treffpunkt erfolgen kann, so wird sich auch der Wert des Minimums der Summe der Quadrate der scheinbaren Abweichungen ändern. Es wird bei der Drehung der Geraden g das Minimum dieser Quadratsumme einmal einen größten und einmal einen kleinsten Wert erhalten.

Sind die scheinbaren Abweichungen bezogen auf zwei zu einander senkrecht stehende und durch den berechneten mittleren Treffpunkt gehende Geraden bekannt, so ist die Bestimmung der scheinbaren Abweichungen für eine beliebige dritte durch den berechneten mittleren Treffpunkt gehende Gerade Gegenstand eines einfachen Transformationsproblems.

Es sei O (Fig. 4) der Ursprung eines rechtwinkeligen, ausnahmsweise beliebigen Koordinatensystems und zugleich der berechnete mittlere Treffpunkt, T ein beliebiger Treffpunkt, so daß also $OA = x$ und $AT = y$ die scheinbaren Abweichungen in Bezug auf das Achsensystem xOy sind. Man denke sich nun dieses Achsensystem um einen beliebigen Winkel α um O gedreht; die neue Lage des Achsensystems heiße $x'Oy'$; bezogen auf dieses sind $OA' = x'$ und $A'T = y'$ die scheinbaren Abweichungen des Treffers T und man hat nach den Lehren der analytischen Geometrie die Transformationsformeln:*)

Fig. 4.



$$1)\qquad \begin{cases} x' = x \cos\alpha + y \sin\alpha, \\ y' = -x \sin\alpha + y \cos\alpha. \end{cases}$$

Wird in den Formeln 1) die Summierung über alle Treffpunkte erstreckt, so ergeben sich folgende zwei Summationsgleichungen:

*) Siehe die Anmerkung am Schlusse dieses Punktes.

$$[x'] = \quad [x] \cos\alpha + [y] \sin\alpha,$$
$$[y'] = -[x] \sin\alpha + [y] \cos\alpha.$$

Da $[x] = 0$ und $[y] = 0$ ist, muß auch $[x'] = 0$ und $[y'] = 0$. Die Beziehung $[x'] = 0$ sagt, daß die algebraische Summe der scheinbaren Abweichungen bei jedem Winkel α gleich Null ist, eine Tatsache, die schon im Vorhinein bekannt war. Wird die erste der Gleichungen 1) quadriert, so folgt:

$$x'^2 = x^2 \cos^2\alpha + 2\,x\,y \cos\alpha \sin\alpha + y^2 \sin^2\alpha.$$

Wird auch in dieser Formel die Summierung über alle Treffpunkte erstreckt und $2 \sin\alpha \cos\alpha = \sin 2\alpha$ gesetzt, so ergibt sich für die Summe der Quadrate der scheinbaren oder plausiblen Abweichungen x' der Ausdruck

$$[x'\,x'] = [x\,x] \cos^2\alpha + [x\,y] \sin 2\alpha + [y\,y] \sin^2\alpha.$$

Hiedurch ist die Quadratsumme $[x'\,x']$ als Funktion von α bekannt und man findet leicht einen Winkel α_0, für welchen $[x'\,x']$ einen extremen (maximalen oder minimalen) Wert erhält. Nach der Theorie der extremen Werte ergibt sich α_0 aus der Bedingungsgleichung

$$\frac{d\,[x'\,x']}{d\,\alpha} = 0,$$

hierin $\alpha = \alpha_0$ gesetzt; sie lautet:

$$-2\,[x\,x] \cos\alpha_0 \sin\alpha_0 + 2\,[x\,y] \cos 2\,\alpha_0 + 2\,[y\,y] \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 = 0,$$

oder

$$-[x\,x] \sin 2\,\alpha_0 + 2\,[x\,y] \cos 2\,\alpha_0 + [y\,y] \sin 2\,\alpha_0 = 0,$$

$$([x\,x] - [y\,y]) \sin 2\,\alpha_0 = 2\,[x\,y] \cos 2\,\alpha_0,$$

daraus

2) $$tg\, 2\,\alpha_0 = \frac{2\,[x\,y]}{[xx] - [yy]}.$$

Diese Gleichung liefert jedenfalls einen positiven Wert für $2\,\alpha_0$, welcher kleiner als π ist und mit φ bezeichnet werden möge; die anderen Winkelwerte, welche dieser Gleichung genügen, sind, da die Tangente irgend eines Winkels ihren Wert nicht ändert, wenn man den Winkel um ein beliebiges Vielfache von π vermehrt oder vermindert, in der Formel

$$2\,\alpha_0 = \varphi + g\,\pi$$

enthalten, worin g irgend eine ganze positive oder negative Zahl bezeichnet. Man schließt hieraus, daß

$$\alpha_0 = \frac{\varphi}{2} + g\,\frac{\pi}{2}.$$

Die verschiedenen Werte von α_0 bestimmen im ganzen nur vier Richtungen für die zu suchende Gerade Ox'; von diesen vier Richtungen sind je zwei direkt entgegengesetzt; alle vier Richtungen liegen in zwei zu einander senkrecht stehenden Geraden. Für die weitere Untersuchung wird zur Festlegung der Achse Ox' für α_0 stets der Wert $\frac{\varphi}{2}$ (entsprechend $g = 0$) genommen, welcher immer positiv und kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist. Der Winkel $\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}$ (entsprechend $g = 1$) bestimmt dann die Gerade Oy'. Von diesen zwei Winkeln dient einer zur Bestimmung des Maximums, der andere zur Bestimmung des Minimums von $[x'x']$.

Legt man der Ermittlung von α_0 die Quadratsumme $[y'y']$ zu Grunde, so folgt wieder die Gleichung 2).

Die extremen Werte der Quadrate der scheinbaren Abweichungen sind also gegeben durch

$$3) \quad \begin{cases} [x'x'] = [xx] \cos^2 \alpha_0 + [xy] \sin 2\alpha_0 + [yy] \sin^2 \alpha_0, \\ [y'y'] = [xx] \sin^2 \alpha_0 - [xy] \sin 2\alpha_0 + [yy] \cos^2 \alpha_0. \end{cases}$$

Ist $[xy] = 0$, aber $[xx] \neq [yy]$, so ist der Winkel zur Festlegung der Achse Ox' gleich Null und es sind die Achsen Ox, Oy bereits jene, welchen die extremen Werte der Quadratsummen der scheinbaren Abweichungen entsprechen.

Daraus folgt der wichtige Satz, daß $[xy] = 0$ die Bedingung dafür ist, damit nach den zwei auf einander senkrechten Richtungen Ox und Oy die (kleinsten) Summen $[xx]$ und $[yy]$ extreme Werte erhalten.

Die Summe $[xy]$ ist nur bei achsialer Symmetrie der Treffpunkte in Bezug auf die Achsen gleich Null. Zur achsialen Symmetrie ist erforderlich, daß in allen zu den Achsen senkrechten Elementarstreifen die Trefferverteilung eine symmetrische ist.

Da nun aber nur nach jenen Richtungen, nach welchen die Streuungsursachen unabhängig tätig sind, eine achsial-symmetrische Gruppierung der Treffer eintreten kann (siehe Punkt 2 dieses Abschnittes) und hiefür $[xy] = 0$ ist, so sind die Trefferbildachsen jene, welchen die extremen Werte der Quadratsummen der scheinbaren Abweichungen entsprechen und es ist $[xy] = 0$ das analytische Merkmal für die Trefferbildachsen.

Werden nun die Trefferbildachsen als die Achsen Ox und Oy angenommen, so sind die Quadratsummen für zwei andere, auf einander senkrechte Achsen Ox' und Oy' gegeben durch

$$4)\quad \begin{cases} [x'x'] = [xx]\cos^2\alpha + [yy]\sin^2\alpha, \\ [y'y'] = [xx]\sin^2\alpha + [yy]\cos^2\alpha. \end{cases}$$

Durch Addition und Subtraktion dieser zwei Gleichungen folgt

$$[x'x'] + [y'y'] = [xx] + [yy]$$
$$[x'x'] - [y'y'] = ([xx] - [yy])\cos 2\alpha.$$

Löst man diese zwei Gleichungen nach $[x'x']$ und $[y'y']$ auf, so ergibt sich

$$[x'x'] = \frac{1}{2}([xx] + [yy]) + \frac{1}{2}([xx] - [yy])\cos 2\alpha,$$

$$[y'y'] = \frac{1}{2}([xx] + [yy]) - \frac{1}{2}([xx] - [yy])\cos 2\alpha.$$

Da die Größen $[x'x']$ und $[y'y']$ vom Winkel α abhängig und überdies durch die Relation $[x'x'] + [y'y'] = [xx] + [yy] =$ konstant an einander gebunden sind, so ist damit gesagt, daß sie in gegenseitigem Abhängigkeitsverhältnisse stehen.

Ist $[xy] = 0$ und $[xx] = [yy]$, so wird zufolge der Gleichung 2) der Winkel α unbestimmt, man erhält $[x'x'] = [y'y'] = [xx] = [yy] =$ $=$ konstant und es bleibt die Summe der Quadrate der scheinbaren Abweichungen für alle durch den berechneten mittleren Treffpunkt gezogenen Geraden konstant. In diesem Falle besteht zwischen der Summe der Größen $[x'x']$ und $[y'y']$ kein Abhängigkeitsverhältnis.

Anmerkung. Um die Koordinaten x', y' durch jene x, y auszudrücken, projiziere man die gebrochenen Linienzüge $OA'T$ und OAT (Fig. 4), welche die gemeinsame Schlußlinie OT haben, zuerst auf die x' Achse, sodann auf die y' Achse. Hiedurch resultiert:

$$x' = x\cos\alpha + y\cos(90^0 - \alpha) = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$
$$y' = x\cos(\alpha + 90^0) + y\cos\alpha = -x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$

wodurch die Richtigkeit der Formeln 1) erwiesen erscheint.

9. Beobachtung beim Schießen von Aufschlaggeschossen. Einschießlinien.

Zur Erreichung der größten Wirkung gegen ein Ziel ist die Anwendung der richtigen Schußelemente (Erhöhung oder Senkung, Seitenverschiebung und Tempierung), bei Geschützen mit mehreren Ladungen überdies noch die Wahl der Ladung notwendig. Die Ermittlung der Schußelemente geschieht durch das Einschießen.

Dasselbe soll in der kürzesten Zeit und mit dem geringsten Munitionsaufwand erfolgen.

Die Schußbeobachtung bezweckt die Feststellung der Explosionsorte der Geschosse in Bezug auf das Ziel und der Wirkung am Ziele; sie bildet die Grundlage für ein genaues und rasches Einschießen, für die Ausführung zweckmäßiger Korrekturen der Schußelemente und ist somit eine wesentliche Bedingung für den Schießerfolg.

Während des Einschießens ist somit die verläßliche Beobachtung jedes Schusses von besonderer Wichtigkeit; es muß daher jeder nicht verläßlich beobachtete Schuß mit den gleichen Schußelementen wiederholt werden.

Beim Schießen von Aufschlaggeschossen ist ein genaues Beobachten der Geschoßaufschläge (Rauchwolken im Augenblicke des Entstehens) Grundbedingung.

Das Beobachten erfolgt in der Regel in Bezug auf zwei Linien von bekannter Lage zum Ziele. Diese beiden Linien heißen Einschießlinien. Eine Einschießlinie, und zwar die für die Seitenrichtung (für die Beobachtung der Seitenabweichungen) ist die Flugbahnbasis oder die Schußlinie (Verbindungslinie des Mündungsmittelpunktes mit dem beabsichtigten mittleren Treffpunkte); die zweite Einschießlinie, und zwar die für die Höhenrichtung (für die Beobachtung der Längenabweichungen) steht zumeist auf ihr senkrecht. Vorteilhaft ist es immer, wenn diese Einschießlinie im Ziele selbst gefunden werden kann; ist dies nicht erreichbar, so soll ihr Abstand vom Ziele (ihre relative Lage zum Ziele) möglichst genau bekannt sein.

Gewöhnlich wird es sich um die Feststellung des Ortes der durch den Aufschlag auftretenden Explosionserscheinung zu den Einschießlinien (zum Ziele) handeln, da hieraus dann auf die Längen- und Seitenabweichung, oder die letztere und die Höhenabweichung geschlossen werden kann.

Die Seitenabweichung kann immer ihrer Art und Größe nach geschätzt oder im Winkelmaße (Strichmaße)*) gemessen werden.

Die Höhenabweichung, für welche man sich beim Beschießen vertikaler, fester Objekte interessiert, kann ebenso wie die Seitenabweichung beobachtet werden.

Die Längenabweichung kann dagegen nur in sehr seltenen Fällen ihrer Größe nach beobachtet werden; zumeist ist man nur imstande anzugeben, ob die Explosionserscheinung vor oder hinter

*) Siehe „Gebräuchliche Winkel-, Längen- und Geschwindigkeitsmaße im Schießwesen" von Josef Kozák, Wien 1906.

der Einschießlinie (dem Ziele) liegt. Im ersten Fall wird der Schuß als Kurzschuß bezeichnet, oder man sagt, der Schuß war kurz; im zweiten Fall hingegen wird der Schuß als Weitschuß bezeichnet, oder man sagt, der Schuß war weit. Hienach sind auch die gebräuchlichen Begriffe „Kurzbahn" und „Weitbahn" klar.

B. Streuung der Sprengpunkte.

10. Streuungserscheinungen bei Tempier- oder Zeitzündergeschossen.

Nach den eingehenden Untersuchungen über die Streuungserscheinungen beim Schießen von Aufschlaggeschossen können die Untersuchungen über die Streuungserscheinungen beim Schießen von Tempiergeschossen kürzer gehalten werden, da Vieles von den schon durchgeführten Untersuchungen auf diese übertragbar ist.

Bei den Tempiergeschossen (Schrapnells und Granaten mit Zeitzündern) würden, wenn die Bedingungen des Schießens dieselben blieben, also auch das Verhalten der Zünder ein kongruentes wäre, sämtliche Sprengpunkte in demselben Punkte der mittleren Bahn und mit dieser sämtliche Bahnen der Serie oder Gruppe zusammenfallen. Der so gedachte Sprengpunkt sei mittlerer Sprengpunkt genannt.

Würden, bis auf das Verhalten der Zünder, alle Verhältnisse genau dieselben bleiben, so müßten sich die Sprengpunkte in der mittleren, alle Bahnen der Serie enthaltenden Bahn, entsprechend den Streuungsursachen in den Zündern, um den mittleren Sprengpunkt in gesetzmäßiger Weise gruppieren.

Das Nichtzusammentreffen der Sprengpunkte wird Streuung der Sprengpunkte genannt.

Die wirklichen Orte der Sprengpunkte ergeben sich, wenn die Streuung der Sprengpunkte mit jener der Bahnen kombiniert wird. Die Sprengpunkte befinden sich nicht in einer Ebene, sondern im dreidimensionalen Raume verteilt, welcher Streuungsraum der Sprengpunkte genannt wird. Der IX. Abschnitt, welcher das Gesetz der Fehler im Raume behandelt, gewährt eine nähere Einsicht über die Verteilung der Sprengpunkte im Streuungsraume bei einer sehr großen Anzahl von unter scheinbar denselben Verhältnissen mit Tempiergeschossen abgegebenen Schüssen.

Man kann also sagen:

a) Beim Schießen von Tempiergeschossen streuen die Flugbahnen der einzelnen Schüsse in gleicher Weise wie

bei Aufschlaggeschossen. Schon aus diesem Grunde allein könnten die Sprengpunkte einer Serie von Geschossen mit gleich tempierten Zündern nicht in einem Punkte zusammenfallen, sondern müßten in einem dreidimensionalen Raume verteilt sein.

b) Für die Streuung der Sprengpunkte kommt aber noch eine weitere sehr bedeutende Streuungsursache hinzu, nämlich das ungleichmäßige Funktionieren scheinbar gleich tempierter Zünder, die Zünderstreuung. Diese erklärt sich aus den unvermeidlichen Fehlern, welche beim Tempieren begangen werden, sowie aus der unvermeidlichen Verschiedenheit bei der Einleitung der Entzündung und bei der Fortpflanzung des Brandes im Zünder (Ursachen, die sich auf die Gleichmäßigkeit des Zündersatzes, dessen Pressung, auf den Feuchtigkeitsgehalt des Satzes und auf die Zündererzeugung im allgemeinen beziehen). Da diese Ursachen durchaus zufällige sind, so muß ihre Wirkung, die Zünderstreuung, auch durchaus den allgemeinen Streuungsgesetzen folgen.

Durch die Zünderstreuung wird die Breitenstreuung der Sprengpunkte in so unbedeutendem Maße beeinflußt, daß man immer die Breitenstreuung der Flugbahnen auch als jene der Sprengpunkte ansehen kann, oder mit anderen Worten ausgedrückt, die Breitenstreuung der Sprengpunkte ist gleich derjenigen, welche die Tempiergeschosse haben würden, falls sie als Aufschlaggeschosse Verwendung fänden. Übrigens spielt diese Streuung bei der eigentümlichen Wirkungsweise tempierter Geschosse nur eine ganz untergeordnete Rolle.

Die Höhen- und Längenstreuungen der Sprengpunkte werden dagegen hauptsächlich durch die Zünderstreuung verursacht und vorwiegend durch diese in ihrer Größe bestimmt.

In dieser Beziehung bestehen beachtenswerte Relationen zwischen Zünderstreuung, Geschoßendgeschwindigkeit und Geschoßflugzeit. Setzt man eine bestimmte Größe der die Streuung bewirkenden Ursachen voraus, so müssen die Streuungen der Sprengpunkte in der Bahnrichtung umso größer werden, je größer die Geschoßgeschwindigkeit ist, weil dann das Geschoß während jener Zeit, in der sich die Wirkung der Zünderstreuung bemerkbar macht, einen längeren Weg zurücklegt. Hält man dagegen an einer bestimmten Geschoßendgeschwindigkeit fest, so müssen diese Streuungen umso bedeutender ausfallen, je mehr Zeit den Streuungsursachen zur Betätigung verfügbar war, d. h. je größer die Flugzeiten waren. Diese zwei, die Größe der Streuungen beeinflussenden Faktoren treten

bei einer bestimmten Schußart nie gleichzeitig in gleichem Sinne wirkend auf: relativ große Endgeschwindigkeiten ergeben sich nur bei kurzen Flugzeiten und umgekehrt. Es schwächen sich daher bei einer bestimmten Schußart die Wirkungen beider Elemente auf allen Schußdistanzen gegenseitig derart ab, daß oft auf den kleineren Schußdistanzen der Einfluß der größeren Endgeschwindigkeit, dagegen bei größeren Schußweiten jener der längeren Flugzeit sich durch größere Streuungen bemerkbar macht, während auf mittleren Distanzen die kleinsten Streuungswerte resultieren. Mitunter ist der Einfluß der Flugzeit durchaus überwiegend, so daß mit der Schußweite auch die Streuungswerte durchaus zunehmen; endlich kann auch der entgegengesetzte Fall eintreten, nämlich der Einfluß der Endgeschwindigkeit überwiegen.

Mit zunehmender Schußzahl macht sich sowohl in der Gestalt des Streuungsraumes der Sprengpunkte als auch in der Gruppierung der Sprengpunkte eine symmetrische Anordnung bezüglich dreier zu einander senkrechten Ebenen immer deutlicher geltend. Diese Ebenen schneiden sich in drei zu einander senkrechten Geraden, welche Trefferbildachsen des Systems heißen.

Bei den weiteren Untersuchungen soll zumeist angenommen werden, daß zwei Trefferbildachsen in der vertikalen Schußebene liegen — die eine von ihnen in der Richtung der Bahntangente, die andere senkrecht dazu — während die dritte Trefferbildachse senkrecht zur vertikalen Schußebene steht.

Aus den Punkten 2 und 3 dieses Abschnittes gehen folgende Begriffe klar hervor:

mittlerer Sprengpunkt einer Schußserie; derselbe fällt offenbar mit dem Schnittpunkte der Trefferbildachsen überein;

mittlerer Sprengpunkt;

Streuung der mehreren Serien zukommenden mittleren Sprengpunkte und

zusammengesetzter mittlerer Sprengpunkt.

Von dem einer Serie von Schüssen beschränkter Anzahl zukommenden mittleren Sprengpunkt, das ist von dem mittleren Sprengpunkt einer Schußserie, ist sonach jener mittlere Sprengpunkt zu unterscheiden, welcher aus einer unendlich großen Anzahl von unter scheinbar gleichen Verhältnissen abgegebenen Schüssen mit Tempiergeschossen resultieren würde. Dieser Punkt heißt der mittlere Sprengpunkt.

11. Sprengintervall oder Sprengweite, Sprenghöhe.

Denkt man sich bei freistehenden Zielen die Mitte des Geschützstandes mit der unteren Begrenzung des Zieles durch eine Ebene (Bezugsebene) verbunden, so versteht man unter Sprengintervall (Sprengweite) die in der Schußrichtung und in dieser Ebene gemessene Entfernung des Sprengpunktes vom Ziele; unter Sprenghöhe die vertikale Erhebung des genannten Punktes über diese Ebene.

Befindet sich das Ziel hinter einer Deckung, so ist die Ebene, in Bezug auf welche Sprengintervall und Sprenghöhe zu beurteilen sind, durch den Mündungsmittelpunkt und die Kammlinie der Deckung zu legen.

Für Sprengpunkte unterhalb dieser Bezugsebenen bezeichnet man die Sprenghöhen, für Sprengpunkte hinter der Einschießlinie oder hinter dem Ziele die Sprengweiten negativ.

Die Sprenghöhe wird jetzt zumeist im Winkelmaße (Strich) angegeben. Darunter ist jener Winkel zu verstehen, den die Sehlinie zum Sprengpunkte mit der Bezugsebene oder was praktisch dasselbe bedeutet, der Winkel, den diese Sehlinie mit der Flugbahnbasis (Schußlinie) einschließt.

Wie bereits gesagt wurde, kann die Breitenstreuung der Flugbahnen auch als jene der Sprengpunkte angesehen werden. Sieht man jedoch von dieser seitlichen Lage der Sprengpunkte ab, so wird die Lage eines jeden Sprengpunktes nur durch zwei Koordinaten bestimmt. Zur Bestimmung der Lage der Sprengpunkte werden in der Regel die Richtungen der Koordinatenachsen parallel zu jenen Richtungen angenommen, nach welchen die Sprengweite und Sprenghöhe gezählt werden.

12. Bestimmung der Lage der einzelnen Sprengpunkte und des mittleren Sprengpunktes einer Schußserie.

Was im Punkte 4 dieses Abschnittes bezüglich der Bestimmung der Lage der einzelnen Treffpunkte und des mittleren Treffpunktes einer Schußserie gesagt wurde, gilt unverändert für die Bestimmung der Lage der einzelnen Sprengpunkte und des mittleren Sprengpunktes einer Schußserie. Hienach kann der mittlere Sprengpunkt einer Schußserie auch als derjenige Punkt bezeichnet werden, welcher als arithmetisches Mittel aus den Koordinaten der einzelnen Sprengpunkte resultieren würde, wenn sämtliche Geschosse als tempierte Geschosse oder Zeitzündergeschosse funktionieren würden; mit

anderen Worten, wenn das Hindernis, welches die Erde darstellt, indem an ihr einzelne Geschosse zum Aufschlage gelangen, beseitigt werden würde. Die so gefundenen Koordinaten des mittleren Sprengpunktes einer Schußserie sind auch als die wahrscheinlichsten Werte der Koordinaten des mittleren Sprengpunktes anzusehen; die wahre Lage des letzteren bleibt stets unbekannt.

Denkt man sich durch den mittleren Sprengpunkt ein zum vorigen Koordinatensystem paralleles Koordinatensystem gelegt, so heißen die in Bezug auf dieses Koordinatensystem sich ergebenden Koordinaten der einzelnen Sprengpunkte, deren zufällige (unregelmäßige oder unvermeidliche) Abweichungen.

Die Sprengweite und Sprenghöhe des mittleren Sprengpunktes einer Schußserie werden als mittlere Sprengweite und mittlere Sprenghöhe dieser Schußserie bezeichnet.

Der Ort, wo sich der mittlere Sprengpunkt einer Schußserie befinden soll, heißt beabsichtigter mittlerer Sprengpunkt der Schußserie zum Unterschiede von dem wirklichen mittleren Sprengpunkte der Schußserie, d. i. dem Orte, wo der mittlere Sprengpunkt sich tatsächlich befindet.

Wird aus einer großen Zahl von Schüssen die Lage des mittleren Sprengpunktes ermittelt, dann liegt derselbe mit großer Wahrscheinlichkeit auf der mittleren Flugbahn.

Zur Lösung der in der Praxis vorkommenden Aufgaben macht man die Annahme, daß jene Flugbahnstrecke, längs welcher sich die Streuung der Sprengpunkte ausdehnt, geradlinig und der Winkel, den dieses Bahnstück im Sprengpunkte mit dem Mündungshorizont einschließt, gleich dem Einfallwinkel der Flugbahn mit dem Mündungshorizont sei. Diese Vereinfachung rechtfertigt sich damit, daß beim Flachschuß, wo oft ziemlich ausgedehnte Stücke der Flugbahn in Betracht kommen, diese selbst sehr gestreckt sind, während beim Bogenschuß meist nur verhältnismäßig kurze Flugbahnstücke in den Streuungsbereich fallen. Aus dem ist zu ersehen, daß auch der Einfallwinkel einen großen Einfluß auf das Verhältnis der Längen- und Höhenstreuung der Sprengpunkte zu einander hat.

Die erforderliche günstigste Lage des mittleren Sprengpunktes wird im Versuchswege bestimmt und so geregelt, daß die Sprengstücke und Füllkugeln sich bis zum Anlangen am Ziele entsprechend ausbreiten und noch die genügende Wucht (lebendige Kraft) besitzen, daß ferner der dichteste Teil der Streugarbe auf jenen Teil des Zieles auftrifft, wo die größte Wirkung beabsichtigt wird. Erfahrungsgemäß reicht die Wucht von 8 *mkg* hin, um einen Menschen und von

19 *mkg*, um ein Pferd außer Gefecht zu setzen. Das sind die üblichen Angaben; richtiger wäre es, hiezu die Wucht für die Flächeneinheit — die spezifische Wucht — anzugeben.

Wenn auch beim praktischen Schießen die Flugbahnverhältnisse genau dieselben wären wie beim Versuche, so würde in den seltensten Fällen der wirkliche mittlere Sprengpunkt mit dem beabsichtigten übereinfallen, d. h. es würde eine Verschiebung des Bildes der Sprengpunkte längs der hypothetisch gedachten Bahn erfolgen.

Diese Verschiebung findet ihre Begründung in konstanten Ursachen, die namentlich in den Eigenschaften des Zündersatzes zu suchen sind; so wird beispielsweise ein höherer Feuchtigkeitsgehalt des Satzes den mittleren Sprengpunkt gegen das Ziel hin verschieben.

In der Wirklichkeit sind die Verhältnisse etwas komplizierter, als hier zur Vereinfachung der Anschauung und zur Fixierung der Begriffe angenommen wurde, da die einzelnen Sprengpunkte einer Serie in den entsprechenden Bahnen der Flugbahngarbe liegen, welcher Umstand die Streuungsverhältnisse etwas modifiziert.

13. Beobachtung beim Schießen von Tempier- oder Zeitzündergeschossen.

Eine — namentlich vom praktischen Standpunkte — wesentliche Komplikation gegenüber dem Schießen von Aufschlaggeschossen besteht darin, daß — wenn von der seitlichen Lage der Sprengpunkte abgesehen wird — der mittlere Sprengpunkt der Schußserie durch zwei Koordinaten bestimmt ist und daß es daher beim Einschießen erforderlich ist, auf Grund von Beobachtungen diese beiden Koordinaten zu regeln.

Beim Schießen von Tempiergeschossen ist durch Beobachtung die Höhenlage des Sprengpunktes in Bezug auf den anzustrebenden mittleren Sprengpunkt zu beurteilen oder die Sprenghöhe zu messen und festzusetzen, ob der Sprengpunkt vor oder hinter der Einschießlinie liegt.

Die absolute Größe der Sprengweite kann von der schießenden Batterie nur in seltenen günstigen Fällen beurteilt werden. Wenn vor dem Schießen von Tempiergeschossen die Höhenrichtung mit hinreichender Genauigkeit, z. B. durch das Einschießen mit Aufschlaggeschossen ermittelt und hierauf die mittlere normale Sprenghöhe erreicht wurde, kann auch auf ein normales Sprengintervall geschlossen werden. In den meisten Fällen muß man sich begnügen, festzustellen, ob die Sprengweite positiv oder negativ war.

Bezüglich der Beobachtung der Seitenabweichungen beim Schießen von Tempiergeschossen gelten im allgemeinen dieselben Grundsätze wie beim Schießen mit Aufschlaggeschossen.

Wenn dem Schießen mit tempierten Geschossen ein Einschießen mit Aufschlaggeschossen voranging, bei welchem nebst der Höhen- auch die Seitenrichtung für das Schießen von Tempiergeschossen ermittelt und konstatierte Seitenabweichungen schon korrigiert wurden, so ist eine weitere Beobachtung der Sprengpunkte in Bezug auf Seitenabweichungen belanglos; mitunter ist jedoch diese Beobachtung besonderer Umstände wegen dennoch nötig, z. B. wegen plötzlich auftretenden, seitlichen Windes und müßte dann gegebenenfalls mit niederen Sprengpunkten erreicht werden, weil nur solche sich mit dem Ziele in Beziehung bringen lassen.

VI. Abschnitt.

Maße der Schußgenauigkeit. Prozentzahl sowie Anzahl der Treffer in symmetrischen Parallelstreifen. Theoretisches Trefferbild.

1. Wahrscheinlichkeit für das Treffen von symmetrischen Parallelstreifen mit einem Schusse.

In der Theorie der Beobachtungsfehler wurde für die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit, daß ein zufälliger Fehler von der Größe x begangen wird, oder vielmehr, daß er zwischen x und $x + dx$ liegt, gefunden (I. Band, Punkt 3 des II. Abschnittes):

$$dP = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx,$$

worin h das Maß der Präzision bedeutet. Für das Auftreten eines Fehlers zwischen den Grenzen a und b hat man die Wahrscheinlichkeit:

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-h^2 x^2} dx;$$

soll der Fehler zwischen die Grenzen $-a$ und $+a$ fallen, so beträgt die Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-h^2 x^2} dx.$$

Weil aber gleich große positive und negative Fehler gleich wahrscheinlich sind, also die Wahrscheinlichkeit zwischen $-a$ und 0 einerseits, 0 und $+a$ anderseits einander gleich sind, kann man hiefür setzen:

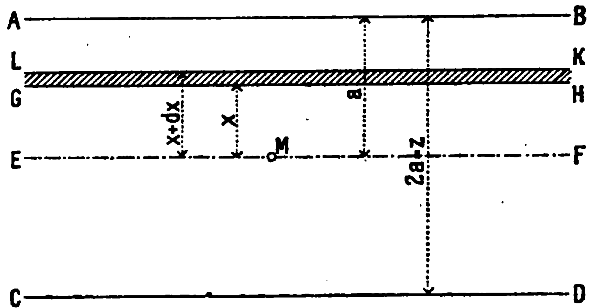
$$P = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-h^2 x^2} dx.$$

Wird hierin mittels der Relation $hx = t$ die neue Veränderliche t eingeführt, so folgt:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ah} e^{-t^2}\, dt = \Phi(ah).$$

Die aufgestellten Formeln können in höchst einfacher Weise in die Schießtheorie übertragen werden. Man denke sich einen ebenen, von zwei Parallelen AB und CD (Fig. 5) begrenzten Zielstreifen $ABCD$, in dessen Mittellinie oder Achse EF der mittlere Treffpunkt M einer sehr großen Anzahl von unter scheinbar gleichen Verhältnissen abgegebenen Schüssen fällt. Die Breite dieses Zielstreifens sei $2a = z$, sonst aber der letztere so lang, wenn man will unbegrenzt, daß Fehlschüsse nach dieser Seite dann ausgeschlossen

Fig. 5.



erscheinen, wenn der Zielstreifen senkrecht zur Schußrichtung gestellt gedacht wird. Für die folgenden Untersuchungen wird ferner noch vorausgesetzt, daß die Mittellinie des Zielstreifens entweder horizontal oder vertikal liege. Solche zum mittleren Treffpunkte symmetrische und unbegrenzte Zielstreifen oder Parallelstreifen werden in der Folge kurz symmetrische Parallelstreifen genannt. Liegt der mittlere Treffpunkt irgendwo außerhalb der Mittellinie des im angeführten Sinne unbegrenzten Zielstreifens, so wird letzterer als asymmetrischer Parallelstreifen bezeichnet.

Es bedeutet alsdann

$$dP = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}\, dx$$

die Wahrscheinlichkeit, daß die bei einem Schusse erhaltene zufällige Abweichung zwischen x und $x + dx$ liegt oder die Wahrscheinlichkeit, daß der bei einem Schusse erhaltene Treffer sich in

dem unbegrenzten Elementarstreifen $GHLK$ von der Breite dx befinde. Es ist auch (I. Band, Punkt 3 des II. Abschnittes)

$$\frac{\text{Zahl der Abweichungen zwischen } x \text{ und } x+dx}{\text{Gesamtzahl der Abweichungen}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx.$$

Denkt man sich nun den ganzen symmetrischen Parallelstreifen, von dessen Mittellinie ausgehend, in lauter solche unbegrenzte Elementarstreifen von der Breite dx zerlegt, so läßt sich nach dem Gesagten sehr leicht für jeden solchen Elementarstreifen die Wahrscheinlichkeit für das Treffen desselben mit einem Schusse aufstellen. Das Treffen des symmetrischen Parallelstreifens $ABCD$ mit einem Schusse, gleichgültig wo, ist gleichbedeutend mit dem Treffen eines der Elementarstreifen mit diesem Schusse. Die Wahrscheinlichkeit P mit einem Schusse den symmetrischen Parallelstreifen $ABCD$ zu treffen, ist somit nach dem Satze für die vollständige Wahrscheinlichkeit gleich der Wahrscheinlichkeit irgend einen der Elementarstreifen zu treffen, somit gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten für das Treffen der Elementarstreifen. Man hat daher

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-h^2x^2} dx$$

oder auch

$$P = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{a} e^{-h^2x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{ah} e^{-t^2} dt = \Phi(ah).$$

Dieser Wert für P drückt auch die Wahrscheinlichkeit dafür aus, daß die bei einem Schusse erhaltene zufällige Abweichung kleiner als a ist.

2. Maß der Schußpräzision oder Maß der Schußgenauigkeit.

Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Schusse gerade eine zufällige Abweichung zu begehen, welche zwischen x und $x+dx$ liegt, oder wie man zu sagen pflegt, wenn auch nicht ganz korrekt, die Wahrscheinlichkeit, bei einem Schusse gerade die zufällige Abweichung x und keine andere zu begehen, beträgt

$$dP = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx;$$

die Funktion $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$ heißt das Fehlergesetz (die Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktion oder das Gesetz der Fehlerhäufigkeit); die Kurve, deren Gleichung

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$$

lautet, wird die Fehlerwahrscheinlichkeitskurve genannt (siehe I. Band, Punkt 1 des II. Abschnittes). In dem Fehlergesetze kommt, wie bereits wiederholt bemerkt wurde, ein Parameter h vor, der die Dimensionen der Wahrscheinlichkeitskurve beeinflußt. Da aber die Ordinaten der Wahrscheinlichkeitskurve mit den Dimensionen des Trefferbildes im unmittelbaren Zusammenhange stehen, so erkennt man, daß aus dem Werte h ein Schluß auf die Ausdehnung des Trefferbildes in der betrachteten Richtung der Abweichungen gemacht werden kann; aus diesem Grunde wird h das Maß der Schußpräzision oder das Maß der Schußgenauigkeit genannt. Man setzt die Genauigkeit einer abgegebenen Schußserie dem Parameter h direkt proportional (siehe I. Band, Punkt 8 des II. Abschnittes).

Daß h einen Schluß auf die Präzision des Schießens gestattet, ergibt sich aus folgender Betrachtung:

Entsprächen h und $h' = m h$, wobei $m > 1$, zwei Feuerwaffen, so sind die Wahrscheinlichkeiten, bei einem Schusse gerade die zufällige Abweichung x zu erhalten:

$$d P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} d x \quad \text{und} \quad d P' = \frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2 x^2} d x = \frac{m h}{\sqrt{\pi}} e^{-m^2 h^2 x^2} d x,$$

ferner sind die Wahrscheinlichkeiten $d P_0$ und $d P_0'$ die zufällige Abweichung Null zu erhalten:

$$d P_0 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} d x \quad \text{und} \quad d P_0' = \frac{h'}{\sqrt{\pi}} d x = \frac{m h}{\sqrt{\pi}} d x,$$

woraus folgt

$$\frac{d P_0'}{d P_0} = \frac{h'}{h} = m.$$

Die Wahrscheinlichkeiten, bei einem Schusse die zufällige Abweichung Null zu erhalten oder mit anderen Worten, die Wahrscheinlichkeiten, die Einschießlinie zu treffen, verhalten sich wie die entsprechenden h-Werte, welche somit die Schußpräzision zum Ausdrucke bringen.

Werden $d P$ und $d P'$ ins Verhältnis gebracht, so erhält man:

$$\frac{d P'}{d P} = \frac{m}{e^{h^2 x^2 (m^2 - 1)}},$$

aus welcher Beziehung folgt, daß

$$\frac{d P'}{d P} \gtreqless 1, \text{ wenn } m \gtreqless e^{h^2 x^2 (m^2 - 1)} \text{ ist.}$$

Der besondere Wert von x, für welchen $dP' = dP$ wird, sei mit x_0 bezeichnet; es ist

$$x_0 = \pm \frac{1}{h} \sqrt{\frac{\log m}{(m^2 - 1) \log e}};$$

ferner $dP' > dP$, wenn $x < x_0$, hingegen $dP' < dP$, wenn $x > x_0$ ist.

Zwei Waffen verschiedener Präzision charakterisieren sich also dadurch, daß bei der präziser schießenden Waffe die Wahrscheinlichkeiten, bei einem Schusse eine kleine zufällige Abweichung zu erhalten, größer und umgekehrt, die Wahrscheinlichkeit, bei einem Schusse eine große zufällige Abweichung zu erhalten, kleiner ausfällt als bei der schlechter schießenden Feuerwaffe.

Zeichnet man die beiden Wahrscheinlichkeitskurven

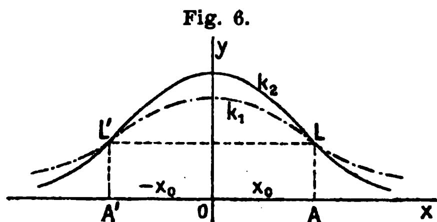
$$1) \quad y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}, \qquad 2) \quad y = \frac{m h}{\sqrt{\pi}} e^{-m^2 h^2 x^2}$$

in ein rechtwinkeliges Koordinatensystem ein, so werden sich dieselben in zwei zur Ordinatenachse symmetrisch gelegenen Punkten L und L' (Fig. 6) schneiden, deren Abszissen sind

$$x_0 = \pm \frac{1}{h} \sqrt{\frac{\log m}{(m^2 - 1) \log e}} = \pm \frac{1}{h} \sqrt{\frac{l\,m}{m^2 - 1}}.$$

Der Kürze wegen soll die Kurve, deren Gleichung 1) ist, als Kurve k_1 und jene, deren Gleichung 2) ist, als Kurve k_2 bezeichnet werden.

Fig. 6.



Die Ordinate im Ursprunge ist bei der Kurve k_2, welche die präziser schießende Waffe charakterisiert, größer als bei der Kurve k_1. Für alle unter x_0 liegenden Abweichungen sind die Ordinaten der Kurve k_2 größer als die der Kurve k_1, weil eben bei der genauer schießenden Feuerwaffe kleine zufällige Abweichungen wahrscheinlicher sind als große. Die über x_0 liegenden Abweichungen sind bei der genauer schießenden Feuerwaffe minder wahrscheinlich als bei der ungenauer schießenden Feuerwaffe; dies zeigt sich in der Fig. 6 darin, daß für $x > x_0$ die Ordinaten der Kurve k_2 kleiner sind als jene der Kurve k_1.

Man hat für die Wahrscheinlichkeit P, daß eine zufällige Abweichung ohne Rücksicht auf ihr Zeichen zwischen 0 und a liegt, also die Grenze a nicht überschreitet, den Wert (Band I, Punkt 7 des II. Abschnittes und Punkt 1 dieses Abschnittes)

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ah} e^{-t^2} dt.$$

Hierin ist, wenn P konstant vorausgesetzt wird, auch ah konstant. Es muß dann für ein n-mal größeres h die absolute Fehlergrenze a ebensovielmal kleiner werden, d. h. es werden n-mal kleinere Abweichungen beim Schießen auftreten, was auf eine n-mal größere Schußgenauigkeit oder Präzision der betreffenden Waffe schließen läßt.

Da der Wert h mit der Ausdehnung des Trefferbildes in der betrachteten Richtung der Abweichungen zusammenhängt, so folgt, daß im allgemeinen in einem und demselben Trefferbilde h sich mit der Richtung der Abweichungen ändert.

Werden mehrere Abweichungsrichtungen zugleich betrachtet, z. B. jene Ox und Oy, so wird das h durch Anhängen eines Index, z. B. x und y charakterisiert, ebenso P; es ist also:

$$d\,P_x = \frac{h_x}{\sqrt{\pi}} e^{-h_x^2 x^2} d\,x \quad \text{und} \quad d\,P_y = \frac{h_y}{\sqrt{\pi}} e^{-h_y^2 y^2} d\,y.$$

Wird ein und dieselbe Richtung der Abweichungen festgehalten, so ändert sich h mit der Feuerwaffe, der Entfernung und der Stellung der Zielfläche.

3. Einführung der $\mathfrak{p}$-prozentigen Streuungen zur Beurteilung der Schußgenauigkeit.

Anstatt der Größe h pflegt man andere Größen einzuführen, welche unmittelbar auf die Ausdehnung des Trefferbildes hinweisen; die üblichsten dieser Präzisionswerte sind die $\mathfrak{p}$-prozentigen Streuungen, auf die sich alle sonst angewendeten Präzisionswerte zurückführen lassen (siehe I. Band, Punkt 9 des III. Abschnittes).

Unter $\mathfrak{p}$-prozentiger Streuung $s_\mathfrak{p}$ versteht man die Breite des symmetrischen Parallelstreifens, der $\mathfrak{p}$ Prozent sämtlicher abgegebenen Schüsse enthält. Die Hälfte der $\mathfrak{p}$-prozentigen Streuung heißt $\mathfrak{p}$-prozentige Abweichung $a_\mathfrak{p}$, wonach

$$1)\qquad 2\,a_\mathfrak{p} = s_\mathfrak{p}$$

ist.

Diese Bezeichnung ist vollkommen begründet; denn es besteht die Wahrscheinlichkeit $\frac{\mathfrak{p}}{100} = 0{\cdot}01 \times \mathfrak{p} = 0{\cdot}0\,\mathfrak{p}$, mit einem Schusse

eine kleinere zufällige Abweichung als $a_{\mathfrak{p}}$ zu erhalten oder mit anderen Worten, es sind $\mathfrak{p}$ Prozent der Abweichungen kleiner als $a_{\mathfrak{p}}$.

Der Zusammenhang zwischen h und $a_{\mathfrak{p}}$ ergibt sich aus der Formel

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ah} e^{-t^2}\, dt = \Phi(a\,h),$$

wenn $P = \frac{\mathfrak{p}}{100} = 0{\cdot}0\,\mathfrak{p}$ gesetzt wird, wodurch a in $a_{\mathfrak{p}}$ übergeht; man erhält dann:

$$\frac{\mathfrak{p}}{100} = 0{\cdot}0\,\mathfrak{p} = \Phi(a_{\mathfrak{p}}\,h);$$

wird der dem Funktionswerte $0{\cdot}0\,\mathfrak{p}$ entsprechende Argumentenwert mit $\varrho_{\mathfrak{p}}$ bezeichnet, so hat man

2) $$\varrho_{\mathfrak{p}} = a_{\mathfrak{p}}\,h.$$

Für $\mathfrak{p} = 25$, 50 und 75 gibt die Tabelle I, wie bereits im I. Bande Punkt 9 des III. Abschnittes angeführt erscheint,

$$\varrho_{25} = 0{\cdot}2253, \qquad \varrho_{50} = 0{\cdot}4769 \text{ und } \varrho_{75} = 0{\cdot}8134$$

und dementsprechend ist:

$$0{\cdot}2253 = a_{25}\,h, \qquad 0{\cdot}4769 = a_{50}\,h \text{ und } 0{\cdot}8134 = a_{75}\,h.$$

Die 50-prozentige Abweichung wird häufig auch **wahrscheinliche Abweichung** genannt, weil es ebenso wahrscheinlich ist, **bei einem Schusse** eine zufällige Abweichung kleiner als a_{50} als eine solche größer als a_{50} zu erhalten. Mit Rücksicht auf die bereits im I. Bande gewählte und allgemein gebräuchliche Bezeichnung für den wahrscheinlichen Fehler wird auch in der Schießtheorie die wahrscheinliche Abweichung häufig mit r bezeichnet, so daß $a_{50} = r$ ist. Sehr oft wird für ϱ_{50} kurz ϱ gesetzt.

Wird der aus Formel 2) resultierende Wert von h in Formel $P = \Phi(a\,h)$ eingeführt, so folgt:

3) $$P = \Phi\left(a \cdot \frac{\varrho_{\mathfrak{p}}}{a_{\mathfrak{p}}}\right) = \Phi\left(\varrho_{\mathfrak{p}} \frac{a}{a_{\mathfrak{p}}}\right)$$

und wenn

4) $$\frac{a}{a_{\mathfrak{p}}} = k$$

gesetzt wird:

5) $$P = \Phi(\varrho_{\mathfrak{p}}\,k).$$

Werden Zähler und Nenner im linken Teile der Gleichung 4) verdoppelt und wird $2\,a = z$ gesetzt, so ist mit Berücksichtigung von 1)

6) $$\frac{a}{a_{\mathfrak{p}}} = \frac{2a}{2a_{\mathfrak{p}}} = \frac{z}{z_{\mathfrak{p}}} = k.$$

Vom Standpunkte des **praktischen Schießens** stellt z die Breite jenes symmetrischen Parallelstreifens dar, für den nach Formel 5) die Wahrscheinlichkeit P besteht, mit **einem Schusse** getroffen zu werden, oder in welchem, wie sich aus $P = 0{\cdot}0\,\mathfrak{p} = \frac{\mathfrak{p}}{100}$ ergibt, $\mathfrak{p} = 100 \,.\, P = 100\,\Phi(\varrho_{\mathfrak{p}}\, k)$ Prozent Treffer zu erwarten sind.

Im Sinne der obigen Deutung von z heißt das Argument k die **relative Zieldimension für den symmetrischen Parallelstreifen.**

Die Gleichung $P = \Phi(\varrho_{50}\, k)$, basiert auf der 50-prozentigen oder wahrscheinlichen Abweichung beziehungsweise der 50-prozentigen oder wahrscheinlichen Streuung, ist durch die Tabelle II repräsentiert. Einen Auszug aus derselben, der für die Bedürfnisse der Schießtheorie weitaus genügt, bildet die Tabelle III; sie wird häufig als **Tabelle der Wahrscheinlichkeitsfaktoren für symmetrische Parallelstreifen** bezeichnet. In den Schießtafeln pflegt man statt der Wahrscheinlichkeitsfaktoren P das 100-fache derselben, nämlich die Prozentzahlen $\mathfrak{p}$ anzugeben.

Will man nicht die Prozentzahl $\mathfrak{p}$, sondern direkt die Anzahl n_t der zu erwartenden Treffer, so folgt, wenn n Schüsse abgegeben werden, aus der Proportion

$$100 : \mathfrak{p} = n : n_t$$

die Zahl der zu erwartenden Treffer mit

$$n_t = \frac{\mathfrak{p}}{100} \cdot n.$$

Der Name „**Tabelle der Wahrscheinlichkeitsfaktoren**" ist dadurch gerechtfertigt, weil aus ihr jene Größe — der **Wahrscheinlichkeitsfaktor** — entnommen werden kann, welche mit Hundert (mit der Anzahl n abgegebener Schüsse) multipliziert, die **Prozentzahl** $\mathfrak{p}$ (**Anzahl** n_t) zu erwartender Treffer gibt.

Die erwähnte Tabelle II beziehungsweise III basiert, wie bereits gesagt, auf der 50-prozentigen Streuung. Aus den bisherigen Betrachtungen geht jedoch klar hervor, daß vom theoretischen Standpunkte aus sehr viele, wenn man will unendlich viele Tabellen der Wahrscheinlichkeitsfaktoren aufgestellt werden können, da $\mathfrak{p}$ alle Werte zwischen 0 und 100 annehmen kann. In der Ausübung des Schießens macht man gegenwärtig fast ausschließlich nur von der Tabelle III Gebrauch, bei welcher das Argument

$$k = \frac{a}{a_{50}} = \frac{z}{s_{50}} = \frac{\text{Zielbreite}}{\text{50-prozentige Streuung}}$$

ist. Die Tabelle IV mit dem Argumente

$$k = \frac{a}{a_{68}} = \frac{z}{s_{68}} = \frac{\text{Zielbreite}}{\text{68-prozentige Streuung}}$$

wurde in der Schießtheorie in Rußland bis in die jüngste Zeit angewendet. Die Tabelle V gibt die Funktionswerte für das Argument

$$k = \frac{a}{a_{58}} = \frac{z}{s_{58}} = \frac{\text{Zielbreite}}{\text{58-prozentige Streuung}}.$$

In Tabelle III beziehungsweise IV enthält die erste mit k überschriebene Vertikalreihe die Einheiten und die Zehntel der relativen Zieldimension $\frac{z}{s_{50}}$ beziehungsweise $\frac{z}{s_{68}}$, die Horizontalreihe von k die Hundertel dieser Größe. Der Wahrscheinlichkeitswert, welcher der auf zwei Dezimalstellen berechneten relativen Zieldimension entspricht, steht nun dort, wo die entsprechende Horizontalreihe mit der entsprechenden Vertikalreihe sich kreuzt.

Bei der Tabelle V ist der dem Argumente $\frac{z}{s_{58}}$ zukommende Funktionswert $\Phi\left(\varrho_{58}\frac{z}{s_{58}}\right)$ in einer Horizontalreihe zu suchen und es steht der Funktionswert neben dem Argumente.

Die Tabellen der Wahrscheinlichkeitsfaktoren können auch in einem rechtwinkeligen Koordinatensystem durch Kurven dargestellt werden, wenn man die Werte k als Abszissen, jene P oder $\mathfrak{p}$ als Ordinaten aufträgt.

Wie bereits bekannt, ist die 50-prozentige Abweichung a_{50} gleichbedeutend mit der wahrscheinlichen Abweichung, ferner kann die 58-prozentige Abweichung a_{58} als der durchschnittliche Fehler ϑ und die 68-prozentige Abweichung a_{68} als der mittlere Fehler μ aufgefaßt werden (siehe I. Band, Punkt 10 des III. Abschnittes).

Die Darstellung der Präzisionswerte a_{50}, a_{58}, a_{68} im prozentualen Maße gestattet, dieselben angenähert durch einfaches Abzählen aus dem Trefferbilde zu ermitteln, indem man alle zufälligen Abweichungen nach ihrer Größe ohne Rücksicht auf das Zeichen ordnet und sodann jene Abweichung sucht, in Bezug auf welche 50, 58, 68 Prozent kleiner sind; die so gefundene Größe ist die 50-, 58-, 68-prozentige Abweichung und das Doppelte derselben die bezügliche Streuung.

Die Methode des Abzählens ist — namentlich bei geringer Schußzahl im Trefferbilde — ziemlich ungenau und würde sich demnach zur Bestimmung der in die Schießtafeln einzutragenden Präzisionswerte keineswegs eignen (siehe hierüber I. Band, Punkt 5 des III. Abschnittes, Seite 58). Diese müssen durch Rechnung gefunden werden, und zwar besteht das einfachste Verfahren darin, die durchschnittliche Abweichung aus dem Trefferbilde zu rechnen und aus dieser durch Multiplikation mit gewissen Reduktionsfaktoren, deren Größen im I. Bande, Punkt 6 des III. Abschnittes ermittelt wurden, auf die verlangten Präzisionswerte zu schließen. So ist die 50-prozentige Abweichung das 0·845-fache der durchschnittlichen Abweichung, beziehungsweise die 50-prozentige Streuung das 1·69-fache der durchschnittlichen Abweichung u. s. f.

Man beurteilt den Grad der Genauigkeit einer unter scheinbar gleichen Verhältnissen abgegebenen Schußserie nicht nur nach der Größe des Parameters h, sondern auch nach der Größe der dieser Serie anhaftenden wahrscheinlichen Abweichung r und erkennt einer Schußserie eine umso größere Genauigkeit zu, je kleiner r ausfällt. Die Genauigkeit des Schießens ist somit der wahrscheinlichen Abweichung umgekehrt proportional. Dies ist selbstverständlich, denn die wahrscheinliche Abweichung ist dem Präzisionsmaß h umgekehrt proportional.

Was für die wahrscheinliche Abweichung gesagt wurde, gilt selbstverständlich auch für die mittlere Abweichung μ und für die durchschnittliche Abweichung ϑ.

Es ist bekanntlich (I. Band, Punkt 6 des III. Abschnittes):

$$h = \frac{0{\cdot}476\,94}{r} = \frac{0{\cdot}707\,11}{\mu} = \frac{0{\cdot}564\,19}{\vartheta}.$$

Oft wird zur Beurteilung der Schußgenauigkeit die wahrscheinliche oder die mittlere oder die durchschnittliche Streuung gewählt.

Die Wahrscheinlichkeitsfaktoren sind ihrem Wesen nach für alle Geschütze und Schußentfernungen gleich. In allen Schießtafeln befindet sich daher die gleiche Tabelle der Wahrscheinlichkeitsfaktoren. Das Eigentümliche der Geschütze und der Einfluß der Entfernungen liegt bereits in den 50-prozentigen (allgemein p-prozentigen) Streuungen.

4. Durchschnittliche Abweichung.

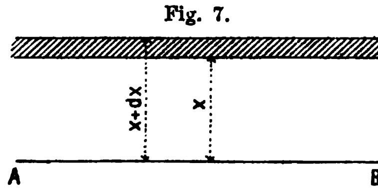
In diesem und in dem nächsten Punkte sollen noch speziell die durchschnittliche und die mittlere Abweichung beziehungsweise die

58-prozentige und die 68-prozentige Abweichung mit Rücksicht auf die Theorie des Schießens behandelt werden.

Die durchschnittliche Abweichung ϑ ist definiert durch den Grenzwert, dem sich der Bruch $\frac{[|x|]}{n}$ nähert, wenn die Anzahl n der unter scheinbar gleichen Verhältnissen abgegebenen Schüsse ins Unendliche wächst und $|x|$ den absoluten Betrag der bei einem Schusse erhaltenen Abweichung bedeutet (vgl. I. Band, Punkt 1 des III. Abschnittes).

Man denke sich die unbegrenzte Zielfläche in lauter Elementarstreifen zerlegt und betrachte zunächst jenen, dessen Begrenzungslinien um x und $x + dx$ von der Achse AB (Fig. 7) abstehen. Von n abgegebenen Schüssen wird eine gewisse Anzahl, sie heiße n_x, diesen Elementarstreifen treffen. Die Abweichungen im Intervalle x bis $x + dx$ können als gleich und von der Größe x angenommen werden, denn sie unterscheiden sich höchstens um dx voneinander. Die absolute Summe der dem betrachteten Intervall zukommenden Abweichungen beträgt demnach $n_x . |x|$. Führt man dieses Verfahren in allen Intervallen aus, so bekommt man als absolute Summe aller Abweichungen $\Sigma n_x |x|$. Die Summierung erstreckt sich über das ganze Gebiet der Abweichungen und $|x|$ stellt immer nur den absoluten Betrag der Abweichung x vor. Man hat also für die durchschnittliche Abweichung

Fig. 7.



1) $$\vartheta = \frac{\Sigma n_x |x|}{n} = \Sigma \frac{n_x}{n} \cdot |x|,$$

worin $\frac{n_x}{n}$ die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, daß bei einem Schusse die Abweichung x begangen werde, oder strenger ausgedrückt, daß bei einem Schusse die Abweichung in das Intervall x bis $x + dx$ falle; demnach ist, wenn die Abweichungen das Gesetz $\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx$ befolgen,

2) $$\frac{n_x}{n} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx.$$

Setzt man diesen Wert in 1) ein, so folgt:

3) $$\vartheta = \Sigma \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} |x|\, dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, e^{-h^2 x^2} dx = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} |x|\, e^{-h^2 x^2} dx.$$

Das bestimmte Integral wurde bereits im I. Bande, Punkt 2 des III. Abschnittes, berechnet; mit Rücksicht hierauf ist:

$$\vartheta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} = \frac{0{\cdot}564\,19}{h}. \tag{4}$$

Zu der Gleichung 3) gelangt man auch wie folgt:

Die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit, daß mit einem Schusse eine Abweichung x begangen werde, oder vielmehr, daß sie zwischen x und $x + dx$ falle, ist

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx.$$

Nach der Definition dieser Wahrscheinlichkeit hat man aber

$$\frac{\text{Zahl der Schüsse mit den Abweichungen zwischen } x \text{ und } x + dx}{\text{Gesamtzahl der Schüsse}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx;$$

multipliziert man beide Seiten mit $|x|$, so ist

$$\frac{\text{Summe der Absolutbeträge der Abweichungen zwischen } x \text{ und } x + dx}{\text{Gesamtzahl der Schüsse}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} |x|\, e^{-h^2 x^2} dx;$$

wird schließlich von $-\infty$ bis $+\infty$ integriert, so ergibt sich

$$\frac{\text{Summe der absoluten Beträge aller Abweichungen}}{\text{Gesamtzahl der Schüsse}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, e^{-h^2 x^2} dx = \vartheta.$$

5. Mittlere Abweichung.

Die mittlere Abweichung μ ist definiert durch den Grenzwert, welchem sich der Wurzelausdruck

$$\sqrt{\frac{[x\,x]}{n}}$$

nähert, wenn die Zahl n der unter scheinbar gleichen Verhältnissen abgegebenen Schüsse ins Unendliche wächst; $x\,x$ ist das Quadrat der bei einem Schusse erhaltenen Abweichung x (vgl. I. Band, Punkt 3 des III. Abschnittes).

Den Elementarstreifen, dessen untere Begrenzungslinie den Abstand x von der Achse AB (Fig. 7) hat und dessen Breite dx beträgt, werden von n abgegebenen Schüssen n_x Schüsse treffen. Jedem dieser n_x Schüsse wird eine dem Intervalle x bis $x + dx$ angehörende Abweichung zukommen. Diese Abweichungen können alle gleich und von der Größe x angenommen werden. Die Summe der Quadrate der in dem betrachteten Intervall liegenden Abweichungen beträgt sonach $n_x . x^2$. Wird dieses Verfahren in allen Intervallen ausgeführt, so bekommt man als Summe der Quadrate aller Abweichungen $\Sigma n_x . x^2$. Die Summierung erstreckt sich über das ganze Gebiet der Abweichungen. Man hat also für den Durchschnitt

$$1) \qquad \mu^2 = \frac{\Sigma n_x x^2}{n} = \Sigma \frac{n_x}{n} x^2,$$

worin $\frac{n_x}{n}$ die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, daß bei einem Schusse die Abweichung x begangen werde, oder strenger ausgedrückt, daß bei einem Schusse die Abweichung in das Intervall x bis $x + dx$ falle; demnach ist

$$2) \qquad \frac{n_x}{n} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx.$$

Hiemit übergeht 1) in:

$$3) \qquad \mu^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-h^2 x^2} dx.$$

Das bestimmte Integral wurde bereits im I. Bande, Punkt 4 des III. Abschnittes, berechnet; mit Rücksicht hierauf ist:

$$4) \qquad \mu = \frac{1}{h\sqrt{2}} = \frac{0{\cdot}707\,11}{h}.$$

Zu der Gleichung 3) gelangt man auch auf folgende Weise: Die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit mit einem Schusse die Abweichung x zu erhalten oder vielmehr, daß letztere zwischen x und $x + dx$ liege, ist

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx.$$

Nach der Definition dieser Wahrscheinlichkeit hat man aber

$$\frac{\text{Zahl der Schüsse mit den Abweichungen zwischen } x \text{ und } x + dx}{\text{Gesamtzahl der Schüsse}} =$$

$$= \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx;$$

multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit x^2, so folgt

$$\frac{\text{Summe der Quadrate der Abweichungen zwischen } x \text{ und } x + dx}{\text{Gesamtzahl der Schüsse}} =$$

$$= \frac{h}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-h^2 x^2} dx;$$

wird von $-\infty$ bis $+\infty$ integriert, so ergibt sich

$$\frac{\text{Summe der Quadrate aller Abweichungen}}{\text{Gesamtzahl der Schüsse}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-h^2 x^2} dx = \mu^2.$$

Beispiel. Wie viel Prozent Treffer sind in dem symmetrischen Parallelstreifen von der Breite 2ϑ respektive 2μ zu erwarten?

Da der Durchschnittsfehler ϑ als die 58-prozentige und der mittlere Fehler μ als die 68-prozentige Fehlergrenze aufgefaßt werden darf, so sind in den fraglichen Parallelstreifen 58 beziehungsweise 68 Prozent sämtlicher Schüsse als Treffer zu erwarten.

Sucht man in der Tabelle V jenen Funktionswert auf, welcher dem Argumentenwerte $k = \frac{z}{s_{58}} = 1$ entspricht und in der Tabelle IV jenen Funktionswert, welcher gleichfalls dem Argumentenwerte $k = \frac{z}{s_{68}} = 1$ zukommt, so wird sich eine neuerliche Bestätigung der aufgestellten Behauptung ergeben.

Die vorgelegte Aufgabe soll nun unter der Annahme gelöst werden, daß man die Beziehungen zwischen ϑ beziehungsweise μ und $a_{50} = r$ kennt und nur die Tabelle III der Wahrscheinlichkeitsfaktoren, basiert auf der 50-prozentigen oder wahrscheinlichen Abweichung beziehungsweise der 50-prozentigen Streuung zur Verfügung steht.

Es ist bekanntlich $\vartheta = \frac{1}{\varrho\sqrt{\pi}} r = 1{\cdot}182\,94\, r$ und $\mu = \frac{1}{\varrho\sqrt{2}} r = 1{\cdot}482\,60\, r$; daher ergibt sich für die relativen Zieldimensionen

$$\frac{2\vartheta}{2a_{50}} = \frac{2\vartheta}{s_{50}} = 1{\cdot}182\,94 \quad \text{und} \quad \frac{2\mu}{2a_{50}} = \frac{2\mu}{s_{50}} = 1{\cdot}482\,60.$$

Mit Hilfe der zuletzt genannten Tabelle der Wahrscheinlichkeitsfaktoren findet man wieder, daß in den symmetrischen Parallelstreifen von der Breite 2ϑ rund 58 Prozent und in solchen von der Breite 2μ rund 68 Prozent sämtlicher abgegebenen Schüsse als Treffer zu erwarten sind.

6. Ermittlung der zu erwartenden Prozentzahl beziehungsweise der Anzahl Treffer in symmetrischen Parallelstreifen.

Durch die vorstehenden Untersuchungen ist die Grundlage gewonnen, um die Hauptaufgabe der Treffwahrscheinlichkeitstheorie zu lösen, d. i. die Ermittlung der Prozentzahl beziehungsweise der Anzahl zu erwartender Treffer, wenn Lage, Form und Größe der Zielfläche, die stets eben vorausgesetzt wird, ferner der Ort des mittleren Treffpunktes bekannt sind.

Wenn bezüglich der Zielfläche alles unverändert gedacht wird, so steht offenbar die Prozentzahl (Anzahl) zu erwartender Treffer in inniger Wechselbeziehung mit der Lage des mittleren Treffpunktes; es kann also auch die Aufgabe eine Umkehrung erfahren, da man auf Grund der beobachteten Prozentzahl (Anzahl) Treffer nach der Lage des mittleren Treffpunktes fragen kann.

In diesem Punkte soll vorläufig gezeigt werden, wie man mittels der Tabellen der Wahrscheinlichkeitsfaktoren (Tabellen III, IV und V) die Prozentzahl (Anzahl) Treffer bestimmen kann, welche in einem symmetrischen Parallelstreifen zu erwarten sind.

Da die genannten Tabellen gemäß der Formel $P = \Phi(\varrho_\mathfrak{p} k)$ die Wahrscheinlichkeit P als Funktion der relativen Zieldimension $k\left(=\frac{a}{a_\mathfrak{p}}=\frac{z}{s_\mathfrak{p}}\right)$ ausdrücken, so müssen, um P zu finden, gegeben sein:

a) die Breite z des Zielstreifens und

b) die in Betracht kommende $\mathfrak{p}$-prozentige Streuung $s_\mathfrak{p}$ beziehungsweise die Distanz, für welche aus der Schießtafel das entsprechende $s_\mathfrak{p}$ zu entnehmen ist.

Wird z durch $s_\mathfrak{p}$ dividiert, so erhält man die relative Dimension k und mit dieser aus der betreffenden Tabelle der Wahrscheinlichkeitsfaktoren die Größe P, welche, gemäß der Formeln $\mathfrak{p} = 100 \, . \, P$ und $n_t = n \, . \, P$, mit 100 beziehungsweise mit der Anzahl n der abgegebenen Schüsse zu multiplizieren ist, um die Prozentzahl beziehungsweise die Anzahl zu erwartender Treffer zu erhalten.

Wie schon wiederholt erwähnt wurde, enthalten die in den Schießtafeln aufgenommenen Tabellen der Wahrscheinlichkeitsfaktoren unmittelbar die Prozentzahlen.

Ist, bei der Lage des mittleren Treffpunktes in der Mittellinie des Parallelstreifens, die Wahrscheinlichkeit P bekannt, diesen Streifen zu treffen, so kann die relative Zieldimension k ermittelt werden; ist

zudem z beziehungsweise $s_{\mathfrak{p}}$ (die Distanz) gegeben, so kann man $s_{\mathfrak{p}}$ (die Distanz) beziehungsweise z finden. Dies ist auch klar, denn in der Gleichung

$$P = \Phi\left(\varrho_{\mathfrak{p}} \frac{z}{s_{\mathfrak{p}}}\right) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{p} = 100\,\Phi\left(\varrho_{\mathfrak{p}} \frac{z}{s_{\mathfrak{p}}}\right)$$

kommen drei Größen, nämlich P oder die sie vertretende Größe $\mathfrak{p}$, ferner z und $s_{\mathfrak{p}}$ (die Distanz) vor, welche Veränderungen unterworfen werden können.

Da diese drei Größen nur durch eine einzige Gleichung in Beziehung gebracht sind, so müssen — soll die Aufgabe eine bestimmte werden — zwei dieser Größen bekannt sein, wenn die dritte ermittelt werden soll. Demnach ergeben sich in ganz ungezwungener Weise folgende drei in das Gebiet der Praxis fallende Fundamentalaufgaben:

α) Gegeben z und $s_{\mathfrak{p}}$, zu suchen $\mathfrak{p}$, oder: Gegeben sind die Breite des symmetrischen Parallelstreifens (Zielbreite) z und die $\mathfrak{p}$-prozentige Streuung $s_{\mathfrak{p}}$, welche einer bestimmten Feuerwaffe, Entfernung, Ziellage u. s. w. entspricht; zu bestimmen ist die in dem Ziele zu erwartende Trefferprozentzahl $\mathfrak{p}$.

Die Lösung dieser Aufgabe wurde bereits in diesem Punkte erschöpfend erläutert.

β) Gegeben $s_{\mathfrak{p}}$ und $\mathfrak{p}$, zu suchen z, oder: Es ist jene Breite des symmetrischen Parallelstreifens (Zielbreite) z zu bestimmen, bei welcher für eine gegebene $\mathfrak{p}$-prozentige Streuung $s_{\mathfrak{p}}$ im Ziele $\mathfrak{p}$ Prozent Treffer zu erwarten sind.

Für den Funktionswert $P = \frac{\mathfrak{p}}{100}$ kann aus der betreffenden Tabelle der Wahrscheinlichkeitsfaktoren der Argumentenwert $k = \frac{z}{s_{\mathfrak{p}}}$ entnommen werden. Da nun k und $s_{\mathfrak{p}}$ bekannt sind, so ist z durch die Gleichung $z = k\,s_{\mathfrak{p}}$ bestimmt.

γ) Gegeben z und $\mathfrak{p}$, zu suchen $s_{\mathfrak{p}}$, oder: Wie groß darf die $\mathfrak{p}$-prozentige Streuung $s_{\mathfrak{p}}$ höchstens sein, wenn in einem Ziele von der Breite z mindestens $\mathfrak{p}$ Prozent Treffer erhalten werden sollen?

Der Wert k wird so gewonnen wie bei der Aufgabe *β)*; hiemit resultiert für $s_{\mathfrak{p}}$ der Wert $s_{\mathfrak{p}} = \frac{z}{k}$.

Es ist festzuhalten, wie nochmals hervorgehoben werden möge, daß der mittlere Treffpunkt in der Mittellinie des das Ziel repräsentierenden, nach einer Richtung hin unbegrenzten Parallel-

streifens zu denken ist; die Bezeichnung unbegrenzt ist dahin zu verstehen, daß der Zielstreifen eine solche Länge haben müsse, daß nach dieser Richtung ein Fehlschuß ausgeschlossen erscheint.

7. Beispiele.

1. Beispiel. Gegeben $k = \frac{z}{s_{50}} = 2$, d. h. ein symmetrischer Parallelstreifen von der Breite $z = 2\, s_{50}$; wie groß ist P beziehungsweise $\mathfrak{p}$?

Lösung mit Hilfe der Tabelle I. Der Gleichung $P = \Phi(a\,h)$ zufolge wird es sich hier zunächst um die Angabe des Argumentes $a\,h$ handeln. Man hat allgemein $a\,h = a_{50}\,h \cdot \frac{a}{a_{50}}$, wobei bekanntlich $\varrho = a_{50}\,h = 0{\cdot}4769$ bedeutet; der Aufgabe gemäß ist $a = s_{50} = 2\, a_{50}$, also $\frac{a}{a_{50}} = k = 2$; somit $a\,h = 2 \times 0{\cdot}4769 = 0{\cdot}9538$. Die Tabelle I gibt nun für das Argument 0·95 den Funktionswert 0·82089; es ist also $\Phi(0{\cdot}95) = 0{\cdot}82089$, welcher Wert als der gesuchte Wert P angesehen werden kann. Man hat daher

$$P = 0{\cdot}82089 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p} = 82\%.$$

Die Konstante 0·4769 kann übrigens mit Hilfe der Tabelle I wie folgt gefunden werden: Da die Wahrscheinlichkeit, daß die bei einem Schusse erhaltene Abweichung kleiner als a_{50} ist, gleich $\frac{1}{2}$ ist, so hat man $\Phi(a_{50}h) = \frac{1}{2}$. Die Tabelle I gibt für diesen Funktionswert den Argumentenwert $a\,h = a_{50}\,h = 0{\cdot}4769$.

Lösung mit Hilfe der Tabelle der Wahrscheinlichkeitsfaktoren, basiert auf der 50-prozentigen Streuung (Tabelle III). Diese Tabelle gibt für das Argument $k = 2$ unmittelbar den Funktionswert $\Phi(\varrho\,.\,k) = \Phi(2\,\varrho) = 0{\cdot}8227$, also ist

$$P = 0{\cdot}8227 \quad \text{und rund} \quad \mathfrak{p} = 82\%.$$

Die auf zwei Arten gefundenen Lösungen sind, wie man sieht, praktisch übereinstimmend, was selbstverständlich ist.

Die Lösung der vorstehenden Aufgabe mit Hilfe der Tabelle I ist zwar möglich, aber umständlicher als die Lösung, welche auf der Benützung der Tabelle III beruht. Diese Tabelle wird in bekannter Weise aus der Tabelle I abgeleitet.

2. Beispiel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Schusse einen symmetrischen Parallelstreifen von der Dimension $z = \frac{1}{3}\, s_{25}$ zu treffen?

Es ist wieder $a h = a_{25} h \cdot \frac{a}{a_{25}}$, wobei bekanntlich $\varrho_{25} = a_{25} h = 0\cdot2253$ bedeutet; der Aufgabe gemäß ist $a = \frac{1}{6} s_{50} = \frac{1}{3} a_{50}$, also $\frac{a}{a_{25}} = k = \frac{1}{3}$; somit $a h = \frac{1}{3} \times 0\cdot2253 = 0\cdot0751$. Die Tabelle I gibt für das Argument 0·07 den Funktionswert 0·07886, welcher als der gesuchte Wert P angesehen werden kann. Es ist somit

$P = 0\cdot07886$ und diesem Werte entsprechend $\mathfrak{p} = 8\%$.

Die Konstante 0·2253 kann auch mit Hilfe der Tabelle I gefunden werden; es entspricht nämlich dem Funktionswert $\frac{1}{4} = 0\cdot25$ der Argumentenwert 0·2253.

3. Beispiel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Schusse einen symmetrischen Parallelstreifen von der Dimension $z = \frac{1}{3} s_{50}$ zu treffen?

Hier ist $a = \frac{1}{6} s_{50} = \frac{1}{3} a_{50}$, $\frac{a}{a_{50}} = k = \frac{1}{3}$, $\varrho = a_{50} h = 0\cdot4769$, also $a h = \varrho k = \frac{1}{3} \varrho$, $P = \Phi(\varrho k) = \Phi(\frac{1}{3} \varrho) = \Phi(\frac{1}{3} \times 0\cdot4769) = \Phi(0\cdot1590)$. Aus der Tabelle I entnimmt man für das Argument $a h = 0\cdot16$ den Funktionswert $\Phi(0\cdot16) = 0\cdot17901$, welcher als der gesuchte Wahrscheinlichkeitswert P angesehen werden kann. Man hat somit

$P = 0\cdot17901$ und diesem Werte entsprechend $\mathfrak{p} = 18\%$.

Mittels der Tabelle III der Wahrscheinlichkeitsfaktoren, basiert auf der 50-prozentigen Streuung, findet man für das Argument $k = \frac{1}{3} = 0\cdot33$ direkt den Wahrscheinlichkeitswert $\Phi(\varrho . k) = 0\cdot1761 = P$, also wieder $\mathfrak{p} = 18\%$.

4. Beispiel. Einer Feuerwaffe entspricht auf einer bestimmten Distanz $h_{50} = 3\cdot6\,m$; die Höhe eines in horizontaler Richtung unbegrenzt gedachten Zieles (Parallelstreifens) sei $h = 1\cdot8\,m$. Wieviel Prozent direkter Treffer können auf dieser Entfernung in diesem Zielstreifen erwartet werden?

Man hat $h = 1\cdot8\,m$, $h_{50} = 3\cdot6$, daher ist $k = \frac{1\cdot8}{3\cdot6} = \frac{1}{2}$; dieser relativen Zieldimension entsprechen zufolge der Tabelle III der Wahrscheinlichkeitsfaktoren $\mathfrak{p} = 26\cdot41\%$ Treffer. Selbstverständlich ist vorausgesetzt, daß der mittlere Treffpunkt in der Mittellinie des Parallelstreifens liegt.

5. Beispiel. In einen symmetrischen Parellelstreifen von $h = 1\cdot4\,m$ Höhe fallen auf einer gewissen Distanz $\frac{1}{3}$ der

abgegebenen Schüsse. Wie groß ist die dieser Distanz entsprechende 50-prozentige Höhenstreuung h_{50}?

Hier ist $P = 0{\cdot}33$, $h = 1{\cdot}4\,m$; dem Funktionswerte 0·33 entspricht der Tabelle III der Wahrscheinlichkeitsfaktoren zufolge rund genommen das Argument $k = 0{\cdot}64$, somit ist $h_{50} = \frac{h}{k} = \frac{1{\cdot}4}{0{\cdot}64} = 2{\cdot}19\,m$.

8. Verwandlung der Tabellen der Wahrscheinlichkeitsfaktoren in andere, bei welchen die Prozentzahl das Argument bildet.

Die Tabelle der Wahrscheinlichkeitsfaktoren gibt für das Argument $k = \frac{z}{s_{50}}$ (allgemein für $k = \frac{z}{s_{\mathfrak{p}}}$), das ist für die relative Zieldimension, den Funktionswert P oder die Prozentzahl $\mathfrak{p}$ zu erwartender Treffer. Man kann aber aus der Tabelle der Wahrscheinlichkeitsfaktoren durch Umkehrung eine andere Tabelle ableiten, welche für eine bestimmte Prozentzahl $\mathfrak{p}$ von Treffern die zugehörige relative Zieldimension k gibt. Die Tabelle der Wahrscheinlichkeitsfaktoren löst zwar auch dieses Problem, allein es handelt sich hier darum, daß $\mathfrak{p}$ nach konstanten Differenzen vorwärts schreitet. Nachstehend ist eine solche Tabelle, bei welcher die konstante Differenz des Argumentes 5 Prozent beträgt, basiert auf der 50-prozentigen Streuung, gegeben:

Prozentzahl $\mathfrak{p}$	Relative Zieldimension $k = \frac{z}{s_{50}}$	Prozentzahl $\mathfrak{p}$	Relative Zieldimension $k = \frac{z}{s_{50}}$
5	0·09	55	1·12
10	0·18	60	1·25
15	0·28	65	1·39
20	0·38	70	1·54
25	0·47	75	1·71
30	0·57	80	1·90
35	0·67	85	2·13
40	0·78	90	2·44
45	0·89	95	2·91
50	1·00	100	etwa 4

Diese Tabelle kann ebenso wie die Tabelle der Wahrscheinlichkeitsfaktoren leicht durch eine Kurve dargestellt werden. Für den vorliegenden Fall hat man in einem rechtwinkeligen Koordinatensystem die Prozentzahlen $\mathfrak{p}$ als Abszissen und die zugehörigen relativen

Zieldimensionen k als Ordinaten aufzutragen (siehe auch Punkt 3 dieses Abschnittes, Seite 237).

Beispiel. Wie breit muß ein Parallelstreifen wenigstens sein, damit derselbe 60% aller Schüsse auffängt?

Man hat in diesem Falle die 60% entsprechende relative Zieldimension, das ist 1·25, mit s_{50} zu multiplizieren.

Ist anderseits die Breite des Parallelstreifens gegeben und soll die maximale Prozentzahl zu erwartender Treffer berechnet werden, so dividiere man die gegebene Breite des Parallelstreifens durch s_{50} und erhält dadurch die relative Zieldimension; für diese ist aus der eben angeführten Tabelle die fragliche Trefferprozentzahl zu entnehmen. Diese Aufgabe wurde bereits im Punkte 6 dieses Abschnittes gelöst. Ist beispielsweise $s_{50} = 1\,m$, die Breite des Zielstreifens $z = 1{\cdot}71\,m$, so erhält man für die relative Zieldimension $k = \frac{1{\cdot}71}{1} = 1{\cdot}71$, welcher 75% entsprechen. Der Parellelstreifen nimmt daher 75% Treffer auf. — Es ist selbstverständlich, daß mit der vorstehenden Tabelle dieselben Aufgaben gelöst werden können wie mit der Tabelle der Wahrscheinlichkeitsfaktoren.

9. Wahrscheinlichkeit, mit einem Schusse asymmetrische Parallelstreifen zu treffen; Prozentzahl (Anzahl) Treffer in denselben.

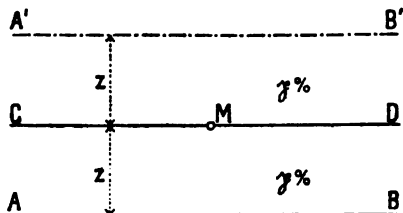
Diese Aufgabe läßt sich leicht auf die im Punkte 6 dieses Abschnittes behandelte zurückführen. Der größeren Klarheit wegen sollen bei der Lösung drei Fälle unterschieden werden, und zwar:

a) der mittlere Treffpunkt befindet sich in einer Begrenzungslinie des Parallelstreifens;

b) der mittlere Treffpunkt liegt innerhalb des Parallelstreifens und

c) der mittlere Treffpunkt liegt außerhalb des Parallelstreifens.

Fig. 8.



Zu *a)*. Es sei $ABCD$ (Fig. 8) der Parallelstreifen, dessen Breite z sein möge; der mittlere Treffpunkt M liegt in der Begrenzungslinie CD. Die Wahrscheinlichkeit P für das Treffen dieses Parallelstreifens mit einem Schusse ist zufolge der zentrisch symmetrischen Verteilung der Treffer nur halb so groß als in dem Falle, wo ein Parallelstreifen von der Di-

mension $2z$, hier der Parallelstreifen $ABA'B'$, symmetrisch zum mittleren Treffpunkt liegt. Man hat somit für die Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{1}{2}\,\Phi\left(\varrho\frac{2z}{s_{50}}\right)$$

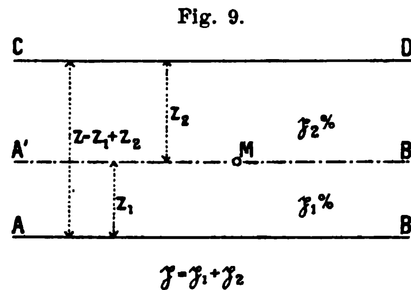
und für die Prozentzahl

$$\mathfrak{p} = 100 \,.\, P = 50 \,.\, \Phi\left(\varrho\frac{2z}{s_{50}}\right) \cdot$$

Es ist also für die relative Zieldimension $k = \frac{2z}{s_{50}}$ aus der bezüglichen Tabelle der Funktionswert P beziehungsweise $\mathfrak{p}$ zu entnehmen und durch 2 zu dividieren.

Zu *b)*. Liegt der mittlere Treffpunkt M (Fig. 9) innerhalb des Parallelstreifens und steht er von den Begrenzungslinien um z_1 und z_2 ab, dann hat man es mit zwei Parallelstreifen von den Breiten z_1 und z_2 zu tun, wobei der mittlere Treffpunkt in einer Begrenzungslinie sich befindet [Fall *a)*]; mit Rücksicht auf die Betrachtungen des Falles *a)* ist also

Fig. 9.



$$P = \frac{1}{2}\left\{\Phi\left(\varrho\frac{2z_1}{s_{50}}\right) + \Phi\left(\varrho\frac{2z_2}{s_{50}}\right)\right\}$$

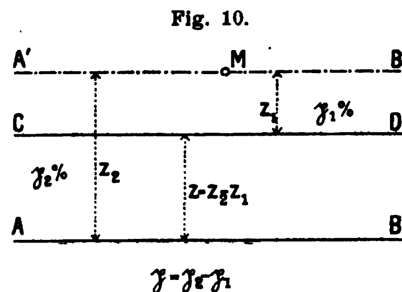
und

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 = 50\left\{\Phi\left(\varrho\frac{2z_1}{s_{50}}\right) + \Phi\left(\varrho\frac{2z_2}{s_{50}}\right)\right\} \cdot$$

Fällt der mittlere Treffpunkt in die Mittellinie des Parallelstreifens, ist also $z_1 = z_2$, so erhält letzterer eine zum mittleren Treffpunkte symmetrische Lage und die Aufgabe deckt sich mit jener des Punktes 6 dieses Abschnittes.

Zu *c)*. Liegt der mittlere Treffpunkt M (Fig. 10) außerhalb des Parallelstreifens, so führe man durch M die Gerade $A'B'$ parallel zu den Begrenzungslinien des Parallelstreifens und erhält zwei Parallelstreifen $ABA'B'$ und $CDA'B'$, bei welchen der mittlere Treffpunkt in einer Begrenzungslinie liegt; die Aufgabe ist dann wieder auf den Fall *a)* zurückgeführt. Hat also der Parallelstreifen $ABCD$ die Breite $z = z_2 - z_1$ und liegt der mittlere Treffpunkt außerhalb dieses Streifens — die eine

Fig. 10.



Begrenzungslinie um z_1, die andere um $z_2 > z_1$ von diesem Punkt entfernt —, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, diesen Parallelstreifen mit einem Schusse zu treffen,

$$P = \frac{1}{2}\left\{\Phi\left(\varrho\frac{2\,z_2}{s_{50}}\right) - \Phi\left(\varrho\frac{2\,z_1}{s_{50}}\right)\right\};$$

für die zu erwartende Prozentzahl hat man

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1 = 50\left\{\Phi\left(\varrho\frac{2\,z_2}{s_{50}}\right) - \Phi\left(\varrho\frac{2\,z_1}{s_{50}}\right)\right\}.$$

Diese Formel folgt aus der beim Fall *b)* für $\mathfrak{p}$ abgeleiteten Formel; denn ändert z_1 das Vorzeichen, so muß, weil $\Phi(a\,h)$ eine ungerade Funktion, also $\Phi(-a\,h) = -\Phi(a\,h)$ ist, der Ausdruck $\Phi\left(\varrho\frac{-2z_1}{s_{50}}\right)$ in $-\Phi\left(\varrho\frac{2\,z_1}{s_{50}}\right)$ übergehen. Durch Einführung des Zeichengegensatzes wird somit die beim Fall *b)* gefundene Formel verallgemeinert.

Will man aus der Prozentzahl $\mathfrak{p}$ die Anzahl n_t der zu erwartenden Treffer ermitteln, so ist bekanntlich, wenn n Schüsse abgegeben werden, $n_t = n\frac{\mathfrak{p}}{100}$.

10. Unvermeidlicher und vermeidlicher Trefferverlust.

Die größte Prozentzahl Treffer wird offenbar dann erhalten, wenn der mittlere Treffpunkt in der Mittellinie des Parallelstreifens liegt (symmetrischer Parallelstreifen). Ist unter dieser Voraussetzung die Breite des Parallelstreifens gleich oder größer als die bezügliche 4-fache 50-prozentige respektive 3·5(3)-fache 58(68)-prozentige Streuung, so werden, praktisch genommen, alle Schüsse, d. i. 100 Prozent, in dem Parallelstreifen als Treffer erscheinen oder mit anderen Worten ausgedrückt: es findet kein Trefferverlust statt.

Ist, an der obigen Voraussetzung festhaltend, die Breite des Parallelstreifens geringer als die oben angegebenen Grenzwerte, so werden weniger als 100 Prozent Treffer im Parallelstreifen erscheinen, welche Sorgfalt man auch anwenden möge.

Hiedurch ergibt sich ein Trefferverlust, der nicht zu vermeiden ist und den man daher den unvermeidlichen Trefferverlust nennen kann. Bezeichnet man ihn, in Prozenten ausgedrückt, mit $\mathfrak{p}_u$, so ergibt sich derselbe, indem von 100 die nach Punkt 6 dieses Abschnittes berechnete Prozentzahl $\mathfrak{p}$ Treffer abgezogen wird. Es ist also

$$1)\qquad \mathfrak{p}_u = 100 - 100\,\Phi\left(\varrho_{\mathfrak{p}}\cdot\frac{z}{s_{\mathfrak{p}}}\right) = 100 - \mathfrak{p}.$$

Infolge der symmetrischen Lage des beispielsweise horizontalen Parallelstreifens zum mittleren Treffpunkte werden hievon $\frac{\mathfrak{p}_u}{2}$ Prozent Schüsse vor den Parallelstreifen und $\frac{\mathfrak{p}_u}{2}$ Prozent Schüsse hinter den Parallelstreifen fallen, welche dann unvermeidliche Kurz- und Weitschüsse genannt werden. Beim vertikalen und symmetrischen Parallelstreifen werden $\frac{\mathfrak{p}_u}{2}$ Prozent Schüsse, nämlich die Weitschüsse, über den Parallelstreifen hinweggehen und $\frac{\mathfrak{p}_u}{2}$ Prozent Schüsse, nämlich die Kurzschüsse, unterhalb des betrachteten Parallelstreifens beziehungsweise vor den Parallelstreifen aufschlagen.

Die Gleichung 1) kann man zweckmäßig durch eine Tabelle mit einem Eingange ersetzen.

Nachstehend folgt eine Tabelle, aus welcher für Werte der relativen Zieldimensionen $\frac{z}{s_{50}}$ der unvermeidliche Verlust an Trefferprozenten entnommen werden kann.

Tabelle der unvermeidlichen Trefferverluste für symmetrische Parallelstreifen.

$k=\frac{z}{s_{50}}$	$\mathfrak{p}_u$	$k=\frac{z}{s_{50}}$	$\mathfrak{p}_u$	$k=\frac{z}{s_{50}}$	$\mathfrak{p}_u$	$k=\frac{z}{s_{50}}$	$\mathfrak{p}_u$
0·1	94·62	1·1	45·81	2·1	15·66	3·1	3·65
0·2	89·27	1·2	41·83	2·2	13·78	3·2	3·09
0·3	83·96	1·3	38·06	2·3	12·08	3·3	2·60
0·4	78·73	1·4	34·50	2·4	10·55	3·4	2·18
0·5	73·59	1·5	31·17	2·5	9·17	3·5	1·82
0·6	68·57	1·6	28·05	2·6	7·95	3·6	1·52
0·7	63·68	1·7	25·15	2·7	6·86	3·7	1·26
0·8	58·95	1·8	22·47	2·8	5·89	3·8	1·04
0·9	54·38	1·9	20·00	2·9	5·05	3·9	0·85
1·0	50·00	2·0	17·73	3·0	4·30	4·0	0·70

In allen Fällen, wo der mittlere Treffpunkt nicht in der Mittellinie des Parallelstreifens liegt (asymmetrischer Parallelstreifen), ergibt sich eine geringere Prozentzahl $\mathfrak{p}'$ als jene $\mathfrak{p}$, welche bei symmetrischer Lage desselben erreicht werden könnte. Dieser aus dem eben angeführten Grunde als vermeidlich bezeichnete Trefferverlust ist demnach der Unterschied zwischen der maximalen zu erwartenden und der wirklich erhaltenen Prozentzahl Treffer. Be-

zeichnet man den **vermeidlichen Trefferverlust**, in Prozenten ausgedrückt, mit $\mathfrak{p}_v$, so hat man:

2) $$\mathfrak{p}_v = \mathfrak{p} - \mathfrak{p}'.$$

Wenn demnach beim Beschießen eines Parallelstreifens nicht alle abgegebenen Schüsse treffen, also ein Trefferverlust eintritt, so kann dies davon herrühren, daß entweder die Breite des Streifens kleiner ist als die betreffende größte Streuung oder daß der mittlere Treffpunkt sich nicht in der Mittellinie des Parallelstreifens befindet. Hiebei wird stillschweigend vorausgesetzt, daß das Maß der Schußpräzision der Feuerwaffe unverändert bleibt.

Beispiele.

1. Beispiel. Bis zu welcher Entfernung x_0 kann gegangen werden, damit bei einem gegebenen Ziele ein bestimmt fixierter unvermeidlicher Trefferverlust $\mathfrak{p}_u$ nicht überschritten werde, sobald man eingeschossen ist?

In diesem Falle sind z und $\mathfrak{p}_u$ gegeben, während $s_\mathfrak{p}$ und dementsprechend die Distanz x_0 aus der Schießtafel zu bestimmen ist.

Mittels der Tabelle der unvermeidlichen Trefferverluste für symmetrische Parallelstreifen kann für den Funktionswert $\mathfrak{p}_u$ der Argumentenwert $k = \frac{z}{s_\mathfrak{p}}$ und aus diesem $s_\mathfrak{p} = \frac{z}{k}$ gefunden werden, für welche Größe aus der Schießtafel die Distanz x_0 entnommen werden kann.

2. Beispiel. Bis zu welcher Distanz kann als charakteristisches Merkmal des Eingeschossenseins die Bedingung angesehen werden, daß alle Schüsse die gegebene Zielfläche direkt treffen?

Hier sind, wie im 1. Beispiel, $\mathfrak{p}_u$ und z gegeben und ist $s_\mathfrak{p}$ respektive x_0 zu bestimmen. Der unvermeidliche Trefferverlust hat jedoch praktisch genommen den Wert Null.

11. Darstellung des theoretischen Trefferbildes.

Die beim Schießen zu erwartende Verteilung der Treffer kann in allgemeinster Weise bildlich durch das sogenannte theoretische Trefferbild ersichtlich gemacht werden. Zu diesem Zwecke zerlegt man die — unbegrenzt zu denkende — ebene Zielfläche von einer durch den mittleren Treffpunkt gehenden Geraden ausgehend in lauter gleich breite Parallelstreifen, z. B. in Streifen, deren Breite gleich a_{50} oder $0{\cdot}5\,a_{50}$ u. s. f. ist, und bestimmt die in den ver-

schiedenen Parallelstreifen zu erwartende Prozentzahl Treffer. Werden diese Parallelstreifen hinsichtlich ihrer Breite in verjüngtem Maßstabe dargestellt und wird in jedem derselben die entsprechende Prozentzahl Treffer eingetragen, so erhält man das theoretische Trefferbild, welches die Gruppierungsgesetze der Treffer dem Auge gewisser-

Fig. 11.

I ($k-\frac{Z}{s_{50}}$)	II ($k-\frac{Z}{s_{50}}$)	III ($k-\frac{Z}{s_{58}}$)	IV ($k-\frac{Z}{s_{68}}$)
2·15 (2)	0·91 (1)	0·83	0·62
	1·24 (1)	1·47	1·65
2·72 (7) A	2·44 (2·5)	3·23	4·41
	4·28 (4·5)	B 6·04	9·18
16·13 (16) A'	6·72 (7)	B' 9·68	14·99
	9·41 (9)	13·25	19·15 M S
S 25 M	11·79 (12)	15·50 M	19·15
	13·21 M (13)	15·50	14·99
25	13·21 (13)	13·25	9·18
	11·79 (12)	D' 9·68	4·41
16·13 (16) C'	9·41 (9)	D 6·04	1·65
	6·72 (7)	3·23	0·62
6·72 (7) C	4·28 (4·5)	1·47	
	2·44 (2·5)	0·83	
2·15 (2)	1·24 (1)		
	0·91 (1)		

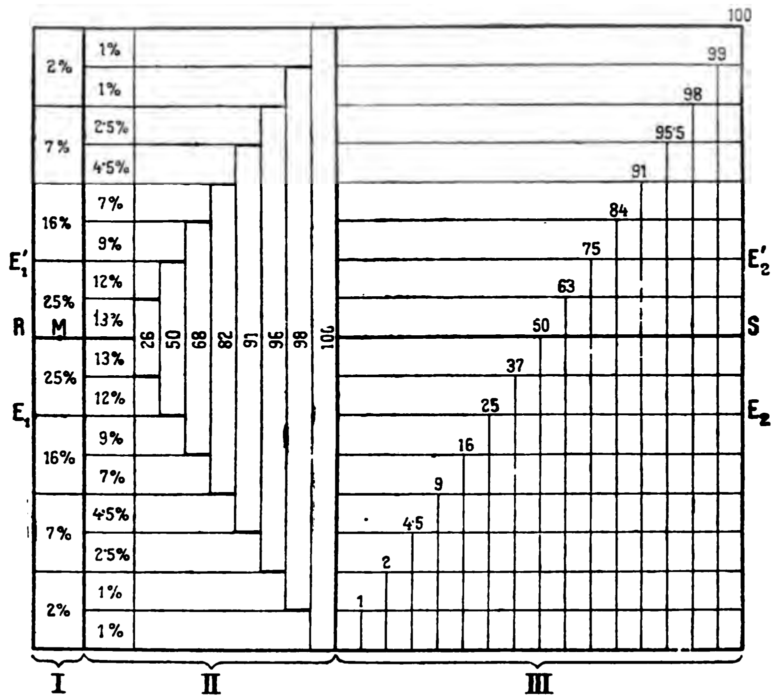
maßen vorführt. Hiebei werden immer je zwei Parallelstreifen symmetrisch zum mittleren Treffpunkte liegen und in jedem derselben wird nach dem Gesetze der zentrischen Symmetrie über die Gruppierung der Treffer die gleiche Anzahl Treffer zu erwarten sein.

Die linke Hälfte (I und II) der Fig. 11 stellt 2 theoretische Trefferbilder dar; in einem ist die Streifenbreite gleich a_{50}, in dem anderen $0·5\,a_{50}$. Wie die in dem theoretischen Trefferbilde eingetragenen Prozentzahlen Treffer zu bestimmen sind, ist nach dem

Bisherigen zwar klar, soll aber dennoch durch das folgende Beispiel erläutert werden.

Es sind die Prozentzahlen Treffer zu suchen, welche in jenen Streifen fallen, dessen Begrenzungslinien von der durch den mittleren Treffpunkt gehenden Geraden die Abstände $4 \times 0{\cdot}5\, a_{50} = 2\, a_{50} = s_{50}$ und $3 \times 0{\cdot}5\, a_{50} = 1{\cdot}5\, a_{50} = 0{\cdot}75\, s_{50}$ haben. Ein solcher Streifen liegt oberhalb und ein ebensolcher unterhalb dieser durch den mittleren Treffpunkt gehenden Geraden;

Fig. 12.



in jedem dieser zwei Streifen ist eine gleiche Prozentzahl Treffer zu erwarten. Die in beiden Streifen zu erwartende Prozentzahl Treffer ist gleich der Differenz:

Prozentzahl im Streifen $ABCD$, dessen Breite $2\, s_{50}$ beträgt, weniger Prozentzahl im Streifen $A'B'C'D'$, dessen Breite $1{\cdot}5\, s_{50}$ beträgt.

Für den Zielstreifen $ABCD$ ist sonach die relative Dimension $k = 2$ und für den Streifen $A'B'C'D'$ ist $k = 1{\cdot}5$. Nach der Tabelle III der Wahrscheinlichkeitsfaktoren findet man für

$k = 2$ als Wahrscheinlichkeitsfaktor 0·8227, entsprechend 82·27%,
$k = 1·5$ „ „ 0·6883, „ 68·83%.

Auf die beiden fraglichen Zielstreifen von der Breite $0·5\, a_{50}$ entfallen sonach $82·27 — 68·83 = 13·44\%$, in jedem dieser Zielstreifen sind also $\frac{13·44}{2} = 6·72\%$ Treffer zu erwarten.

Die Vertikalspalte III stellt das theoretische Trefferbild, basiert auf die 58-prozentige, und die letzte Vertikalspalte, nämlich die Spalte IV, stellt das theoretische Trefferbild, basiert auf die 68-prozentige Streuung dar; die Streifenbreite beträgt $0·5\, a_{58}$ beziehungsweise $0·5\, a_{68}$.

Bezüglich der Anlage der theoretischen Trefferbilder ist noch Folgendes zu bemerken: Zufolge der Ergebnisse der Punkte 7 und 10 des III. Abschnittes im I. Bande kann, wie schon wiederholt gesagt wurde, vom praktischen Standpunkte die größte zulässige theoretische Abweichung a_{100} gesetzt werden:

$$a_{100} = 4\, a_{50} = 4\, r = 3·5\, a_{58} = 3\, a_{68}$$

und da die 100-prozentige Streuung $s_{100} = 2\, a_{100}$ ist, so folgt, daß die größte praktische Ausdehnung des Trefferbildes, d. i. die größte Streuung

$$s_{100} = 4\, s_{50} = 3·5\, s_{58} = 3\, s_{68}$$

beträgt.

In II, III und IV der Fig. 11 wurde die Breite eines Parallelstreifens mit $\frac{1}{4}\, s_{\mathfrak{p}}$ ($\mathfrak{p} = 50, 58, 68$) angenommen, daher die drei Trefferbilder der Reihe nach 16, 14, 12 Parallelstreifen enthalten; man kann nach Gutdünken die Zahl der Parallelstreifen vermindern oder vermehren; so wurde beispielsweise das Trefferbild in I auch in 8 Parallelstreifen zerlegt dargestellt.

Das theoretische Trefferbild ist nur eine besondere Form der Darstellung der Tabellen der Wahrscheinlichkeitsfaktoren.

In der Fig. 12 ist noch einmal das theoretische Trefferbild dargestellt, basiert auf die 50-prozentige Streuung; dasselbe ist aber in den Teilen II und III, wie man sieht, noch besonders ausgestattet.

12. Lösung von Aufgaben mit dem theoretischen Trefferbilde.

Als Maßeinheit der Breite der Parallelstreifen wird die bezügliche halbe 50-prozentige Abweichung angenommen, ferner wird vorausgesetzt, daß in den einzelnen Streifen des theoretischen Trefferbildes die Treffer gleichmäßig verteilt sind. Diese Annahme hat

umso mehr Berechtigung, je relativ schmäler die Streifen des theoretischen Trefferbildes gewählt sind. Dies vorausgesetzt, kann man, bei Berücksichtigung der Figuren 11 und 12, mit hinreichender Genauigkeit nachstehende Aufgaben lösen.

A) Bestimmung der zu erwartenden Prozentzahl Treffer in symmetrischen Parallelstreifen. Ist beispielsweise der Parallelstreifen $1\frac{1}{2}$- beziehungsweise $1\frac{3}{4}$-mal so breit als die bezügliche 50-prozentige Streuung, so sind der Darstellung des theoretischen Trefferbildes zufolge 68% beziehungsweise $68 + 7 = 75\%$ Treffer im Maximum zu erwarten; 32% beziehungsweise 25% ist dann die Prozentzahl unvermeidlicher Fehlschüsse.

Allgemein gesagt: man hat sich, um die zu erwartende Prozentzahl Treffer zu finden, Streifen von der Breite $\frac{a_{50}}{2} = \frac{s_{50}}{4}$ zu konstruieren und sodann das Ziel entsprechend seiner Lage gegenüber dem mittleren Treffpunkte im gleichen Maßstabe in die Figur des theoretischen Trefferbildes einzuzeichnen.

B) Ermittlung der Prozentzahl Treffer in asymmetrischen Parallelstreifen. Legt man bei beliebiger Lage des mittleren Treffpunktes im Parallelstreifen denselben mit der durch den mittleren Treffpunkt gehenden, zu den Begrenzungslinien des Streifens parallelen Geraden über die Gerade RS des theoretischen Trefferbildes, so kann man durch Zusammenzählen, eventuell Abziehen unmittelbar die im Parallelstreifen zu erwartende Prozentzahl Treffer erfahren.

a) Liegt der mittlere Treffpunkt auf einer Begrenzungslinie des Parallelstreifens, so lege man diese Linie über RS. Ist die Breite des Zielstreifens z. B. $\frac{5}{8} s_{50}$, so entfallen auf $\frac{4}{8} s_{50} = \frac{1}{2} s_{50}$ offenbar 25%, auf das übrige $\frac{1}{8} s_{50}$ die Hälfte von 9%, also 4·5%, daher im ganzen 29·5%, rund 30%.

b) Befindet sich der mittlere Treffpunkt innerhalb des Parallelstreifens, doch nicht auf dessen Mittellinie, so zerlege man den Streifen durch eine zu den Begrenzungslinien desselben parallele und durch den mittleren Treffpunkt gehende Gerade in 2 Teile, wodurch die Aufgabe auf den Fall *a)* zurückgeführt ist. Die in den beiden Teilen zu erwartenden Prozentzahlen Treffer sind zu addieren.

c) Liegt der mittlere Treffpunkt außerhalb des Parallelstreifens, so verfährt man analog wie im Falle *b)*, indem der Parallelstreifen durch die durch den mittleren Treffpunkt gehende

Gerade als Unterschied zweier Streifen dargestellt wird, in deren Begrenzungslinie der mittlere Treffpunkt liegt.

C) Das Wievielfache der 50-prozentigen Streuung muß mindestens die Breite eines Parallelstreifens betragen, wenn er eine bestimmte Prozentzahl Schüsse aufnehmen soll [Umkehrung der Aufgabe *A)*]?

Sollen in den Parallelstreifen beispielsweise 58 Prozent Schüsse fallen, so muß dessen Breite größer als die einfache und kleiner als die $1\frac{1}{4}$-fache 50-prozentige Streuung sein. Durch eine einfache Proportion findet man, daß der Parallelstreifen mindestens 1·22-mal so breit sein muß als die 50-prozentige Streuung beträgt.

D) Der Teil III in der Fig. 12 hat große Wichtigkeit für das Einschießen, worüber später eingehend gesprochen werden wird. Wie die Darstellung zeigt, sind — von einer Begrenzungslinie des theoretischen Trefferbildes ausgehend — die in den aufeinander folgenden Parallelstreifen enthaltenen Prozentzahlen nach und nach zusammengezählt worden und ermöglicht die so gewonnene Zahlenreihe die Lösung der Aufgabe: Aus der Prozentzahl Schüsse, welche auf einer Seite der Einschießlinie liegen, den wahrscheinlichsten Abstand des mittleren Treffpunktes von dieser Einschießlinie zu bestimmen.

Liegen vor der erwähnten Geraden beispielsweise 25(75) Prozent der Schüsse, so muß dieselbe im theoretischen Trefferbilde durch $E_1 E_2 (E_1' E_2')$ gehen, und es befindet sich dann der mittlere Treffpunkt um das Maß $\frac{1}{2} s_{50}$ hinter (vor) dieser Geraden.

Eine andere Lösung dieser allgemeinen Aufgabe ist im Punkte 20 dieses Abschnittes enthalten.

Diese kurze Darlegung der Verwertung des theoretischen Trefferbildes wird genügen, um sich in allen in der Praxis vorkommenden Fällen zurecht zu finden; hiemit ist auch gezeigt, daß bei der gegebenen Ausstattung des theoretischen Trefferbildes die Tabellen der Wahrscheinlichkeitsfaktoren und die davon abgeleiteten Tabellen — namentlich, wenn man die Bedürfnisse der Praxis im Auge hat — gänzlich entbehrt werden können und daß bei steter Verwertung des theoretischen Trefferbildes der nicht zu unterschätzende schießpädagogische Vorteil erreicht ist, daß man stets gezwungen ist, sich Ziel und Streuungsfläche in ihrer geometrischen Beziehung vorzustellen, wodurch die Lösungen von Aufgaben ihres abstrakten Charakters ganz entkleidet werden.

13. Bestimmung der auf einer Seite einer Einschießlinie zu erwartenden Prozentzahl (Anzahl) Treffer bei beliebiger Lage des mittleren Treffpunktes.

Wahrscheinlichkeit eines Kurz- oder Weitschusses.

Diese Aufgabe ist für das Einschießen auf Grund der Unterscheidung von Kurz- und Weitschüssen von fundamentaler Bedeutung.

Es sei $E_1 E_2$ (Fig. 13 und Fig. 14) die gegebene Einschießlinie und M der mittlere Treffpunkt; durch diesen denke man sich die

Fig. 13.

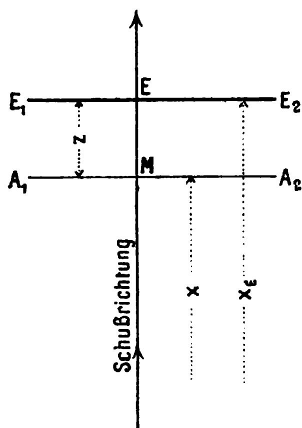
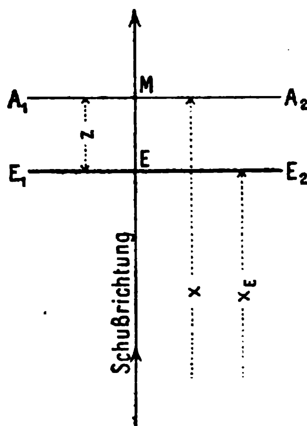


Fig. 14.



Gerade $A_1 A_2 \parallel E_1 E_2$ gelegt. Der Punkt M kann auf einer beliebigen Seite (entweder vor oder rückwärts) der Einschießlinie liegen oder auch in letztere fallen. Fällt M in $E_1 E_2$, so liegen die Treffer zu beiden Seiten der Einschießlinie gleichmäßig verteilt. Es wird sich also nur darum handeln:

a) die Prozentzahl (Anzahl) jener Treffer zu bestimmen, die auf derselben Seite von $E_1 E_2$ liegen, auf welcher sich der mittlere Treffpunkt befindet und

b) die Prozentzahl (Anzahl) jener Treffer zu suchen, die nicht auf derselben Seite von $E_1 E_2$ liegen, auf welcher sich der mittlere Treffpunkt befindet.

Den Ausgangspunkt der Lösung der Aufgabe bilden die bereits im Punkte 9 dieses Abschnittes abgeleiteten Formeln

$$1)\qquad P_1 = \frac{1}{2}\left\{\Phi\left(\varrho\frac{2\,z_1}{s_{50}}\right) + \Phi\left(\varrho\frac{2\,z_2}{s_{50}}\right)\right\},$$

$$2)\qquad P_2 = \frac{1}{2}\left\{\Phi\left(\varrho\frac{2\,z_2}{s_{50}}\right) - \Phi\left(\varrho\frac{2\,z_1}{s_{50}}\right)\right\},$$

indem man in dieselben $z_2 = \infty$ und z statt z_1 setzt, wobei z den Abstand des mittleren Treffpunktes von der zur Schußrichtung senkrechten Einschießlinie und s_{50} die 50-prozentige Längenstreuung bedeuten. Man erhält alsdann für die Wahrscheinlichkeit P_1, daß der nächste Treffer mit dem mittleren Treffpunkte auf derselben Seite der Einschießlinie liegt, wegen $\Phi(\infty) = 1$ (Wahrscheinlichkeit für das Treffen der unbegrenzten Fläche ist gleich der Einheit), aus 1):

$$P_1 = \frac{1}{2}\,\Phi\left(\varrho\frac{2\,z}{s_{50}}\right) + \frac{1}{2}\,\Phi(\infty) = \frac{1}{2}\,\Phi\left(\varrho\frac{2\,z}{s_{50}}\right) + \frac{1}{2},$$

oder

$$3)\qquad P_1 = \frac{1}{2}\left\{1 + \Phi\left(\varrho\frac{2\,z}{s_{50}}\right)\right\}.$$

Die Wahrscheinlichkeit P_2, daß der Treffer und der mittlere Treffpunkt auf verschiedenen Seiten der Einschießlinie liegen, beträgt zufolge der Formel 2):

$$4)\qquad P_2 = \frac{1}{2}\left\{1 - \Phi\left(\varrho\frac{2\,z}{s_{50}}\right)\right\}.$$

Wie man sieht, ist $P_1 + P_2 = 1$, wie zu erwarten war.

Wird auf die Prozentzahlen übergegangen, so hat man wieder, wenn der Treffpunkt und der mittlere Treffpunkt auf derselben Seite der Einschießlinie liegen,

$$\mathfrak{p}_1 = 100 \cdot \frac{1}{2}\left\{1 + \Phi\left(\varrho\frac{2\,z}{s_{50}}\right)\right\} = 50\left\{1 + \Phi\left(\varrho\frac{2\,z}{s_{50}}\right)\right\};$$

liegen hingegen der Treffpunkt und der mittlere Treffpunkt auf verschiedenen Seiten der Einschießlinie, so ist:

$$\mathfrak{p}_2 = 50\left\{1 - \Phi\left(\varrho\frac{2\,z}{s_{50}}\right)\right\}.$$

Diese Formeln ergeben sich leicht direkt, wenn man festhält, daß auf jeder Seite der Geraden $A_1 A_2$ stets 50 Prozent Treffer liegen und daß die im Parallelstreifen $E_1 E_2 A_1 A_2$ zu erwartende Prozentzahl Treffer nach Punkt 9 dieses Abschnittes ermittelt werden kann.

Aus der gefundenen Prozentzahl $\mathfrak{p}$ ergibt sich in bekannter Weise wieder die Anzahl n' der auf einer Seite der Einschießlinie $E_1 E_2$ zu erwartenden Treffer mittels der Gleichung

$$n' = n \cdot \frac{\mathfrak{p}}{100},$$

wenn n Schüsse abgegeben wurden.

Die Formeln 3) und 4) lassen sich zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Kurzschusses beziehungsweise zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Weitschusses verwenden.

Es ist nach dem Vorstehenden, wenn der mittlere Treffpunkt vor der Einschießlinie (kurz) liegt,

$$5)\qquad P_k = \frac{1}{2}\left\{1 + \Phi\left(\varrho \frac{2z}{s_{50}}\right)\right\}$$

die Wahrscheinlichkeit eines Kurzschusses, hingegen

$$6)\qquad P_w = \frac{1}{2}\left\{1 - \Phi\left(\varrho \frac{2z}{s_{50}}\right)\right\}$$

die Wahrscheinlichkeit eines Weitschusses.

Nimmt man als Maßeinheit nicht die 50-prozentige Längenstreuung s_{50}, sondern die 50-prozentige oder wahrscheinliche Längenabweichung r an, wird ferner $\frac{2z}{s_{50}} = \frac{2z}{2r} = \frac{z}{r} = \zeta$ gesetzt und, da ein Irrtum nicht eintreten kann, der Faktor ϱ nicht eigens geschrieben, so erscheinen die Gleichungen 5) und 6) in der Form:

$$7)\qquad P_k = \frac{1}{2}\left\{1 + \Phi(\zeta)\right\}$$

$$8)\qquad P_w = \frac{1}{2}\left\{1 - \Phi(\zeta)\right\}.$$

Liegt der mittlere Treffpunkt weit, so findet man für die Wahrscheinlichkeit eines Kurzschusses

$$9)\qquad P_k' = \frac{1}{2}\left\{1 - \Phi(\zeta)\right\}$$

und für die Wahrscheinlichkeit eines Weitschusses

$$10)\qquad P_w' = \frac{1}{2}\left\{1 + \Phi(\zeta)\right\}.$$

Die Gleichungen 7) und 9) sowie jene 8) und 10) lassen sich in je eine Formel zusammenfassen, wenn die Schußrichtung als positive Abszissenrichtung festgesetzt und demgemäß auch z und ζ vom mittleren Treffpunkte M als Koordinatenursprung gezählt werden. Man erhält dann als Wahrscheinlichkeit für einen Kurzschuß:

$$11)\qquad P_k = \frac{1}{2}\left\{1 + \Phi(\zeta)\right\}$$

und als Wahrscheinlichkeit für einen Weitschuß:

12) $$P_w = \frac{1}{2}\left\{1 - \Phi(\zeta)\right\},$$

worin ζ jedesmal mit seinem Vorzeichen einzuführen ist. Bekanntlich besitzt die Funktion $\Phi(\zeta)$ die Eigenschaft

$$\Phi(-\zeta) = -\Phi(\zeta),$$

d. h. sie ist eine ungerade Funktion. Hierauf weist die Entwicklung 3) auf Seite 46 im I. Bande hin.

Mit Hilfe der Tabelle II oder III wurden die Werte der Funktion

13) $$P_\zeta = \frac{1}{2}\left\{1 + \Phi(\zeta)\right\}$$

für positive und negative Werte des Argumentes ζ berechnet, und zwar innerhalb der Grenzen

$$-5 \leq -\zeta < 0 < \zeta \leq 5.$$

Die erhaltenen Resultate sind in der Tabelle VI niedergelegt. Für Werte $-\infty < -\zeta < -5$ unterscheidet sich $P_{-\zeta} = \frac{1}{2}\left\{1 + \Phi(-\zeta)\right\}$ praktisch nicht mehr von Null; für $5 < \zeta < \infty$ ist $P_\zeta = \frac{1}{2}\left\{1 + \Phi(\zeta)\right\}$ nicht mehr praktisch vom Werte 1 zu unterscheiden.

Um beispielsweise den Funktionswert P_ζ für $\zeta = \pm 0{\cdot}9$ zu finden, hat man aus der Tabelle III den Funktionswert $\Phi(\zeta)$ für 0·9 zu entnehmen; dieser lautet 0·4562. Es ist also:

$$P_\zeta = \frac{1}{2}(1 + 0{\cdot}4562) = 0{\cdot}7281$$

und

$$P_{-\zeta} = \frac{1}{2}(1 - 0{\cdot}4562) = \frac{0{\cdot}5438}{2} = 0{\cdot}2719.$$

Für die Richtigkeit der Rechnung hat man als Kontrollgleichung $P_\zeta + P_{-\zeta} = 1$. Ist sonach P_ζ bekannt, so ergibt sich $P_{-\zeta}$ aus $P_{-\zeta} = 1 - P_\zeta$.

Die Gleichungen 11) und 12) sollen nun in einem rechtwinkeligen Koordinatensysteme graphisch dargestellt werden. Der mittlere Treffpunkt M sei der Koordinatenursprung und die positive Richtung der Abszissenachse übereinfallend mit der Schußrichtung. Die Argumentenwerte $\frac{z}{r} = \zeta$ werden als Abszissen, in den Endpunkten derselben die zugehörigen Werte P_k beziehungsweise P_w als Ordinaten aufgetragen. Durch Verbindung der so erhaltenen Punkte ergeben

sich die in den Fig. 15 und 16 dargestellten Kurven, und zwar entspricht die Fig. 15 der Gleichung 11) und die Fig. 16 der Gleichung 12). Beide Kurven verlaufen asymptotisch zur Abszissenachse und zu der im Abstande $+1$ zu dieser Achse parallel laufenden Geraden. Die Kurven nähern sich ihren Asymptoten außerordentlich rasch; man kann annehmen, daß jede dieser Kurven ihre Asymptoten bereits im Abstande $\pm 4r$ vom mittleren Treffpunkte erreicht. Jede dieser Kurven besteht aus zwei kongruenten Zweigen und ist zentrischsymmetrisch in Bezug auf den Schnittpunkt mit der Ordinatenachse.

Fig. 15.

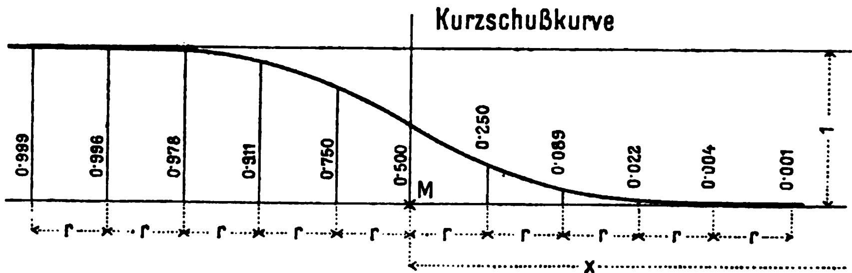
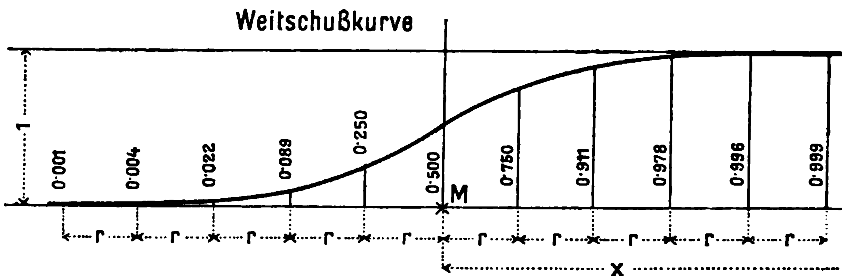


Fig. 16.



Die Ordinaten jener Kurve, welche durch die Gleichung 11) gegeben ist, stellen die Wahrscheinlichkeiten dar, mit welchen beim Schießen mit der jeweiligen Tagesdistanz x oder mit der jeweiligen Aufsatzdistanz x Kurzschüsse zu erwarten sind, vorausgesetzt, daß die Einschießlinie jedesmal die zugehörige Lage besitzt.*) Aus diesem Grunde soll diese Kurve als **Kurzschußkurve** bezeichnet werden.

Die Kurve, deren Gleichung 12) ist, heißt aus analogen Gründen **Weitschußkurve**.

---

*) Die Erklärung der Begriffe **Tageselemente** und **Tagesrelation** sind im Punkte 25 dieses Abschnittes enthalten.

Der Wichtigkeit der Aufgabe wegen soll auch die direkte Lösung derselben gezeigt werden. Zunächst sei erinnert, daß der Abstand des mittleren Treffpunktes von der Einschießlinie positiv (negativ) ist, wenn sich die letztere in größerer (kleinerer) Entfernung vom schießenden Geschütze befindet als der mittlere Treffpunkt (Fig. 13 und Fig. 14). Die Tagesdistanz oder die Aufsatzdistanz der Einschießlinie oder des Zieles sei x_E; M sei der mittlere Treffpunkt, welcher beim Schießen mit der zur Entfernung x gehörigen Elevation erhalten wird.

Je nachdem der Abstand z des mittleren Treffpunktes M von der Einschießlinie $E_1 E_2$ positiv oder negativ ist, hat man für die folgende Untersuchung 2 Fälle zu unterscheiden:

a) $x_E - x = +z$, d. h. die Einschießlinie liegt in größerer Entfernung vom schießenden Geschütz als der mittlere Treffpunkt (Fig. 13) und

b) $x_E - x = -z$, d. h. die Einschießlinie liegt in kleinerer Entfernung vom schießenden Geschütz als der mittlere Treffpunkt (Fig. 14).

Im Falle *a)* sind alle Schüsse, welche eine Abweichung vom mittleren Treffpunkte in den Grenzen $-\infty$ bis z aufweisen, Kurzschüsse. Die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung zwischen den Grenzen z und $z + dz$ lautet bekanntlich:

$$14) \qquad \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 z^2} dz.$$

Meistens ist jedoch nicht das Präzisionsmaß h, sondern die 50-prozentige oder wahrscheinliche Abweichung r beziehungsweise die 50-prozentige Streuung s_{50} bekannt. Es wäre umständlich, wollte man in diesem Falle die Wahrscheinlichkeit, daß eine Abweichung beispielsweise innerhalb der Grenzen $-z$ und z liegt, nach der Tabelle I berechnen. Zur bequemeren Rechnung benützt man in diesem Falle die Tabellen II oder III, in welchen als Argument das Verhältnis $\frac{z}{r}$ gewählt ist. Dieses wurde der Kürze wegen mit ζ bezeichnet (siehe Seite 260), so daß $\zeta = \frac{z}{r}$ ist.

Zwischen dem Präzisionsmaß h und der wahrscheinlichen Abweichung r besteht bekanntlich die Beziehung

$$h r = \varrho, \qquad \varrho = 0{\cdot}47694.$$

Ersetzt man demgemäß im Ausdrucke 14) h durch $\frac{\varrho}{r}$, so entsteht:

$$\frac{\varrho}{r\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 z^2} dz = \frac{\varrho}{\sqrt{\pi}} e^{-\varrho^2 \left(\frac{z}{r}\right)^2} d\left(\frac{z}{r}\right),$$

oder wenn ζ als unabhängige Veränderliche eingeführt wird,

15) $$\frac{\varrho}{\sqrt{\pi}} e^{-\varrho^2 \zeta^2} d\zeta.$$

Mißt man also die Abweichung z in wahrscheinlicher Abweichung, so bedeutet der letzte Ausdruck die Wahrscheinlichkeit, daß die Abweichung zwischen den Grenzen ζ und $\zeta + d\zeta$ eingeschlossen liegt.

Die Wahrscheinlichkeit P_k eines Kurzschusses ergibt sich aus 15) durch Integration innerhalb der Grenzen $-\infty$ bis $+\zeta$, so daß

$$P_k = \frac{\varrho}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{\zeta} e^{-\varrho^2 \zeta^2} d\zeta = \frac{\varrho}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\varrho^2 \zeta^2} d\zeta + \frac{\varrho}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\zeta} e^{-\varrho^2 \zeta^2} d\zeta,$$

oder weil

$$\frac{\varrho}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\varrho^2 \zeta^2} d\zeta = \frac{1}{2} \text{ (Integral von Laplace)}$$

und

$$\frac{\varrho}{\sqrt{\pi}} \int_{-\zeta}^{\zeta} e^{-\varrho^2 \zeta^2} d\zeta = \frac{2\varrho}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\zeta} e^{-\varrho^2 \zeta^2} d\zeta = \Phi(\zeta)$$

ist,

16) $$P_k = \frac{1}{2} \left\{1 + \Phi(\zeta)\right\},$$

worin, wie bereits gesagt, ζ die Verhältniszahl $\frac{z}{r}$ bedeutet, ferner r. und $z = ME$ in gleichen Längeneinheiten, gewöhnlich in Metern, ausgedrückt sind.

Die Wahrscheinlichkeit P_w, einen Weitschuß zu erhalten, ergibt sich alsdann aus $P_w = 1 - P_k$ mit

17) $$P_w = \frac{1}{2} \left\{1 - \Phi(\zeta)\right\}$$

oder auch aus

18) $$P_w = \frac{\varrho}{\sqrt{\pi}} \int_{\zeta}^{\infty} e^{-\varrho^2 \zeta^2} d\zeta.$$

Man sieht, daß die Gleichungen 16) und 17) mit den Gleichungen 7) und 8) übereinstimmen.

Im Falle *b)*, wo die Einschießlinie in geringerer Entfernung vom schießenden Geschütze liegt als der mittlere Treffpunkt, wird ein Kurzschuß dann erhalten, wenn der Abstand des betrachteten Treffpunktes vom mittleren Treffpunkte in den Grenzen $-\infty$ und $-\zeta$ liegt. Die Wahrscheinlichkeit hiefür ist

$$P_k' = \frac{\varrho}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\zeta} e^{-\varrho^2 \zeta^2} d\zeta = \frac{\varrho}{\sqrt{\pi}} \int_{\zeta}^{\infty} e^{-\varrho^2 \zeta^2} d\zeta =$$

$$= \frac{\varrho}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\varrho^2 \zeta^2} d\zeta - \frac{\varrho}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\zeta} e^{-\varrho^2 \zeta^2} d\zeta = \frac{1}{2}\left\{1 - \Phi(\zeta)\right\},^{*)}$$

19) $$P_k' = \frac{1}{2}\left\{1 - \Phi(\zeta)\right\}.$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Weitschusses ist in diesem Falle

20) $$P_w' = 1 - P_k' = \frac{1}{2}\left\{1 + \Phi(\zeta)\right\};$$

dieselbe ergibt sich auch aus

$$P_w' = \frac{\varrho}{\sqrt{\pi}} \int_{-\zeta}^{\infty} e^{-\varrho^2 \zeta^2} d\zeta = \frac{\varrho}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\zeta} e^{-\varrho^2 \zeta^2} d\zeta = \frac{1}{2}\left\{1 + \Phi(\zeta)\right\}.^{*)}$$

Die Übereinstimmung der Gleichungen 19) und 20) mit jenen 9) und 10) liegt also auch vor.

Aus dem Vorstehenden ist gleichzeitig zu ersehen, daß die Kurven, deren Gleichungen 11) und 12) sind, Integralkurven der Wahrscheinlichkeitskurve $\eta = \frac{\varrho}{\sqrt{\pi}} e^{-\varrho^2 \zeta^2}$ sind.

Nachstehend soll gezeigt werden, wie die gefundenen Resultate noch weiter vereinfacht werden können.

Zu diesem Zwecke führe man die Funktion $F(\zeta)$ ein, welche durch die Formel

21) $$F(\zeta) = \frac{\varrho}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\zeta} e^{-\varrho^2 \zeta^2} d\zeta = \frac{1}{2}\left\{1 + \Phi(\zeta)\right\}$$

definiert werden soll. Es ist dann

22) $$F(-\zeta) = \frac{\varrho}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\zeta} e^{-\varrho^2 \zeta^2} d\zeta = \frac{\varrho}{\sqrt{\pi}} \int_{\zeta}^{\infty} e^{-\varrho^2 \zeta^2} d\zeta = \frac{1}{2}\left\{1 - \Phi(\zeta)\right\}.$$

---

*) Hiebei wird von der Transformation eines bestimmten Integrals, welche in der Zeichenänderung der Intergrationsvariablen besteht, Gebrauch gemacht. Macht man in $\int_a^b f(x)\,dx$ die Substitution $x = -t$, so folgt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-t)\,dt = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx.$$

Versteht man unter t eine Veränderliche, welche sowohl positive als auch negative Werte annehmen kann, dann sind die Formeln 21) und 22) durch

23) $$F(t) = \frac{\varrho}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\varrho^2 \zeta^2} d\zeta$$

darstellbar.

Die weitere Untersuchung zerfällt in zwei Fälle:

a) in die Formel 23) wird $t = \frac{x_E - x}{r}$ gesetzt; das Substitutionsresultat $F\left(\frac{x_E - x}{r}\right)$ ist, je nachdem $x_E \gtrless x$, wie gezeigt werden soll, mit den Wahrscheinlichkeiten P_k und P_k' gleichbedeutend;

b) in die Formel 23) wird $t = \frac{x - x_E}{r}$ substituiert; das Resultat $F\left(\frac{x - x_E}{r}\right)$ gibt, je nachdem $x \lesseqgtr x_E$, mit den Wahrscheinlichkeiten P_w und P_w' übereinstimmende Werte.

Zu Fall *a)*: $t = \frac{x_E - x}{r}$. Ist $x_E > x$, so liegt der mittlere Treffpunkt vor der Einschießlinie; das Substitutionsresultat $F\left(\frac{x_E - x}{r}\right)$ entspricht dem Ausdrucke $F(\zeta)$, übereinstimmend mit P_k, d. i. mit der Wahrscheinlichkeit eines Kurzschusses, wenn der mittlere Treffpunkt vor der Einschießlinie liegt.

Ist hingegen $x_E < x$, so liegt der mittlere Treffpunkt hinter der Einschießlinie, das Resultat $F\left(\frac{x_E - x}{r}\right)$ entspricht dem Ausdrucke $F(-\zeta)$, übereinstimmend mit P_k', d. i. mit der Wahrscheinlichkeit eines Kurzschusses, wenn der mittlere Treffpunkt hinter der Einschießlinie liegt.

Man kann somit in allen Fällen die Wahrscheinlichkeit eines Kurzschusses durch $F\left(\frac{x_E - x}{r}\right) = F(\xi_E - \xi)$ darstellen, sobald man unter ξ_E die Entfernung der Einschießlinie und unter ξ die Entfernung, auf welche geschossen wird, beide Entfernungen in wahrscheinlichen Abweichungen ausgedrückt, versteht.

Zu Fall *b)*: $t = \frac{x - x_E}{r}$. Ist $x < x_E$, so liegt der mittlere Treffpunkt vor der Einschießlinie, das Substitutionsresultat $F\left(\frac{x - x_E}{r}\right)$ entspricht dem Ausdrucke $F(-\zeta)$, übereinstimmend mit P_w, d. i. mit der Wahrscheinlichkeit eines Weitschusses, wenn der mittlere Treffpunkt vor der Einschießlinie liegt.

Ist hingegen $x > x_E$, so liegt der mittlere Treffpunkt hinter der Einschießlinie, das Resultat $F\left(\frac{x - x_E}{r}\right)$ entspricht dem Ausdrucke $F(\zeta)$, übereinstimmend mit P_w', d. i. mit der Wahrscheinlichkeit eines Weitschusses, wenn der mittlere Treffpunkt hinter der Einschießlinie liegt.

Die Funktion $F\left(\frac{x - x_E}{r}\right) = F(\xi - \xi_E)$ stellt somit in allen Fällen die Wahrscheinlichkeit eines Weitschusses dar.

Aus 21) und 22) folgt, daß

$$F(\zeta) + F(-\zeta) = 1$$

ist; es muß mithin stets auch

$$F(\xi_E - \xi) + F(\xi - \xi_E) = 1$$

beziehungsweise

$$F(\xi_E - \xi) = 1 - F(\xi - \xi_E)$$

sein, wie zu erwarten war.

Beispiele.

1. Beispiel. Die Entfernung, auf welcher geschossen wird, sei $x = 3200\,m$; hiebei betrage die 50-prozentige oder wahrscheinliche Abweichung $r = 16\,m$. Es soll die Wahrscheinlichkeit eines Kurzschusses ermittelt werden, wenn das Ziel (die Einschießlinie) sich *a)* auf $x_E' = 3240\,m$ und *b)* auf $x_E'' = 3160\,m$ befindet?

Für den Fall *a)* hat man $\frac{x_E' - x}{r} = \xi_E' - \xi = \frac{3240 - 3200}{16} = \frac{40}{16} = 2{\cdot}5$. Nach der Tabelle VI ergibt sich also für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P_k = F(\xi_E' - \xi) = F(2{\cdot}5) = 0{\cdot}954.$$

Im Falle *b)* ist $\frac{x_E'' - x}{r} = \xi_E'' - \xi = \frac{3160 - 3200}{16} = -\frac{40}{16} = -2{\cdot}5$; für diesen Wert findet man aus der genannten Tabelle

$$P_k' = F(\xi_E'' - \xi) = F(-2{\cdot}5) = 0{\cdot}046.$$

2. Beispiel. Für die Angaben $x = 4000\,m$, $x_E = 4040\,m$ und $r = 20\,m$ ist die Wahrscheinlichkeit eines Weitschusses zu suchen.

Es ist $\frac{x - x_E}{r} = \frac{4000 - 4040}{20} = -\frac{40}{20} = -2$, daher beträgt nach der Tabelle VI die Wahrscheinlichkeit eines Weitschusses

$$P_w = F(-2) = 0{\cdot}089.$$

14. Vergleich der Schießergebnisse mit der Theorie.

Nachstehende zwei Beispiele*) sollen zeigen, inwieweit die Versuchsergebnisse mit den theoretischen Ableitungen übereinstimmen (siehe den VII. Abschnitt im I. Bande).

Um die Berechtigung der Anwendung des Fehlergesetzes auf die Schießresultate nachweisen zu können, ist es notwendig, daß die betreffenden Versuche mit großer Sorgfalt angestellt werden und daß man zuvor alle Ursachen systematischer Fehler beseitigt.

1. Beispiel. Dieses betrifft einen Schießversuch, welcher auf dem Kruppschen Schießplatz in Meppen im Dezember 1880 mit einer schweren 12 *cm* Belagerungskanone ausgeführt wurde. Es wurden 100 Schuß mit 5^0 Elevation und mit der Anfangsgeschwindigkeit 511·2 $m\,sec^{-1}$ abgegeben. Geschoßgewicht: 16·4 *kg*; Pulverladung: 4·5 *kg* prismatisches Schwarzpulver mit 7 Kanälen; Dichte des Pulvers: 1·64. Das Schießen wurde in zwei Serien zu je 50 Schuß an zwei aufeinanderfolgenden Tagen (17. und 18. Dezember) vorgenommen. Wind mäßig, seitlich, von konstanter Stärke an beiden Tagen (1·3 $m\,sec^{-1}$); der Treffpunkt (Aufschlag) eines jeden Schusses wurde im Terrain bezeichnet. Die mittlere Schußweite, also die Entfernung des mittleren Treffpunktes der Schußserie betrug $x = 2895{\cdot}46\,m$.

Die in Metern ausgedrückten Längenabweichungen vom mittleren Treffpunkte der Schußserie sind in nachfolgender Tabelle enthalten, wozu noch bemerkt wird, daß die Schüsse nicht in der Reihenfolge der Schußnummern geordnet sind.

+ 38·5	+ 7·5	+ 16·5	− 6·5	− 24·5	− 25·5	− 11·5	− 7·5	+ 4·5	+ 16·5
+ 38·5	+ 7·5	+ 3·5	− 7·5	− 27·5	− 19·5	− 11·5	− 5·5	+ 4·5	+ 16·5
+ 30·5	+ 8·5	+ 2·5	− 7·5	− 26·5	− 17·5	− 10·5	− 5·5	+ 7·5	+ 17·5
+ 25·5	+ 8·5	+ 3·5	− 11·5	− 28·5	− 20·5	− 9·5	− 3·5	+ 9·5	+ 19·5
+ 24·5	+ 9·5	+ 0·5	− 16·5	− 28·5	− 17·5	− 10·5	− 4·5	+ 10·5	+ 18·5
+ 25·5	+ 10·5	− 5·5	− 16·5	− 29·5	− 15·5	− 9·5	− 0·5	+ 10·5	+ 19·5
+ 23·5	+ 10·5	− 4·5	− 21·5	− 21·5	− 15·5	− 9·5	+ 2·5	+ 11·5	+ 29·5
+ 4·5	+ 13·5	− 3·5	− 20·5	− 8·5	− 14·5	− 8·5	+ 3·5	+ 14·5	+ 32·5
+ 4·5	+ 13·5	− 4·5	− 21·5	− 9·5	− 13·5	− 7·5	+ 3·5	+ 15·5	+ 32·5
+ 5·5	+ 14·5	− 6·5	− 24·5	− 30·5	− 13·5	− 7·5	+ 4·5	+ 14·5	+ 34·5

*) Das 1. Beispiel ist entnommen dem von Ritter v. Eberhard ins Deutsche übersetzten Werke von N. Sabudski (Seite 247), das 2. Beispiel dem in russischer Sprache im Jahre 1881 erschienenen Werke von Majewski „Darstellung der Methode der kleinsten Quadrate" (Seite 117).

Aus der vorstehenden Tabelle geht hervor, daß 49 Abweichungen positiv, 51 negativ waren; es ist mithin die Anzahl der positiven und negativen Fehler nahezu gleich.

Werden die Abweichungen vom mittleren Treffpunkte der Schußserie ohne Rücksicht auf das Vorzeichen nach ihrer Größe geordnet, so findet man die folgende Verteilung:

zwischen	0 *m*	und	5·5 *m*	liegen	22	Abweichungen,
„	5·5 *m*	„	10 *m*	„	20	„
„	10 *m*	„	15 *m*	„	18	„
„	15 *m*	„	20 *m*	„	15	„
„	20 *m*	„	25 *m*	„	9	„
„	25 *m*	„	30 *m*	„	9	„
„	30 *m*	„	35 *m*	„	5	„

weiter als 35 *m* vom mittleren Treffpunkte liegen nur 2 Abweichungen.

Als obere Grenze des ersten Intervalls wurden deshalb 5·5 *m* statt 5 *m* gewählt, weil 4 Abweichungen von der Größe 5·5 *m*, genauer 5·46 *m*, erhalten worden sind.

Die mittlere Längenabweichung eines einzelnen Schusses ergibt sich aus

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{28\,461}{99}} = \pm 16{\cdot}96\, m.$$

Hieraus folgt für die wahrscheinliche Abweichung der einzelnen Beobachtung

$$r = \pm 0{\cdot}6745\, \mu = \pm 11{\cdot}44\, m.$$

Von den in der Tabelle angeführten Abweichungen sind, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, 48 kleiner und 52 größer als 11·44 *m*; es ist also nahezu die Hälfte aller Abweichungen kleiner als die aus der mittleren Abweichung berechnete wahrscheinliche Abweichung.

Unter der Voraussetzung, daß das Gaußsche Fehlergesetz auf den vorliegenden Schießversuch anwendbar ist, soll nun berechnet werden, wieviele von den 100 Abweichungen in den Grenzen — 5·5 *m* und + 5·5 *m*, —10 *m* und + 10 *m*, — 15 *m* und + 15 *m* u. s. w., — 35 *m* und + 35 *m*, —40 *m* und + 40 *m* wahrscheinlich eingeschlossen sind. Hiezu bilde man zuerst die Quotienten $k = \frac{a}{r}$, indem der Reihe nach 5·5, 10, 15, ..., 35, 40 durch 11·44 dividiert wird. Für die erhaltenen Werte k findet man in der Tabelle II oder III die entsprechenden Werte $P = \Phi(\varrho k)$, welche die Wahrscheinlichkeiten darstellen, daß die Abweichung eines einzelnen Schusses zwischen den Grenzen — a und a liegt. Werden diese Wahrscheinlichkeiten mit der abgegebenen

Schußzahl multipliziert, im vorliegenden Falle also mit 100, so ergibt sich die zu erwartende Anzahl der Abweichungen.

In nachfolgender Tabelle sind die für $100\,\Phi(\varrho k)$ gefundenen Werte, sowie die Anzahlen der Schüsse, welche tatsächlich in den betreffenden Grenzen liegen, nebeneinander gestellt. Auf diese Art ergab sich die Anzahl der Abweichungen

zwischen	berechnet aus $100\,P = 100\,\Phi(\varrho k)$	beobachtete Schußzahl beim Versuche
— 5·5 *m* und 5·5 *m*	25·4	22
— 10 *m* „ 10 *m*	44·5	42
— 15 *m* „ 15 *m*	62·0	60
— 20 *m* „ 20 *m*	76·0	75
— 25 *m* „ 25 *m*	86·0	84
— 30 *m* „ 30 *m*	92·3	93
— 35 *m* „ 35 *m*	96·1	98
— 40 *m* „ 40 *m*	98·2	100

Die erhaltenen Zahlen zeigen deutlich die für die Praxis hinreichende Übereinstimmung zwischen den nach der Theorie berechneten Werten und den Versuchsergebnissen; mit anderen Worten, sie beweisen die Zulässigkeit der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Untersuchung der Schießresultate.

2. Beispiel. Bei dem im Jahre 1864 zu Metz durchgeführten Versuche behufs Ermittlung der Lage der Geschoßflugbahn wurden aus einer 16-pfündigen glatten Belagerungskanone 100 Schüsse (Rundgeschosse) mit der Pulverladung 1·333 *kg* und mit konstantem Elevationswinkel abgegeben. Die Flughöhen des Geschosses wurden für jeden Schuß auf vertikalen Netzen bezeichnet, welche in verschiedenen Entfernungen vom Geschütze aufgestellt waren. In der nachstehenden Tabelle sind die beobachteten Flughöhen $y_1, y_2, \ldots, y_{100}$ über dem Mündungshorizonte in Metern für die Entfernung (Abszisse) 200 *m* von der Mündung zusammengestellt.

$y_1 = 3·91$	$y_{11} = 3·59$	$y_{21} = 3·89$	$y_{31} = 4·44$	$y_{41} = 3·44$
$y_2 = 3·41$	$y_{12} = 4·06$	$y_{22} = 4·29$	$y_{32} = 3·86$	$y_{42} = 3·82$
$y_3 = 2·76$	$y_{13} = 4·61$	$y_{23} = 4·09$	$y_{33} = 3·35$	$y_{43} = 3·60$
$y_4 = 2·81$	$y_{14} = 3·36$	$y_{24} = 4·32$	$y_{34} = 4·82$	$y_{44} = 4·15$
$y_5 = 3·51$	$y_{15} = 4·18$	$y_{25} = 4·19$	$y_{35} = 3·85$	$y_{45} = 3·95$
$y_6 = 4·21$	$y_{16} = 3·36$	$y_{26} = 2·79$	$y_{36} = 3·67$	$y_{46} = 4·42$
$y_7 = 3·41$	$y_{17} = 3·96$	$y_{27} = 4·12$	$y_{37} = 3·60$	$y_{47} = 3·87$
$y_8 = 4·36$	$y_{18} = 3·86$	$y_{28} = 4·25$	$y_{38} = 4·20$	$y_{48} = 3·45$
$y_9 = 4·21$	$y_{19} = 3·91$	$y_{29} = 3·79$	$y_{39} = 4·10$	$y_{49} = 3·70$
$y_{10} = 4·43$	$y_{20} = 3·66$	$y_{30} = 3·70$	$y_{40} = 4·05$	$y_{50} = 3·85$

$y_{51} = 4·59$	$y_{61} = 3·37$	$y_{71} = 3·89$	$y_{81} = 3·87$	$y_{91} = 3·47$
$y_{52} = 4·39$	$y_{62} = 3·50$	$y_{72} = 3·69$	$y_{82} = 3·74$	$y_{92} = 4·14$
$y_{53} = 3·79$	$y_{63} = 4·22$	$y_{73} = 4·17$	$y_{83} = 4·59$	$y_{93} = 3·79$
$y_{54} = 3·44$	$y_{64} = 3·87$	$y_{74} = 4·49$	$y_{84} = 4·24$	$y_{94} = 3·94$
$y_{55} = 4·09$	$y_{65} = 4·20$	$y_{75} = 4·19$	$y_{85} = 3·52$	$y_{95} = 3·82$
$y_{56} = 4·14$	$y_{66} = 3·59$	$y_{76} = 3·64$	$y_{86} = 3·94$	$y_{96} = 3·59$
$y_{57} = 4·19$	$y_{67} = 4·44$	$y_{77} = 4·17$	$y_{87} = 3·54$	$y_{97} = 3·42$
$y_{58} = 3·74$	$y_{68} = 4·29$	$y_{78} = 3·89$	$y_{88} = 4·69$	$y_{98} = 4·27$
$y_{59} = 4·49$	$y_{69} = 3·57$	$y_{79} = 3·89$	$y_{89} = 3·94$	$y_{99} = 3·62$
$y_{60} = 3·34$	$y_{70} = 3·69$	$y_{80} = 4·14$	$y_{90} = 4·09$	$y_{100} = 4·52.$

Die aus allen 100 Schüssen abgeleitete durchschnittliche, also die wahrscheinlichste Flughöhe y beträgt

$$y = \frac{[y]}{100} = 3·917\ m.$$

Die Abweichungen der einzelnen Flughöhen y_i von der aus 100 Schüssen abgeleiteten wahrscheinlichsten Flughöhe y, nämlich die Differenzen $-y_i + y$, $i = 1, 2, 3, \ldots, 100$, in Metern ausgedrückt, sind in der folgenden Tabelle angegeben.

$-y_1 + y = 0·007$	$-y_{21} + y = 0·027$	$-y_{41} + y = 0·477$
$-y_2 + y = 0·507$	$-y_{22} + y = -0·373$	$-y_{42} + y = 0·097$
$-y_3 + y = 1·157$	$-y_{23} + y = -0·173$	$-y_{43} + y = 0·317$
$-y_4 + y = 1·107$	$-y_{24} + y = -0·403$	$-y_{44} + y = -0·233$
$-y_5 + y = 0·407$	$-y_{25} + y = -0·273$	$-y_{45} + y = -0·033$
$-y_6 + y = -0·293$	$-y_{26} + y = 1·127$	$-y_{46} + y = -0·503$
$-y_7 + y = 0·507$	$-y_{27} + y = -0·203$	$-y_{47} + y = 0·047$
$-y_8 + y = -0·443$	$-y_{28} + y = -0·333$	$-y_{48} + y = 0·467$
$-y_9 + y = -0·293$	$-y_{29} + y = 0·127$	$-y_{49} + y = 0·217$
$-y_{10} + y = -0·513$	$-y_{30} + y = 0·217$	$-y_{50} + y = 0·067$
$-y_{11} + y = 0·327$	$-y_{31} + y = -0·523$	$-y_{51} + y = -0·673$
$-y_{12} + y = -0·143$	$-y_{32} + y = 0·057$	$-y_{52} + y = -0·473$
$-y_{13} + y = -0·693$	$-y_{33} + y = 0·567$	$-y_{53} + y = 0·127$
$-y_{14} + y = 0·557$	$-y_{34} + y = -0·903$	$-y_{54} + y = 0·477$
$-y_{15} + y = -0·263$	$-y_{35} + y = 0·067$	$-y_{55} + y = -0·173$
$-y_{16} + y = 0·557$	$-y_{36} + y = 0·247$	$-y_{56} + y = -0·223$
$-y_{17} + y = -0·043$	$-y_{37} + y = 0·317$	$-y_{57} + y = -0·273$
$-y_{18} + y = 0·057$	$-y_{38} + y = -0·283$	$-y_{58} + y = 0·177$
$-y_{19} + y = 0·007$	$-y_{39} + y = -0·183$	$-y_{59} + y = -0·573$
$-y_{20} + y = 0·257$	$-y_{40} + y = -0·133$	$-y_{60} + y = 0·577$

$-y_{61}+y=0.547$	$-y_{76}+y=0.277$	$-y_{91}+y=0.447$
$-y_{62}+y=0.417$	$-y_{77}+y=-0.253$	$-y_{92}+y=-0.223$
$-y_{63}+y=-0.303$	$-y_{78}+y=0.027$	$-y_{93}+y=0.127$
$-y_{64}+y=0.047$	$-y_{79}+y=0.027$	$-y_{94}+y=-0.023$
$-y_{65}+y=-0.283$	$-y_{80}+y=-0.223$	$-y_{95}+y=0.097$
$-y_{66}+y=0.327$	$-y_{81}+y=0.047$	$-y_{96}+y=0.327$
$-y_{67}+y=-0.523$	$-y_{82}+y=0.177$	$-y_{97}+y=0.497$
$-y_{68}+y=-0.373$	$-y_{83}+y=-0.673$	$-y_{98}+y=-0.353$
$-y_{69}+y=0.347$	$-y_{84}+y=-0.323$	$-y_{99}+y=0.297$
$-y_{70}+y=0.227$	$-y_{85}+y=0.397$	$-y_{100}+y=-0.603.$
$-y_{71}+y=0.027$	$-y_{86}+y=-0.023$	
$-y_{72}+y=0.227$	$-y_{87}+y=0.377$	
$-y_{73}+y=-0.253$	$-y_{88}+y=-0.773$	
$-y_{74}+y=-0.573$	$-y_{89}+y=-0.023$	
$-y_{75}+y=-0.273$	$-y_{90}+y=-0.173$	

Die mittlere Abweichung einer beobachteten Ordinate, aus allen 100 Schüssen abgeleitet, hat den Wert

$$\mu = \pm 0{\cdot}409\, m.$$

Die durchschnittliche Abweichung einer beobachteten Ordinate, aus allen 100 Schüssen abgeleitet, ist

$$\vartheta = \pm 0{\cdot}321\, m.$$

Wird die durchschnittliche Abweichung auf Grund des mittleren Fehlers ($\mu = \pm 0{\cdot}409\, m$) bestimmt, so findet man

$$\vartheta = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mu = \pm 0{\cdot}326\, m;$$

dieser Wert kommt dem früher gefundenen Werte $0{\cdot}321\, m$ sehr nahe. In der Folge wird nur die mittlere Abweichung μ einer beobachteten Ordinate angewendet.

Die wahrscheinliche Abweichung r_y der Durchschnittsordinate y von der wahren Ordinate Y — aus allen 100 Schüssen abgeleitet — erhält man mit

$$r_y = \frac{r}{\sqrt{n}} = \frac{\varrho\sqrt{2}\,.\,\mu}{\sqrt{n}} = \varrho\sqrt{\frac{2}{100}}\cdot\mu = 0{\cdot}4769\sqrt{\frac{2}{100}}\cdot 0{\cdot}409 = \pm 0{\cdot}028\, m;$$

man kann also 1 gegen 1 wetten, daß sich die wahrscheinlichste Flughöhe $y = 3{\cdot}917\, m$ nicht mehr als um $0{\cdot}028\, m$ von der wahren Flughöhe Y unterscheidet.

Es soll nun die Größe der Abweichung a von der wahrscheinlichsten Ordinate y gesucht werden, welche der Wahrscheinlichkeit $P = \Phi(a h) = \frac{4}{5} = 0{\cdot}8$ entspricht. Man bestimme zunächst mit Hilfe der Tabelle I jenen Wert des Argumentes $a h$, welcher dem Funktionswert $0{\cdot}8$ entspricht; dieser ist $a h = 0{\cdot}9062$. Hiemit folgt für den absoluten Wert der fraglichen Abweichung

$$a = \frac{0{\cdot}9062}{h} = 0{\cdot}9062 \cdot \frac{\mu \sqrt{2}}{\sqrt{n}} = 0{\cdot}9062 \sqrt{\frac{2}{100}} \cdot 0{\cdot}409 = 0{\cdot}052\, m,$$

d. h. man kann 8 gegen 2 wetten, daß die Abweichung der wahrscheinlichsten Flughöhe $y = 3{\cdot}917\, m$ nicht mehr als $0{\cdot}052\, m$ von der wahren Flughöhe Y beträgt, oder mit anderen Worten, man kann 8 gegen 2 wetten, daß der Fehler der wahrscheinlichsten Flughöhe $3{\cdot}917\, m$ den Wert $0{\cdot}052\, m$ nicht überschreitet.

Soll der absolute Wert der Abweichung a von der wahrscheinlichsten Ordinate bestimmt werden, welche der Wahrscheinlichkeit $P = \Phi(a h) = 0{\cdot}9$ entspricht, so schlage man den eben gezeigten Weg ein. Mit Hilfe der Tabelle I ergibt sich als Argumentenwert, welcher dem Funktionswert $0{\cdot}9$ entspricht, $a h = 1{\cdot}163$; hiemit folgt für die fragliche Abweichung

$$a = 1{\cdot}163 \sqrt{\frac{2}{100}} \cdot 0{\cdot}409 = 0{\cdot}067\, m;$$

man kann also 9 gegen 1 wetten, daß der Fehler der wahrscheinlichsten Flughöhe $3{\cdot}917\, m$ den Wert $0{\cdot}067\, m$ nicht überschreitet.

Für $P = \Phi(a h) = 0{\cdot}99$, folgt als zugehöriger Argumentenwert $a h = 1{\cdot}8214$ und hiemit für den absoluten Wert der fraglichen Abweichung

$$a = 1{\cdot}8214 \sqrt{\frac{2}{100}} \cdot 0{\cdot}409 = 0{\cdot}105\, m;$$

man kann also 99 gegen 1 wetten, daß der Fehler der wahrscheinlichsten Flughöhe $3{\cdot}917\, m$ die Größe $0{\cdot}105\, m$ nicht erreicht.

Es sei noch $P = \Phi(a h) = 0{\cdot}999$ angenommen. Diesem Funktionswert entspricht $a h = 2{\cdot}327$ als Argumentenwert und hiemit folgt für den absoluten Wert der zu suchenden Abweichung

$$a = 2{\cdot}327 \sqrt{\frac{2}{100}} \cdot 0{\cdot}409 = 0{\cdot}135\, m;$$

man kann also 999 gegen 1 wetten, daß der Fehler der wahrscheinlichsten Flughöhe $3{\cdot}917\, m$ die Größe $0{\cdot}135\, m$ nicht erreicht.

Soll umgekehrt die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, daß sich die wahrscheinlichste Flughöhe 3·917 *m* von der wahren um nicht mehr als 0·05 *m* unterscheidet, so hat man zunächst den Argumentenwert $ah = \gamma$ zu suchen. Es ist $\gamma = 0{\cdot}05\sqrt{\frac{100}{2}} \cdot \frac{1}{0{\cdot}409} = 0{\cdot}864$; diesem Argument entspricht nach der Tabelle I die Wahrscheinlichkeit $P = 0{\cdot}78$. Es kann also 78 gegen 22 oder (wegen 77 : 22) fast 7 gegen 2 gewettet werden, daß die wahrscheinlichste Flughöhe 3·917 *m* von der wahren Flughöhe sich höchstens um 0·05 *m* unterscheidet.

Der wahrscheinliche Fehler der mittleren Abweichung μ ist gegeben durch $\mu \frac{\varrho}{\sqrt{n}} = 0{\cdot}409 \cdot \frac{0{\cdot}4769}{10} = 0{\cdot}020\,m$ (siehe Punkt 10 des IV. Abschnittes im I. Bande). Man kann also 1 gegen 1 wetten, daß die mittlere Abweichung 0·409 *m* von der aus einer sehr großen Zahl von Abweichungen abgeleiteten mittleren Abweichung sich um nicht mehr als 0·020 *m* unterscheidet.

Die wahrscheinliche Abweichung einer beobachteten Ordinate ist $\varrho\sqrt{2}\,\mu = 0{\cdot}4769\sqrt{2} \,.\, 0{\cdot}409 = 0{\cdot}276\,m$. Man kann also 1 gegen 1 wetten, daß die Abweichung einer beliebigen Flughöhe den Wert 0·276 *m* nicht überschreitet.

Der Grenzwert der Abweichung einer beliebigen Flughöhe entsprechend der Wahrscheinlichkeit $P = \Phi(ah) = \frac{4}{5} = 0{\cdot}8$, welcher das Argument $ah = 0{\cdot}9062$ zukommt, ist

$$a = 0{\cdot}9062\sqrt{2}\,\mu = 0{\cdot}9062\sqrt{2} \,.\, 0{\cdot}409 = 0{\cdot}524\,m.$$

Man kann also 8 gegen 2 wetten, daß die Abweichung einer beliebigen Flughöhe den Wert 0·524 *m* nicht überschreitet.

Für $P = \Phi(ah) = 0{\cdot}9$, entsprechend dem Argumente $ah = 1{\cdot}1631$, folgt

$$a = 1{\cdot}1631\sqrt{2}\,\mu = 0{\cdot}674\,m.$$

Es kann also 9 gegen 1 gewettet werden, daß die Abweichung einer beliebigen Flughöhe den Wert 0·674 *m* nicht überschreitet.

Wird $P = \Phi(ah) = 0{\cdot}99$ gesetzt, wofür $ah = 1{\cdot}8214$ entspricht, so folgt

$$a = 1{\cdot}8214\sqrt{2}\,\mu = 1{\cdot}053\,m.$$

Man kann also 99 gegen 1 wetten, daß die Abweichung einer beliebigen Flughöhe 1·053 *m* nicht überschreitet.

Für $P = \Phi(ah) = 0{\cdot}999$, entsprechend $ah = 2{\cdot}3268$, ergibt sich $a = 2{\cdot}3226\sqrt{2}\,\mu = 1{\cdot}347\,m$.

Es kann also 999 gegen 1 gewettet werden, daß die Abweichung einer beliebigen Flughöhe den Wert 1·347 *m* nicht überschreitet.

Soll die Wahrscheinlichkeit ermittelt werden, daß die Abweichung einer beliebigen Flughöhe den Wert 0·5 *m* nicht überschreitet, so hat man zunächst den Argumentenwert $a h = \gamma$ zu suchen. Es ist $\gamma = 0{\cdot}5 \frac{1}{0{\cdot}409 \sqrt{2}} = 0{\cdot}864$.

Diesem Argument entspricht die Wahrscheinlichkeit $P = 0{\cdot}78$. Man kann also 78 gegen 22 oder fast 7 gegen 2 wetten, daß die Abweichung einer beliebigen Flughöhe den Wert 0·5 *m* nicht überschreitet.

Um sich von der Übereinstimmung der unmittelbaren Beobachtungsresultate mit den nach der Methode der kleinsten Quadrate berechneten Fehlergrenzen, welche den verschiedenen Wahrscheinlichkeiten entsprechen, zu überzeugen, soll angenommen werden, daß die wahre Flugbahn mit der den 100 abgegebenen Schüssen entsprechenden mittleren Flugbahn übereinfällt. Ordnet man die 100 sich ergebenden Abweichungen $-y_i + y$, in Metern ausgedrückt, wobei $i = 1, 2, \ldots, 100$ ist, nach ihrer absoluten Größe, also ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, so ergibt sich die Tabelle der Werte $|-y_i + y|$ auf Seite 276.

Aus der genannten Tabelle ist ersichtlich:

a) Die wahrscheinliche Abweichung $= 0{\cdot}276\,m$ einer beliebigen Flughöhe fällt der Größe nach zwischen die 49. und 50. erhaltene Abweichung, d. h. von den in der Tabelle angeführten 100 Abweichungen sind 49 kleiner und 51 größer als die wahrscheinliche Abweichung 0·276 *m*, oder es ist fast die Hälfte aller Abweichungen kleiner und somit auch fast die Hälfte aller Abweichungen größer als die wahrscheinliche Abweichung; diese liegt fast in der Mitte der nach ihren absoluten Werten geordneten 100 Abweichungen. Will man also wetten, daß eine beliebig genommene Abweichung der Größe nach den Wert 0·276 *m* nicht überschreitet, so wird die Anzahl der für das Gewinnen günstigen Fälle fast dieselbe sein als die Anzahl der für das Verlieren günstigen Fälle, womit auch die wahrscheinliche Abweichung charakterisiert wird.

b) Es wurde gefunden, daß 0·524 *m* jene Fehlerabweichung einer beliebigen Flughöhe ist, welche der Wahrscheinlichkeit $P = 0{\cdot}8$ entspricht. Der Größe nach liegt 0·524 *m* zwischen der 85. und 86. Abweichung oder von 100 Abweichungen sind 85 kleiner als 0·524 *m*. Wenn man also annimmt, daß die wahre Flugbahn mit der mittleren Flugbahn aus 100 Schüssen übereinfällt, so ist die der Fehlergrenze 0·524 *m* entsprechende Wahrscheinlichkeit 0·85 sogar etwas größer als 0·8.

Tabelle der Werte $|-y_i+y|$.

Fortlaufende Zahl	Schuß-Nummer	Absoluter Wert des Fehlers	Fortlaufende Zahl	Schuß-Nummer	Absoluter Wert des Fehlers	Fortlaufende Zahl	Schuß-Nummer	Absoluter Wert des Fehlers
1	1	0·007	36	56	0·223	71	5	0·407
2	19	0·007	37	80	0·223	72	62	0·417
3	86	0·023	38	92	0·223	73	8	0·443
4	89	0·023	39	70	0·227	74	91	0·447
5	94	0·023	40	72	0·227	75	48	0·467
6	21	0·027	41	44	0·233	76	52	0·473
7	71	0·027	42	36	0·247	77	41	0·477
8	78	0·027	43	73	0·253	78	54	0·477
9	79	0·027	44	77	0·253	79	97	0·497
10	45	0·033	45	20	0·257	80	46	0·503
11	17	0·043	46	15	0·263	81	2	0·507
12	47	0·047	47	25	0·273	82	7	0·507
13	64	0·047	48	57	0·273	83	10	0·513
14	81	0·047	49	75	0·273	84	31	0·523
15	16	0·057	50	76	0·277	85	67	0·523
16	18	0·057	51	38	0·283	86	61	0·547
17	32	0·057	52	65	0·283	87	14	0·557
18	35	0·067	53	6	0·293	88	33	0·567
19	50	0·067	54	9	0·293	89	59	0·573
20	42	0·097	55	99	0·297	90	74	0·573
21	95	0·097	56	63	0·303	91	60	0·577
22	29	0·127	57	37	0·317	92	100	0·603
23	53	0·127	58	43	0·317	93	51	0·673
24	93	0·127	59	84	0·323	94	83	0·673
25	40	0·133	60	11	0·327	95	13	0·693
26	12	0·143	61	66	0·327	96	88	0·773
27	23	0·173	62	96	0·327	97	34	0·903
28	55	0·173	63	28	0·333	98	4	1·107
29	90	0·173	64	69	0·347	99	26	1·127
30	50	0·177	65	98	0·353	100	3	1·157
31	82	0·177	66	22	0·373			
32	39	0·183	67	68	0·373			
33	27	0·203	68	87	0·377			
34	30	0·217	69	85	0·397			
35	49	0·217	70	24	0·403			

c) Die Untersuchung ergab, daß 0·674 *m* jene Fehlergrenze einer beliebigen Flughöhe ist, welche der Wahrscheinlichkeit $P = 0·9$ entspricht. Der Größe nach liegt 0·674 *m* zwischen der 94. und 95. Abweichung oder von 100 Abweichungen sind 94 kleiner als 0·674 *m*. Wenn man also annimmt, daß die wahre Flugbahn mit der mittleren Flugbahn aus 100 Schüssen übereinfällt, so ist die der Fehlergrenze 0·674 *m* entsprechende Wahrscheinlichkeit sogar etwas größer als 0·9.

d) Es ist 1·053 *m* jene Fehlergrenze einer beliebigen Flughöhe, welche der Wahrscheinlichkeit 0·99 entspricht. Der Größe nach liegt 1·053 *m* zwischen der 97. und 98. Abweichung oder von 100 Abweichungen sind 97 kleiner als 1·053 *m*. Stellt also die mittlere Flugbahn aus 100 Schüssen die wahre Bahn vor, so ist also die der Fehlergrenze 1·053 *m* entsprechende Wahrscheinlichkeit 0·97 etwas kleiner als 0·99.

e) Man sieht, daß von den 100 Abweichungen nicht eine einzige die Größe 1·347 *m* überschreitet; der Grenzwert 1·347 *m* entspricht, wie gefunden wurde, der Wahrscheinlichkeit 0·999.

f) Die Fehlergrenze 0·5 *m* liegt der Größe nach zwischen der 79. und 80. Abweichung; dies kommt sehr nahe der erforderlichen Wahrscheinlichkeit 0·78 gleich, welche dieser Fehlergrenze entspricht.

15. Allgemeine Bemerkung. Beispiele.

Zum besseren Verständnisse der Punkte 16 und 18 dieses Abschnittes seien die folgende Bemerkung und — hierauf anschließend — fünf Beispiele angeführt.

Allgemeine Bemerkung. Ist p die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereignis eintritt, also $1 - p$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es nicht eintritt, so ist p^2 die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es zweimal eintritt und $(1 - p)^2$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es zweimal nicht eintritt. Ebenso erkennt man, daß, wenn ein Experiment mit der Wahrscheinlichkeit p gelingt, die Wahrscheinlichkeit, daß es dreimal gelingt und zweimal mißlingt, gleich $p^3 (1 - p)^2$ ist. Hier war aber die Reihenfolge der Fälle, in denen das Experiment gelingt beziehungsweise mißlingt, genau vorgeschrieben. Ist diese Reihenfolge nicht vorgeschrieben, sondern will man die Wahrscheinlichkeit wissen, daß das Experiment unter fünf Fällen überhaupt dreimal gelingt, zweimal mißlingt, so hat man das Produkt $p^3 (1 - p)^2$ so oft zu setzen, als sich die Begriffe:

„gelingen, gelingen, gelingen, mißlingen, mißlingen"

permutieren lassen. Man erhält auf diese Art $\frac{5!}{3!\,2!}$ als den Faktor, mit dem $p^3(1-p)^2$ zu multiplizieren ist.

Analog geht man vor, wenn es sich um die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit dafür handelt, daß in einer Serie von s Schüssen m Schüsse kurz und $s-m=n$ Schüsse weit seien. Ist nämlich p die Wahrscheinlichkeit, daß ein Schuß auf der einen Seite der Einschießlinie — kurz — liegt, so ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Schusse auf die andere Seite der Einschießlinie — weit — zu kommen, $1-p$. Für eine bestimmte Reihenfolge des m-maligen Eintreffens und $s-m=n$-maligen Ausbleibens von Kurzschüssen hat man demnach die Wahrscheinlichkeit $p^m(1-p)^n$.

Sollen hingegen in einer erst abzugebenden Serie von s Schüssen m Kurzschüsse und $s-m=n$ Weitschüsse beobachtet werden und ist sonst keine weitere Forderung gestellt, so ist offenbar für dieses künftige Ereignis die Reihenfolge der Kurz- und Weitschüsse unbestimmt und gleichgültig, oder mit anderen Worten, es wird auf die Aufeinanderfolge der Kurz- und Weitschüsse innerhalb der s Schüsse kein Gewicht gelegt; es werden also alle möglichen Gruppierungen als gleichwertig angenommen. Man erhält alsdann für das Eintreffen dieses künftigen Ereignisses die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{s!}{m!\,n!}p^m(1-p)^n=\binom{s}{m}p^m(1-p)^n,$$

denn $\frac{s!}{m!\,n!}$ drückt die Anzahl der Permutationen von s Elementen aus, worunter m gleiche Elemente einer Art und $s-m=n$ gleiche Elemente einer anderen Art vorkommen.

1. Beispiel. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem einzigen Schusse aus einem Geschütze einen Kurzschuß zu erhalten, sei $p=\frac{1}{2}$; die Wahrscheinlichkeit eines Weitschusses ist dann auch $q=1-p=\frac{1}{2}$.

Es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, bei zwei Schüssen folgende Kombinationen zu erhalten:

a) zuerst einen Kurzschuß und dann einen Weitschuß;

b) zuerst einen Weitschuß und dann einen Kurzschuß; endlich

c) einen Kurzschuß und einen Weitschuß in beliebiger Reihenfolge.

Nach der Theorie der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit findet man zu *a)* und *b)* $P=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

Nach der Theorie der zusammengesetzten und der vollständigen Wahrscheinlichkeit folgt zu *c)* $P'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$; es ist also $P'=2P$.

2. Beispiel. Dieselbe Aufgabe für $p=\frac{3}{4}$ und $q=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ zu lösen.

Man findet zu *a)* und *b)* $P=\frac{3}{16}$; zu *c)* $P'=\frac{3}{16}+\frac{3}{16}=\frac{3}{8}=2P$.

3. Beispiel. Gegeben wie im 2. Beispiel $p=\frac{3}{4}$, $q=\frac{1}{4}$. Zu suchen die Wahrscheinlichkeit, bei fünf Schüssen drei Kurzschüsse und zwei Weitschüsse *a)* in gegebener Reihenfolge und *b)* in was immer für einer Reihenfolge zu erhalten? Siehe auch Punkt 4 des I. Abschnittes dieses Bandes.

Zu *a)* $$P=\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{27}{1024}=0{\cdot}0264.$$

Zu *b)* $$P'=\frac{5!}{3!\,2!}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2=10\cdot\frac{27}{1024}=\frac{270}{1024}=0{\cdot}264=10\,P.$$

4. Beispiel. Aus zwei ganz beliebigen Geschützen G_1 und G_2 wird je ein Schuß auf dasselbe Ziel oder auf verschiedene Ziele abgegeben. Die Wahrscheinlichkeit, aus dem Geschütze G_1 einen Kurzschuß zu erhalten, sei p_1; die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Weitschusses aus diesem Geschütze ist alsdann $1-p_1$. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Kurzschusses aus dem Geschütze G_2 sei p_2, hiefür ist $1-p_2$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Weitschusses aus demselben Geschütze. Es sind die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Kombinationen der zwei abgegebenen Schüsse aufzustellen.

Dies vorausgesetzt, können nachstehende Wahrscheinlichkeitsbestimmungen gemacht werden:

a) Die Wahrscheinlichkeit, daß sowohl aus G_1 als auch aus G_2, also mit jedem Geschütze ein Kurzschuß erzielt wird, ist $p=p_1 p_2$.

b) Die Wahrscheinlichkeit, daß aus G_1 ein Kurzschuß, aus G_2 hingegen ein Weitschuß eintrifft, hat den Wert $p_1(1-p_2)$.

c) Die Wahrscheinlichkeit, daß aus G_1 ein Weitschuß, aus G_2 hingegen ein Kurzschuß eintrifft, beträgt $p_2(1-p_1)$.

d) Die Wahrscheinlichkeit, daß entweder aus G_1 ein Kurzschuß und aus G_2 ein Weitschuß oder aus G_2 ein Kurzschuß und aus G_1

ein Weitschuß, also überhaupt ein Kurzschuß und ein Weitschuß eintrifft, ist

$$p' = p_1(1 - p_2) + p_2(1 - p_1) = p_1 + p_2 - 2 p_1 p_2.$$

Hiebei ist es sonach gleichgültig, aus welchem Geschütze der Kurzschuß fällt.

Es sei noch besonders aufmerksam gemacht, daß der Ausdruck $p_1 + p_2$ die Wahrscheinlichkeit bedeutet, daß entweder aus G_1 oder aus G_2 ein Kurzschuß eintrifft; hier kommt also nur ein Schuß und nicht eine Kombination von zwei Schüssen in Betracht.

e) Die Wahrscheinlichkeit, daß weder aus G_1 noch aus G_2 ein Kurzschuß eintrifft, sondern aus beiden Geschützen nur Weitschüsse eintreffen, hat den Wert

$$p'' = (1 - p_1)(1 - p_2).$$

f) Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit von p'' ist

$$p''' = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2;$$

sie besagt, daß nicht aus beiden Geschützen Weitschüsse eintreffen, daß also wenigstens aus einem Geschütze ein Kurzschuß eintrifft, also entweder aus G_1 oder aus G_2 oder auch aus beiden Geschützen Kurzschüsse eintreffen.

Man erkennt, daß p' von p''' verschieden ist. Der Wahrscheinlichkeitswert p' sagt, daß aus einem Geschütze, gleichgültig welchem, ein Kurzschuß und aus dem andern Geschütze ein Weitschuß zu erwarten ist. Es ist p''' um die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit $p_1 p_2$ dafür, daß mit jedem Geschütze ein Kurzschuß erzielt wird, größer als p'.

g) Die Wahrscheinlichkeit, daß nicht aus beiden Geschützen G_1 und G_2 Kurzschüsse eintreffen, sondern höchstens aus einem Geschütze ein Kurzschuß eintrifft, beträgt $1 - p_1 p_2$.

Das Ergebnis $1 - p_1 p_2$ kann auch durch folgende Erwägung gefunden werden: Die Bedingung ist erfüllt, wenn entweder aus G_1 ein Kurzschuß eintrifft und aus G_2 nicht, oder aus G_2 ein Kurzschuß eintrifft und aus G_1 nicht oder schließlich weder aus G_1 noch aus G_2 Kurzschüsse eintreffen. Demnach ist die Wahrscheinlichkeit, daß aus G_1 und G_2 nicht gleichzeitig Kurzschüsse eintreffen, dargestellt durch

$$p_1(1 - p_2) + p_2(1 - p_1) + (1 - p_1)(1 - p_2) = 1 - p_1 p_2.$$

5. Beispiel. Beim Schießen gegen eine 1·8 *m* hohe Scheibe wurden 20 Schüsse abgegeben, von welchen 7 kurz und 3

weit gingen (10 Schüsse haben also die Scheibe getroffen). Es ist die wahrscheinlichste Lage des mittleren Treffpunktes der Schußserie und das wahrscheinlichste Maß der 50-prozentigen Streuung auf Grund dieses Treffergebnisses zu bestimmen.

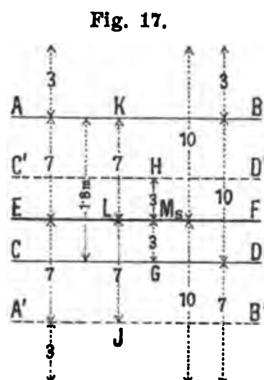


Fig. 17.

In der Fig. 17 stelle $ABCD$ die Scheibe vor, wobei $AB \parallel CD$ ist; EF sei die durch den mittleren Treffpunkt M_s der Schußserie parallel zu AB gezogene Gerade. Es liegen dann 7 Schüsse im Zielstreifen $ABEF$ und 3 Schüsse im Zielstreifen $EFCD$. Trägt man das Maß $M_s G$ nach aufwärts auf, so daß $GM_s = M_s H$ ist, und zieht dann die Gerade $C'D' \parallel AB$, so entfallen auf den Zielstreifen $EFC'D'$ auch drei Treffer. Im symmetrischen Zielstreifen $CD\,C'D'$ liegen dann 6 Treffer, was $6 \times \frac{100}{20} = 30\%$ entspricht. Dieser Prozentzahl entspricht die relative Zieldimension $k = 0{\cdot}6$; es ist demnach $\frac{GH}{s_{50}} = 0{\cdot}6$ und $GM_s = \frac{GH}{2} = 0{\cdot}3\, s_{50}$. Auf ähnliche Weise resultiert der Abstand $LK = 0{\cdot}75\, s_{50}$. Da nun

$$GM_s + LK = 0{\cdot}3\, s_{50} + 0{\cdot}75\, s_{50} = 1{\cdot}8\, m$$

ist, so folgt

$$s_{50} = \frac{1{\cdot}8}{1{\cdot}05} = 1{\cdot}71\, m.$$

Der wahrscheinlichste Abstand des mittleren Treffpunktes vom unteren Rande der Scheibe beträgt hienach $0{\cdot}3 \times 1{\cdot}71 = 0{\cdot}513\, m$.

16. Wahrscheinlichste Zielentfernung, wenn die Beobachtung sich auf die Unterscheidung von Kurz- und Weitschüssen beschränkt.

Mit der Höhenrichtung, welche der Entfernung x_0 entspricht, sei eine Gruppe von s Schüssen abgegeben worden; hiebei ergaben sich m Kurzschüsse und $n = s - m$ Weitschüsse; die wahrscheinliche Längenabweichung sei r. Bezeichnet man die unbekannte Tagesdistanz oder Aufsatzdistanz der Einschießlinie (des Zieles) mit x, dann ist die Wahrscheinlichkeit eines Kurzschusses $F\left(\frac{x - x_0}{r}\right) = F(\xi - \xi_0)$ und $F\left(\frac{x_0 - x}{r}\right) = F(\xi_0 - \xi)$ die Wahrscheinlichkeit eines Weitschusses. Die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen eines Kurzschusses und

eines Weitschusses, aus den Anzahlen m und n bestimmt, seien hingegen mit p und $q = 1 - p$ bezeichnet.

Die aposteriorische Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses, d. i. unter s Schüssen m Kurzschüsse und n Weitschüsse in bestimmter Reihenfolge erhalten zu haben, ist hienach nach der Lehre über die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit

$$1) \qquad \{F(\xi - \xi_0)\}^m \{F(\xi_0 - \xi)\}^n$$

oder

$$2) \qquad p^m (1 - p)^n = p^m q^n.$$

Da die Entfernung ξ unbekannt ist, kann man bezüglich ihres Wertes beliebige gleichmögliche Hypothesen aufstellen. Die Wahrscheinlichkeit einer jeden für ξ gemachten Hypothese ist dem Werte proportional, welchen der in 1) beziehungsweise 2) angegebene Ausdruck bei dieser Hypothese annimmt. Die wahrscheinlichste Tagesdistanz (Aufsatzdistanz) ξ ist demnach diejenige, für welche der Ausdruck 1) beziehungsweise 2) ein Maximum wird.

Lösung der Aufgabe, basiert auf dem Ausdrucke 1).

Die Wahrscheinlichkeit p_ξ, daß die Tagesdistanz (Aufsatzdistanz) im Intervall $(\xi, \xi + d\xi)$ liegt, wird der Größe $d\xi$ des Intervalls und dem zugehörigen Produkt $\{F(\xi - \xi_0)\}^m \{F(\xi_0 - \xi)\}^n$, welches in diesem Intervall als konstant angenommen werden darf, proportional, also — wenn η dieses Produkt bedeutet — durch $k\eta\, d\xi$ darstellbar sein (siehe Seite 81 dieses Bandes). Berücksichtigt man, daß die auf alle Intervalle bezogene Summe den Wert 1 haben muß, da gewiß der Wert von ξ im Intervall $(-\infty, +\infty)$ liegt, so folgt $k \int_{-\infty}^{\infty} \eta\, d\xi = 1$.

Zufolge dieser Beziehung ist man in der Lage, den Koeffizienten (den Proportionalitätsfaktor) k zu bestimmen und findet

$$3) \qquad k = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \eta\, d\xi}.$$

Man erhält sonach für die Wahrscheinlichkeit p_ξ der Hypothese ξ den Ausdruck

$$4) \qquad p_\xi = \frac{\eta\, d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \eta\, d\xi}.$$

Derjenige Wert von ξ, welcher η zu einem Maximum macht, hat die größte Wahrscheinlichkeit für sich, den wahren Wert der Zielentfernung zu geben.

Mit Hilfe der Tabelle VI ist man imstande, für beliebige Werte von ξ den Wert η zu berechnen.

Die Wahrscheinlichkeit P, daß ξ in ein endliches Intervall (α_1, α_2) falle, d. h. die Zielentfernung in den Grenzen α_1 und α_2 eingeschlossen ist, wird gleich sein der Summe der Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Hypothesen bezüglich ξ, d. h. die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$5) \qquad P = \frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \eta\, d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \eta\, d\xi}.$$

Mit der Ausrechnung der bestimmten Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta\, d\xi \quad \text{und} \quad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \eta\, d\xi$$

ist die Aufgabe gelöst, die von der Kurve

$$\eta = \{F(\xi - \xi_0)\}^m \{F(\xi_0 - \xi)\}^n$$

der Abszissenachse und den zu den Abszissen $\xi = -\infty$ und $\xi = \infty$ beziehungsweise $\xi = \alpha_1$ und $\xi = \alpha_2$ gehörigen Ordinaten begrenzte Figur ihrem Flächeninhalte nach zu bestimmen oder zu quadrieren.

Mittels der mechanischen Quadratur ist man in der Lage, die bestimmten Integrale näherungsweise zu berechnen. Die verschiedenen Methoden dieser Berechnung sind in dem Werke: „Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung" von Czuber (zweite Auflage), zweiter Band, Leipzig 1906, Seite 238 bis einschließlich 250 enthalten. Eine der Methoden der mechanischen Quadratur ist unter dem Namen der Simpsonschen Regel bekannt. Da von derselben häufig Gebrauch gemacht wird, wird das Wesen derselben im nächsten Punkte erläutert werden. Neben der mechanischen Quadratur einer gezeichneten Kurve durch Rechnung kennt man auch eine solche durch besondere Mechanismen (Planimeter).

Die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} \eta\, d\xi$ bereiten nur eine scheinbare Schwierigkeit, denn bei Werten von ξ, welche außerhalb ziemlich enger endlicher Grenzen liegen, werden die Ordinaten

η unmeßbar klein, die Kurvenäste fallen mit der Abszissenachse zusammen, so daß man über diese Grenzen hinaus die Berechnung nicht zu erstrecken braucht.

Lösung der Aufgabe, basiert auf dem Ausdrucke 2).

Bei dieser Lösung wird p als unabhängige Veränderliche angenommen. Der Ausdruck 2) wird gleichzeitig mit seinem Logarithmus ein Maximum und hiefür findet man die Bedingung

$$\frac{m}{p} - \frac{n}{1-p} = 0;$$

hieraus folgt für den wahrscheinlichsten Wert von p

6) $$p = \frac{m}{m+n} = \frac{m}{s}, \text{ daher ist } q = 1 - p = 1 - \frac{m}{s} = \frac{n}{s}.$$

Hiemit ergibt sich $\frac{m^m n^n}{s^s}$ als maximaler Wert des Ausdruckes 2).

Für den Funktionswert p ergibt sich aus der Tabelle VI das Argument ζ und da auch ξ_0 gegeben ist, so kann aus $\zeta = \xi - \xi_0$ die Größe ξ bestimmt werden.

Die gegebene Aufgabe kann dadurch verallgemeinert werden, daß die $s = m + n$ Schüsse mit verschiedenen Höhenrichtungen, entsprechend verschiedenen Entfernungen, abgegeben werden. Es sei angenommen, daß m Schüsse, mit den den Entfernungen x_1, x_2, ..., x_m entsprechenden Höhenrichtungen abgegeben, als Kurzschüsse und $n = s - m$ Schüsse, mit den den Entfernungen x_1', x_2', ..., x_n' entsprechenden Höhenrichtungen abgegeben, als Weitschüsse resultierten. Bezeichnet wieder x die unbekannte Tagesdistanz oder Aufsatzdistanz der Einschießlinie (des Zieles), so stellen

7) $$\begin{cases} F\left(\frac{x - x_1}{r_1}\right) = F(\xi - \xi_1), \quad F\left(\frac{x - x_2}{r_2}\right) = F(\xi - \xi_2), \quad \ldots\ldots, \\ F\left(\frac{x - x_m}{r_m}\right) = F(\xi - \xi_m) \end{cases}$$

die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Kurzschüsse und

8) $$\begin{cases} F\left(\frac{x_1' - x}{r_1'}\right) = F(\xi_1' - \xi), \quad F\left(\frac{x_2' - x}{r_2'}\right) = F(\xi_2' - \xi), \quad \ldots\ldots, \\ F\left(\frac{x_n' - x}{r_n'}\right) = F(\xi_n' - \xi) \end{cases}$$

die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Weitschüsse dar. Die Werte r_i und r_i' bedeuten die wahrscheinlichen Längenabweichungen für die Entfernungen x_i und x_i'.

Die Wahrscheinlichkeit, daß alle diese Kurz- und Weitschüsse in bestimmter Reihenfolge eintreffen, ist nach der Lehre über die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit gleich dem Produkte der Ausdrücke 7) und 8), also gleich

$$9)\quad F(\xi-\xi_1)\,F(\xi-\xi_2)\ldots F(\xi-\xi_m)\,F(\xi_1'-\xi)\,F(\xi_2'-\xi)\ldots F(\xi_n'-\xi).$$

Dieses Produkt sei der Kürze wegen wieder mit η bezeichnet.

In 9) sind die Größen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n'$ bekannt, dagegen ist ξ unbekannt; man ist daher genötigt, eine Hypothese über den Wert von ξ zu machen. Bildet man mit dieser Hypothese das Produkt 9), so ist nach den Lehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung dieses Produkt ein Maß für die Wahrscheinlichkeit der Hypothese ξ. Diejenige Hypothese, welche 9) zu einem Maximum

Berichtigung.

In den Gleichungen 7) und 8) auf Seite 284 sind die wahrscheinlichen Längenabweichungen $r_1, r_2, \ldots, r'_1, r'_2, \ldots$ gleich groß anzunehmen. Dies ist zulässig, wenn die Entfernungsänderungen klein sind, denn die wahrscheinlichen Längenabweichungen ändern sich mit der Entfernung nur langsam.

---

17. Simpsons Regel.

Teilt man die Strecke $A_0 A_{2n} = O A_{2n} - O A_0 = b - a$ (Fig. 18) in $2n$, also in eine **gerade** Anzahl gleicher Teile und ermittelt die diesen Teilungspunkten entsprechenden Ordinaten $y_0, y_1, \ldots\ldots, y_{2n}$ der Kurve $P_0 P_{2n}$, deren Gleichung $y = f(x)$ sein möge, so wird die Fläche $A_0 A_{2n} P_{2n} P_0$, deren Inhalt $\int_a^b f(x)\,dx$ ist, in $2n$ Streifen von gleicher Breite $\frac{b-a}{2n} = h$ zerlegt. Man denke sich nun ferner die Bogenstücke $P_0 P_1 P_2$, $P_2 P_3 P_4$, $\ldots$, $P_{2n-2} P_{2n-1} P_{2n}$ durch Parabelbögen von der Gleichungsform

$$1)\qquad y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2,$$

d. i. durch Parabeln mit zu Oy parallelen Achsen ersetzt. Die erste Parabel geht also durch die drei Punkte P_0, P_1, P_2; die zweite

durch die Punkte P_2, P_3, P_4 u. s. w.; die n-te Parabel durch die Punkte P_{2n-2}, P_{2n-1}, P_{2n} hindurch. Diese durch Parabelbögen begrenzten Streifen werden der Berechnung der Fläche $A_0 A_{2n} P_{2n} P_0$ zu Grunde gelegt und es ist augenscheinlich, daß sich die so abgeänderte Fläche von der gegebenen nicht erheblich unterscheiden kann, sobald h genügend klein angenommen wird.

Ein auf diese Weise gebildeter Flächenstreifen $A_i A_{i+2} P_{i+2} P_i$ ist in Fig. 19 dargestellt. Um den Flächeninhalt desselben zu ermitteln, lege man durch $A_i A_{i+2}$ die Abszissenachse, durch $A_{i+1} P_{i+1}$ die Ordinatenachse, ferner durch die Punkte mit den Koordinaten $-h, y_i$; $0, y_{i+1}$; h, y_{i+2} eine Parabel, deren Gleichung die Form 1)

Fig. 18.

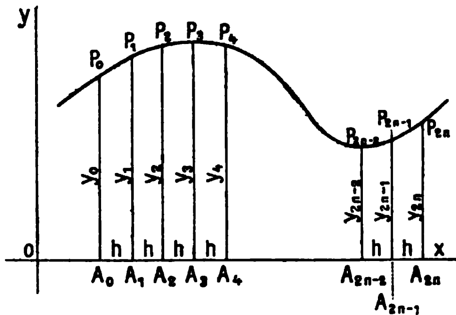
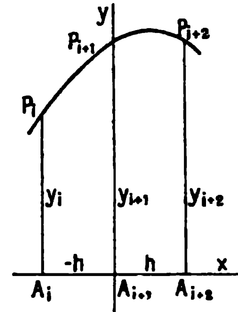


Fig. 19.



haben wird. Dann hat der vom Parabelbogen begrenzte Flächenstreifen $A_i A_{i+2} P_{i+2} P_i$ den Inhalt

$$F = \int_{-h}^{h} (\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2)\, dx = \left\{ \lambda_0 x + \lambda_1 \frac{x^2}{2} + \lambda_2 \frac{x^3}{3} \right\}_{-h}^{h} =$$
$$= \frac{h}{3} (6 \lambda_0 + 2 \lambda_2 h^2).$$

Da die Koordinaten der drei Parabelpunkte die Gleichung 1) der Parabel befriedigen müssen, muß

$$y_i = \lambda_0 - \lambda_1 h + \lambda_2 h^2,$$
$$y_{i+1} = \lambda_0,$$
$$y_{i+2} = \lambda_0 + \lambda_1 h + \lambda_2 h^2,$$

d. s. drei in Bezug auf λ_0, λ_1, λ_2 lineare Gleichungen, deren Auflösung die Werte der Parameter λ_0, λ_1, λ_2 für die Gleichung der durch P_i, P_{i+1}, P_{i+2} hindurchgelegten Parabel liefert. Die Gleichung der Parabel ist übrigens für die Flächenberechnung gar nicht erforderlich. Da nun zufolge des letzten Gleichungssystems

$$y_i + 4\,y_{i+1} + y_{i+2} = 6\,\lambda_0 + 2\,\lambda_2\,h^2$$

ist, so hat man auch

2) $$F = \frac{h}{3}(y_i + 4\,y_{i+1} + y_{i+2});$$

eine Formel, in welcher nur der Figur entnommene Dimensionen auftreten.

Man kann also die Fläche $A_0\,A_2\,P_2\,P_0 = \int_a^{a+2h} f(x)\,d\,x$ näherungsweise ersetzen durch

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4\,y_1 + y_2);$$

auf Grund analoger Erwägungen tritt an die Stelle von $\int_{a+2h}^{a+4h} f(x)\,d\,x$ der Ausdruck

$$\frac{h}{3}(y_2 + 4\,y_3 + y_4)$$

u. s. w.; endlich an die Stelle von $\int_{b-2h}^{b} f(x)\,d\,x$ der Ausdruck

$$\frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4\,y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Durch Zusammenfassung erhält man schließlich die Näherungsformel

3) $$\int_a^b f(x)\,d\,x = \frac{h}{3}\{(y_0 + y_{2n}) + 2\,(y_2 + y_4 + y_6 + \cdots\cdots + y_{2n-2}) + \\ + 4\,(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots\cdots + y_{2n-1})\},$$

welche unter dem Namen der Simpsonschen Regel bekannt ist.

18. Wahrscheinlichkeit des Eintreffens einer bestimmten Kombination von Kurz- und Weitschüssen beim Gruppenschießen.

Angenommen, daß durch ein vorhergegangenes Einschießen, durch das Gabelverfahren, welches in der Theorie des Einschießens ausführlich behandelt erscheint, die wahrscheinlichste Entfernung der Einschießlinie (die wahrscheinlichste Zielentfernung) ermittelt wurde. Auf Grund der hiebei erhaltenen Resultate, welche von der Anzahl der zum Einschießen verwendeten Schüsse und von der Art ihrer Beobachtung als Kurz- oder Weitschüsse abhängen, sei die Wahrscheinlichkeit (siehe Seite 282 dieses Bandes)

1) $$p_\xi = k\,\eta\,d\,\xi, \quad k = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \eta\,d\,\xi}$$

dafür bestimmt, daß sich die Einschießlinie (das Ziel) im Intervall $(\xi, \xi + d\xi)$ befindet.

Die wahrscheinlichste Zielentfernung ξ_0 ist bekanntlich jener Wert von ξ, für den η ein Maximum wird. Mit der dieser Entfernung ξ_0 zukommenden Höhenrichtung wird nun eine Gruppe von s Schüssen abgegeben und es handelt sich darum, die aposteriorische Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß unter diesen s Schüssen m Kurzschüsse, somit $n = s - m$ Weitschüsse in einer beliebigen Reihenfolge erscheinen, also um die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines künftigen Ereignisses auf Grund von Beobachtungen (siehe Punkt 11 des III. Abschnittes dieses Bandes).

Bis zum Beginne des Einschießens muß man jede Hypothese bezüglich der Entfernung ξ der Einschießlinie (bezüglich der Zielentfernung ξ) als gleichwahrscheinlich ansehen, denn es liegt keine Ursache vor, irgend einem Werte von ξ den Vorzug vor den anderen Werten einzuräumen; vor dem Einschießen ist über die Wahrscheinlichkeit der Entfernung der Einschießlinie (der Zielentfernung) eben nichts bekannt.

Nach Durchführung des Einschießens (der Gabelbildung) erhält man für die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Hypothese, einer bestimmten Annahme für die Entfernung der Einschießlinie (die Zielentfernung), den Ausdruck

$$2) \qquad p_\xi = k\eta\, d\xi = \frac{\eta\, d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \eta\, d\xi}.$$

Die Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{p}_\xi$, welche dem künftigen Ereignisse (Abgabe einer Gruppe von s Schüssen auf der durch das Einschießen erhaltenen Entfernung ξ_0, wobei in einer beliebigen Reihenfolge m Kurz- und n Weitschüsse erscheinen sollen) durch die Hypothese ξ verliehen wird, beträgt

$$3) \qquad \mathfrak{p}_\xi = \binom{s}{m} \{F(\xi - \xi_0)\}^m \{1 - F(\xi - \xi_0)\}^n.$$

Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich die Einschießlinie (das Ziel) in der Entfernung ξ befindet, wofür die Wahrscheinlichkeit p_ξ besteht, und daß bei der, mit dem der Entfernung ξ_0 entsprechenden Richtungswinkel, abgegebenen Gruppe irgend eine Kombination von m Kurz- und n Weitschüssen erzielt wird, hat den Wert

$$4)\qquad p_\xi \mathfrak{p}_\xi = \frac{\eta\, d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \eta\, d\xi} \cdot \binom{s}{m} \{F(\xi - \xi_0)\}^m \{1 - F(\xi - \xi_0)\}^n,$$

welcher unendlich klein ist.

Die totale Wahrscheinlichkeit dafür, irgend eine Kombination von m Kurz- und n Weitschüssen zu erhalten, wenn auf der Entfernung ξ_0 geschossen wird und die Einschießlinie (das Ziel) irgendwo im Intervall $(-\infty, +\infty)$ liegt, ist durch

$$5)\qquad \Pi = \binom{s}{m} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \eta \{F(\xi - \xi_0)\}^m \{1 - F(\xi - \xi_0)\}^n d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \eta\, d\xi}$$

gegeben.

Wie ersichtlich, handelt es sich bei der Lösung der Aufgabe dieses Punktes um die Bestimmung der aposteriorischen Wahrscheinlichkeit eines zu gewärtigenden Ereignisses, wenn die möglichen Ursachen dieses Ereignisses a priori gleichwahrscheinlich und in unbegrenzter Menge vorhanden sind (siehe Seite 98 und 99 dieses Bandes).

19. Von den falschen Beobachtungen und ihrer Berücksichtigung bei der Ermittlung der Wahrscheinlichkeit eines Kurz- oder Weitschusses.

Mangon fand auf Grund vieler Erfahrungsdaten, daß die Wahrscheinlichkeit einer falschen Beobachtung gleich 0·1 sei.

Nachstehend soll die Wahrscheinlichkeit eines Kurzschusses beziehungsweise eines Weitschusses bei gegebener Lage der Einschießlinie (des Zieles) unter der Annahme bestimmt werden, daß falsche Beobachtungen zulässig sind.*)

Bezeichnen x_E die Tagesdistanz der Einschießlinie (des Zieles), x die Tagesdistanz, auf welcher geschossen wird, und r die wahrscheinliche Längenabweichung, so drückt bekanntlich

$F\left(\frac{x_E - x}{r}\right) = F(\xi_E - \xi)$ die Wahrscheinlichkeit eines Kurzschusses

und

*) Entnommen dem Werke von N. Sabudski, aus dem Russischen ins Deutsche übersetzt von Ritter v. Eberhard, Seite 325, Punkt 118.

$F\left(\frac{x - x_E}{r}\right) = F(\xi - \xi_E)$ die Wahrscheinlichkeit eines Weitschusses

aus; die Wahrscheinlichkeit einer falschen Beobachtung sei allgemein mit P_f bezeichnet. Man hat dann, unter Zulassung falscher Beobachtungen, bei der Ermittlung der Wahrscheinlichkeit, einen Kurzschuß zu erhalten, folgende zwei Ereignisse zu beachten:

a) Das erste Ereignis besteht darin, daß tatsächlich ein Kurzschuß vorliegt und derselbe richtig beobachtet wird; die Wahrscheinlichkeit eines tatsächlichen Kurzschusses ist $F(\xi_E - \xi)$, die Wahrscheinlichkeit seiner richtigen Beobachtung $1 - P_f$, demnach ist $(1 - P_f)\,F(\xi_E - \xi)$ die Wahrscheinlichkeit des ersten Ereignisses.

b) Das zweite Ereignis besteht darin, daß ein Weitschuß tatsächlich vorliegt, dieser aber fälschlich als Kurzschuß angesprochen wird; die Wahrscheinlichkeit eines Weitschusses ist $F(\xi - \xi_E)$, die Wahrscheinlichkeit einer falschen Beobachtung ist P_f, folglich ist $P_f\,F(\xi - \xi_E)$ die Wahrscheinlichkeit des zweiten Ereignisses.

Da ein Kurzschuß beobachtet wird, wenn das erste oder das zweite Ereignis eintrifft, so ist nach der Theorie der totalen Wahrscheinlichkeit die Wahrscheinlichkeit $F_f(\xi_E - \xi)$ dieses Kurzschusses gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten beider Ereignisse, also

$$F_f(\xi_E - \xi) = (1 - P_f)\,F(\xi_E - \xi) + P_f\,F(\xi - \xi_E),$$

oder weil $F(\xi - \xi_E) = 1 - F(\xi_E - \xi)$ ist,

$$1) \qquad F_f(\xi_E - \xi) = (1 - 2\,P_f)\,F(\xi_E - \xi) + P_f.$$

Auf demselben Wege findet man für die Wahrscheinlichkeit $F_f(\xi - \xi_E)$ eines Weitschusses unter Zulassung falscher Beobachtungen:

$$2) \qquad F_f(\xi - \xi_E) = (1 - 2\,P_f)\,F(\xi - \xi_E) + P_f.$$

Da man die Werte $F(\xi_E - \xi)$ und $F(\xi - \xi_E)$ als $F(\zeta)$ aus der Tabelle VI erhält, so kann man sonach die Wahrscheinlichkeiten $F_f(\xi_E - \xi)$ und $F_f(\xi - \xi_E)$ berechnen.

Indem Mangon $P_f = 0{\cdot}1$ setzte, konnte er die auf Seite 291 zitierte Tabelle der Funktionswerte $F_f(\zeta)$ aufstellen.

Es soll beispielsweise $F_f(\zeta)$ für $\zeta = \mp 1$ berechnet werden. Aus der Tabelle VI findet man:

$$F(-1) = 0{\cdot}250, \qquad F(1) = 0{\cdot}750;$$

es ist sonach

$$F_f(-1) = (1 - 0{\cdot}2)\,0{\cdot}250 + 0{\cdot}1 = 0{\cdot}8 \times 0{\cdot}250 + 0{\cdot}1 = 0{\cdot}3,$$
$$F_f(1) = (1 - 0{\cdot}2)\,0{\cdot}750 + 0{\cdot}1 = 0{\cdot}8 \times 0{\cdot}750 + 0{\cdot}1 = 0{\cdot}7.$$

ζ	$F_f(-\zeta)$	ζ	$F_f(\zeta)$
— 5·5	0·1001	0·0	0·5000
— 5·0	0·1003	0·5	0·6057
— 4·5	0·1010	1·0	0·7000
— 4·0	0·1028	1·5	0·7754
— 3·5	0·1073	2·0	0·8291
— 3·0	0·1172	2·5	0·8633
— 2·5	0·1367	3·0	0·8828
— 2·0	0·1709	3·5	0·8927
— 1·5	0·2246	4·0	0·8972
— 1·0	0·3000	4·5	0·8990
— 0·5	0·3943	5·0	0·8997
0·0	0·5000	5·5	0·8999

Für negative ζ, welche ihrem absoluten Betrage nach größer als 5·5 sind, wird $F_f(-\zeta) = 0{\cdot}1$; für positive ζ, welche größer als 5·5 sind, wird $F_f(\zeta) = 0{\cdot}9$.

Mit Hilfe der obigen Tabelle kann man bei gegebener Lage des Zieles zum mittleren Treffpunkt und unter Zulassung falscher Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit eines Kurz- oder Weitschusses, sowie auch die Wahrscheinlichkeit von Kombinationen aus Kurz- und Weitschüssen berechnen.

Es sei noch bemerkt, daß in den vorstehenden Betrachtungen angenommen wurde, daß die Wahrscheinlichkeit einer falschen Beobachtung vom Abstand des Geschoßaufschlages vom Ziel unabhängig sei, was nicht ganz zutreffend ist.

Beispiel. Es ist unter Zulassung falscher Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit zu suchen, in bestimmter Reihenfolge auf 3200 m einen Kurzschuß, auf 3264 m zwei Weitschüsse zu erhalten, wenn die Tagesdistanz des Zieles 3216 m und die wahrscheinliche Längenabweichung 16 m beträgt.

Es sei $F_f(\xi - \xi_1)$ die Wahrscheinlichkeit, auf 3200 m einen Kurzschuß und $F_f(\xi_2 - \xi)$ die Wahrscheinlichkeit, auf 3264 m einen Weitschuß unter Zulassung falscher Beobachtungen zu erhalten.

Man findet $x - x_1 = 3216 - 3200 = 16$, $\frac{x - x_1}{r} = \xi - \xi_1 = 1$, $x_2 - x = 3264 - 3216 = 48$, $\frac{x_2 - x}{r} = \xi_2 - \xi = 3$; aus obiger Tabelle folgt $F_f(1) = 0{\cdot}7$, $F_f(3) = 0{\cdot}8828$. Die verlangte Wahrscheinlichkeit ist mithin:

$$F_f(\xi - \xi_1)\{F_f(\xi_2 - \xi)\}^2 = F_f(1)\{F_f(3)\}^2 = 0{\cdot}546.$$

20. Wahrscheinlichster Abstand des mittleren Treffpunktes einer Schußserie von der Einschießlinie, sobald die Anzahl der auf einer Seite der Einschießlinie liegenden Treffer bekannt ist.

Diese für die Schießpraxis wichtige Aufgabe ist die Umkehrung der im Punkte 13 dieses Abschnittes gelösten Aufgabe: Bestimmung der auf einer Seite der Einschießlinie zu erwartenden Prozentzahl Treffer bei beliebiger Lage des mittleren Treffpunktes. Aus der Formel 3) dieses Punktes folgt:

$$1) \qquad \Phi\left(\varrho \frac{2z}{s_{50}}\right) = 2P_1 - 1.$$

Hierin bedeutet P_1 die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die in Betracht kommenden Treffer und der mittlere Treffpunkt auf dieselbe Seite der Einschießlinie zu liegen kommen.

Wird nur jene Seite der Einschießlinie $E_1 E_2$ berücksichtigt, welcher $P_1 > \frac{1}{2}$ entspricht, so liegt der mittlere Treffpunkt auf dieser Seite und es resultiert dann z_1 positiv.

Sind nun die Abweichungen der einzelnen Schüsse ihrer Qualität nach — also als Kurz- oder Weitschüsse — bekannt, so ist auch der wahrscheinlichste Wert von P_1 bestimmbar. Denn ist s die Anzahl der abgegebenen Schüsse und sind hievon m Schüsse kurz, also $s - m = n$ Schüsse weit, so hat man, da nur jene Seite der Einschießlinie berücksichtigt wird, für welche $P_1 > \frac{1}{2}$ ist, als wahrscheinlichsten Wert $P_1 = \frac{m}{s}$ oder $P_1 = \frac{n}{s}$ zu setzen, je nachdem $m > n$ oder $m < n$ ist. Für $m = n = \frac{s}{2}$ ist $P_1 = \frac{1}{2}$, d. h. der mittlere Treffpunkt der Schußserie fällt in die Einschießlinie.

Für den unbekannten Funktionswert $2P_1 - 1$ in 1) ist mittels der Tabelle III der Wahrscheinlichkeitsfaktoren für symmetrische Parallelstreifen das Argument k zu bestimmen, womit folgt $k = \frac{2z}{s_{50}}$ und hieraus $z = \frac{k}{2} s_{50}$.

Beispiel. Von 16 abgegebenen Schüssen waren 12 weit. In welchem wahrscheinlichsten Abstande z von der Einschießlinie $E_1 E_2$ liegt der mittlere Treffpunkt?

Nach der Formel 1) ist $\Phi\left(\varrho \frac{2z}{s_{50}}\right) = 2 \cdot \frac{12}{16} - 1 = \frac{1}{2}$. Die Tabelle III der Wahrscheinlichkeitsfaktoren gibt für den Funktionswert $\frac{1}{2}$ den Argumentenwert $k = 1$, somit ist $1 = \frac{2z}{s_{50}}$, daher $z = \frac{s_{50}}{2}$ in der Richtung der Weitschüsse.

Wird jene Seite der Geraden $E_1 E_2$ berücksichtigt, welcher $P_2 < \frac{1}{2}$ entspricht, so liegt der mittlere Treffpunkt auf der anderen Seite dieser Geraden und man hat zufolge der Formel 4) des Punktes 13 dieses Abschnittes für die Lösung der Aufgabe die Formel

$$2)\qquad \Phi\left(\varrho \frac{2z}{s_{50}}\right) = 1 - 2P_2$$

zu benützen; zu dem bekannten Funktionswerte $1 - 2P_2$ suche man wieder das Argument k, womit sich zur Berechnung von z wieder die Relation $k = \frac{2z}{s_{50}}$ ergibt.

Für das letzte Beispiel hätte man $\Phi\left(\varrho \cdot \frac{2z}{s_{50}}\right) = 1 - 2 \cdot \frac{4}{16} = \frac{1}{2}$. Dem Funktionswerte $\frac{1}{2}$ entspricht der Argumentenwert $k = 1$ und mit diesem erhält man wieder $z = \frac{s_{50}}{2}$.

Würde man für den Fall $P_2 < \frac{1}{2}$ auch die Formel 1) benützen, so würde sich für den Funktionswert $2P_2 - 1$ ein negativer Wert ergeben, daher auch z negativ resultieren. Dasselbe trifft auch dann ein, wenn in die Gleichung 2) für P_2 ein Wert, der größer als $\frac{1}{2}$ ist, eingesetzt wird.

Nachstehend sind für die Annahme $P > \frac{1}{2}$ für einige angenommene Zahlenwerte von P die entsprechenden wahrscheinlichsten relativen Abstände $k = \frac{z}{s_{50}}$ des mittleren Treffpunktes von der Einschießlinie $E_1 E_2$ angeführt:

$P =$	0·50,	0·55,	0·60,	0·65,	0·70,	0·75,	0·80,	0·85,	0·90,	0·95,	1·00,
$\frac{z}{s_{50}} =$	0·00,	0·09,	0·19,	0·29,	0·39,	0·50,	0·62,	0·77,	0·95,	1·22,	$>$ 2·00.

Statt der Wahrscheinlichkeit P kann auch die entsprechende Prozentzahl $\mathfrak{p}$ genommen werden. Ist also $P = 0·60$ oder liegen $\mathfrak{p} = 60\%$ aller Schüsse auf einer Seite der Geraden $E_1 E_2$, so liegt der mittlere Treffpunkt auf derselben Seite und dessen Abstand von der Einschießlinie $E_1 E_2$ beträgt $z = 0·19\, s_{50}$.

Aus der nachfolgenden Tabelle kann man aus der Prozentzahl $\mathfrak{p}$ der Schüsse, welche mit dem mittleren Treffpunkte auf derselben Seite der Einschießlinie liegen, den wahrscheinlichsten relativen Abstand des mittleren Treffpunktes von der Einschießlinie, in Teilen der 50-prozentigen Streuung, d. i. den Wert $k = \frac{z}{s_{50}}$ entnehmen.

Tabelle zur Bestimmung des wahrscheinlichsten Abstandes des mittleren Treffpunktes von der Einschießlinie.

$\mathfrak{p}=100P$	$k=\frac{z}{s_{50}}$	$\mathfrak{p}=100P$	$k=\frac{z}{s_{50}}$	$\mathfrak{p}=100P$	$k=\frac{z}{s_{50}}$
50	0·000	67	0·326	84	0·737
51	0·018	68	0·347	85	0·768
52	0·037	69	0·368	86	0·801
53	0·056	70	0·389	87	0·835
54	0·074	71	0·410	88	0·871
55	0·093	72	0·432	89	0·909
56	0·112	73	0·454	90	0·950
57	0·131	74	0·477	91	0·994
58	0·150	75	0·500	92	1·042
59	0·169	76	0·523	93	1·094
60	0·188	77	0·548	94	1·152
61	0·207	78	0·572	95	1·219
62	0·227	79	0·598	96	1·298
63	0·246	80	0·624	97	1·394
64	0·266	81	0·651	98	1·522
65	0·286	82	0·678	99	1·725
66	0·306	83	0·707	100	>2 (unbestimmt)

Beispiel. Von fünf abgegebenen Schüssen hat man nur einen Schuß, d. i. 20% kurz beobachtet. Es liegen also 20% Schüsse auf einer Seite der Einschießlinie und 80% auf der anderen Seite, und zwar auf der Seite des mittleren Treffpunktes. Für den Abstand des letzteren von der Einschießlinie erhält man mittels der Tabelle $0{\cdot}624\,s_{50}$.

21. Ermittlung der Präzisionswerte für eine beliebige Achse aus den Präzisionswerten für die Trefferbildachsen des Systems.

Sind die scheinbaren oder plausiblen Abweichungen für eine bestimmte Achse berechnet worden, so können die zugehörigen Präzisionswerte mittels der bereits entwickelten Methoden bestimmt werden.

Im Punkte 2 dieses Abschnittes (auf Seite 234) wurde darauf hingewiesen, daß der Präzisionswert sich in ein und demselben Trefferbilde mit der Richtung der Abweichungen ändert.

In der Ausübung werden ausnahmslos die den zwei Trefferbildachsen des Systems entsprechenden Präzisionswerte aus dem

Trefferbilde bestimmt. Diese genügen zur Definition der Präzisionsleistung in jeder beliebigen Richtung, nachdem, wie sofort gezeigt werden soll, der Präzisionswert für irgend eine Achse bestimmt werden kann, sobald man die Präzisionswerte für die beiden Trefferbildachsen des Systems kennt.

Es genügt, die mittlere Abweichung zu bestimmen, nachdem aus derselben alle anderen Präzisionswerte ermittelt werden können.

Seien Ox und Oy (Fig. 4, Seite 217) die Trefferbildachsen, also O der aus den praktisch ermittelten Abweichungen durch Rechnung bestimmte mittlere Treffpunkt einer Schußserie und schließe die Achse Ox', für welche die Präzisionswerte aus jenen für die Achsen Ox und Oy bestimmt werden sollen, mit der Achse Ox den Winkel α ein, so findet man für die Koordinate x' des Treffpunktes T die bereits im Punkte 8 des V. Abschnittes dieses Bandes aufgestellte Beziehung

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha;$$

hieraus folgt, wenn man quadriert und nachher die Summierung über alle Treffpunkte erstreckt,

$$1) \qquad [x'x'] = [xx] \cos^2 \alpha + [xy] \sin 2\alpha + [yy] \sin^2 \alpha.$$

Wie im Punkte 8 des V. Abschnittes gezeigt wurde, ist für die Trefferbildachsen die Summe $[xy]$ gleich Null, so daß 1) in

$$2) \qquad [x'x'] = [xx] \cos^2 \alpha + [yy] \sin^2 \alpha$$

übergeht. Dividiert man diese Gleichung durch $n - 1$, wobei n die abgegebene Schußzahl bedeutet, so folgt:

$$3) \qquad \frac{[x'x']}{n-1} = \frac{[xx]}{n-1} \cos^2 \alpha + \frac{[yy]}{n-1} \sin^2 \alpha.$$

Bedeuten μ_x und μ_y die mittleren Abweichungen, bezogen auf die Trefferbildachsen, ferner $\mu_{x'}$ die mittlere Abweichung bezogen auf die Achse Ox', so ist:

$$\frac{[xx]}{n-1} = \mu_x^2, \quad \frac{[yy]}{n-1} = \mu_y^2, \quad \frac{[x'x']}{n-1} = \mu_{x'}^2;$$

hiemit übergeht 3) in

$$4) \qquad \mu_{x'}^2 = \mu_x^2 \cos^2 \alpha + \mu_y^2 \sin^2 \alpha,$$

wofür auch gesetzt werden kann

$$a_{x',68}^2 = a_{x,68}^2 \cos^2 \alpha + a_{y,68}^2 \sin^2 \alpha.$$

Da bekanntlich die $\mathfrak{p}$-prozentigen Abweichungen den 68-prozentigen proportional sind, so hat man allgemein

$$5)\qquad a^2_{x',\mathfrak{p}} = a^2_{x,\mathfrak{p}} \cos^2\alpha + a_{y,\mathfrak{p}} \sin^2\alpha;$$

ebenso findet statt

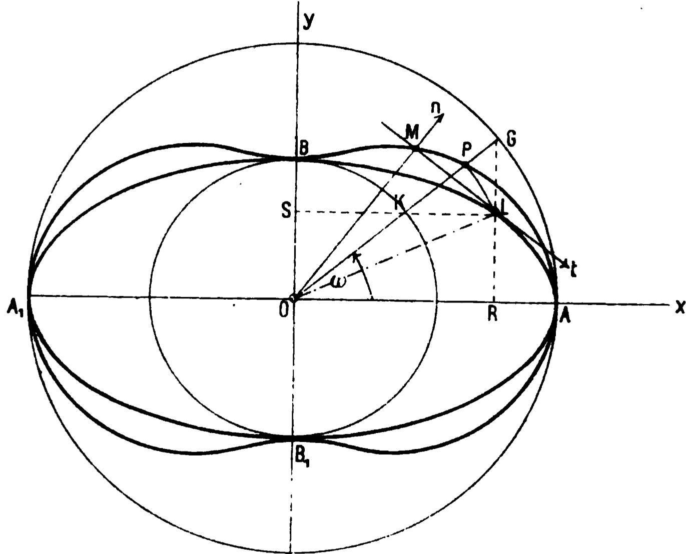
$$6)\qquad a_{y',\mathfrak{p}} = a_{x,\mathfrak{p}} \sin^2\alpha + a^2_{y,\mathfrak{p}} \cos^2\alpha.$$

Summiert man die Gleichungen 5) und 6), so resultiert

$$7)\qquad a^2_{x',\mathfrak{p}} + a_{y',\mathfrak{p}} = a^2_{x,\mathfrak{p}} + a^2_{y,\mathfrak{p}} = \text{konstant};$$

d. h. die $\mathfrak{p}$-prozentigen Abweichungen für je zwei beliebige, jedoch aufeinander senkrecht stehende Achsen bilden die

Fig. 20.



Katheten von rechtwinkeligen Dreiecken mit Hypotenusen von unveränderlicher Länge.

Sind die $\mathfrak{p}$-prozentigen Abweichungen, bezogen auf die Trefferbildachsen, einander gleich, also $a_{x,\mathfrak{p}} = a_{y,\mathfrak{p}}$, so folgt für irgend eine Achse

$$8)\qquad a_{x',\mathfrak{p}} = a_{x,\mathfrak{p}} = a_{y,\mathfrak{p}} = \text{konstant};$$

die Präzisionswerte sind sonach von der Richtung unabhängig, daher der Satz:

Sind die Präzisionen des Schießens nach den beiden Trefferbildachsen des Systems einander gleich, so bleiben die Präzisionswerte für alle Richtungen dieselben.

Die Gleichung 5), welche in der bereits im Jahre 1877 veröffentlichten Theorie der Treffwahrscheinlichkeit von Wuich auf Seite 199 abgeleitet erscheint, stellt die Polargleichung der Fußpunktkurve der Ellipse (Fig. 20) dar, deren Halbachsen $a_{x,p}$, $a_{y,p}$ für den Mittelpunkt als Pol sind (siehe Punkt 22 dieses Abschnittes). Obwohl die Gleichung der Fußpunktkurve der Ellipse bei dieser Lage des Poles sowohl in Polarkoordinaten als auch in rechtwinkeligen Koordinaten allgemein bekannt und untersucht ist, enthält meines Wissens kein Werk über Ballistik hinsichtlich der geometrischen Bedeutung der Gleichung 5) eine diesbezügliche Bemerkung. Der k. u. k. Artillerie-Hauptmann Johann Vavrovsky machte mich auf die geometrische Bedeutung dieser Gleichung aufmerksam und der k. u. k. Artillerie-Hauptmann Alexander Exner teilte mir die im Punkte 22 dieses Abschnittes angegebene, einfache punktweise Konstruktion der Fußpunktkurve der Ellipse mit.

Wie leicht einzusehen, stellt auch die Gleichung 6) die Fußpunktkurve der Ellipse dar, der Mittelpunkt derselben als Pol angenommen.

Spezialisiert man die Gleichung 5) beispielsweise für die 50-prozentige Abweichung, so folgt:

$$a^2_{x',50} = a^2_{x,50} \cos^2 \alpha + a^2_{y,50} \sin^2 \alpha.$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Fußpunktkurve der Ellipse schließt 50 Prozent sämtlicher Treffer ein.

Trägt man auf jedem Radiusvektor vom Pole aus die dieser Richtung entsprechende 50-prozentige Abweichung viermal auf, so bilden die Endpunkte sämtlicher Radienvektoren wieder eine Fußpunktkurve der Ellipse, welche, praktisch genommen, sämtliche unter scheinbar gleichen Verhältnissen erhaltenen Treffer einschließt.

22. Fußpunktkurven. Fußpunktkurve der Ellipse in Bezug auf ihren Mittelpunkt als Pol.

a) Definition der Fußpunktkurve oder Pedale. Fällt man von einem festen Punkte O aus Lote auf sämtliche Tangenten einer ebenen Kurve, so bilden deren Fußpunkte eine neue Kurve, welche die Fußpunktkurve oder Pedale der gegebenen Kurve für den Punkt O als Pol genannt wird. Sämtliche Lote sind natürlich den betreffenden Normalen der Kurve parallel.

b) Allgemeine Gleichung der Fußpunktkurven. Nimmt man den festen Punkt O (Fig. 21) zum Ursprung eines rechtwinkeligen

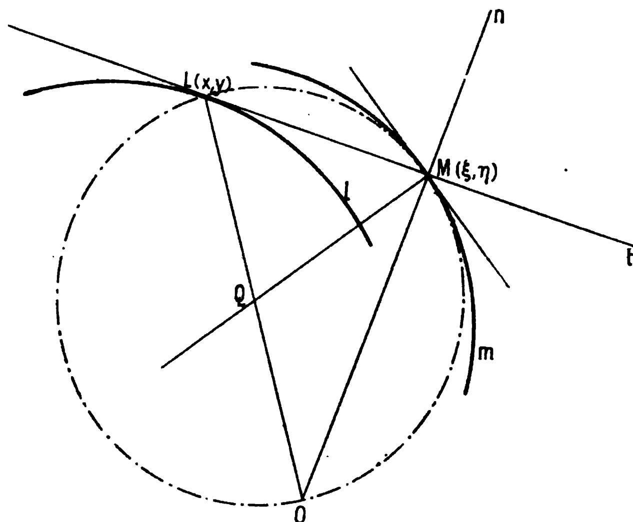
Koordinatensystems, so kann die allgemeine Gleichung der Fußpunktkurven auf folgende Art hergeleitet werden:

Die Gleichung der gegebenen Kurve l sei

1) $$f(x, y) = 0;$$

der beliebige Punkt L derselben habe die Koordinaten x, y. Zieht man in diesem Punkte die Tangente, welche t heißen möge und fällt von O auf dieselbe die Normale n, so erhält man im Schnittpunkte M dieser beiden Geraden t und n einen Punkt M (ξ, η) der zu suchenden Fußpunktkurve m. Analytisch ist sonach der Punkt M durch

Fig. 21.



die Koexistenz der Gleichungen der beiden Geraden t und n bestimmt. Bezeichnen ξ und η die laufenden Koordinaten, so hat die Tangente t die Gleichung:

2) $$\eta - y = y' (\xi - x), \quad \text{wobei} \quad y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}};$$

die Gleichung der zugehörigen senkrechten Geraden n heißt:

3) $$\eta = -\frac{1}{y'}\xi.$$

Durch Auflösung der Gleichungen 2) und 3) nach ξ und η ergeben sich die Koordinaten ξ und η des Punktes M der Fußpunkt-

kurve, und zwar ausgedrückt als Funktionen der Koordinaten x und y des Punktes L. Man erhält demnach die allgemeine Gleichung der Fußpunktkurve, d. h. die Beziehung zwischen ξ und η, durch Elimination von x und y aus den drei Gleichungen 1), 2) und 3).

Um zur Gleichung der Fußpunktkurve zu gelangen, kann man auch folgenden Weg einschlagen. Wird O mit L verbunden, so ergibt sich ein bei M rechtwinkeliges Dreieck OML. Diesem läßt sich ein Kreis umschreiben, dessen Mittelpunkt im Halbierungspunkte Q liegt. Die Koordinaten von Q sind halb so groß als jene von L und heißen daher $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{2}$. Die Gleichung des erwähnten Kreises lautet somit:

$$\left(\xi-\frac{x}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{y}{2}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{4}, \text{ oder}$$

4) $$\xi^2+\eta^2-x\xi-y\eta=0.$$

Diese Gleichung, welche eine Beziehung zwischen den Koordinaten des Berührungspunktes L der Tangente und jenen des Fußpunktes M ausdrückt, ergibt sich übrigens auch durch Elimination von y' aus den Gleichungen 2) und 3).

Wird die Gleichung 3) auf die Form

5) $$\xi\,dx+\eta\,dy=0,$$

gebracht, so kann man sagen: Durch die Koexistenz der Gleichungen 4) und 5) ist wieder der Punkt M bestimmt; mit anderen Worten, der Punkt M ist der Schnittpunkt des Kreises mit der Geraden n. Die Elimination von x, y aus 1), 4) und 5) führt wieder zur Gleichung der Fußpunktkurve.

c) Richtung der Tangente der Fußpunktkurve. Da mit der Änderung der Lage des Punktes L auf der Kurve l sich auch die Lage des Punktes M ändert, so sind in der Gleichung 4) alle Größen als veränderlich anzusehen und man erhält durch Differentiation der genannten Gleichung:

$$2\xi\,d\xi+2\eta\,d\eta-\xi\,dx-\eta\,dy-x\,d\xi-y\,d\eta=0.$$

Wegen 5) vereinfacht sich diese Gleichung auf

$$2\xi\,d\xi+2\eta\,d\eta-x\,d\xi-y\,d\eta=0.$$

Hieraus kann der Richtungskoeffizient $\frac{d\eta}{d\xi}$ der Tangente an die Fußpunktkurve im Punkte M bestimmt werden und man findet:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=-\frac{2\xi-x}{2\eta-y}=-\frac{\xi-\frac{x}{2}}{\eta-\frac{y}{2}}.$$

Der Punkt mit den Koordinaten $\frac{x}{2}, \frac{y}{2}$ ist, wie bereits gesagt, der Mittelpunkt Q der Strecke OL; ξ, η sind die Koordinaten von M; der Verbindungsgeraden QM dieser zwei Punkte entspricht daher der Richtungskoeffizient $\dfrac{\eta - \frac{y}{2}}{\xi - \frac{x}{2}}$. Dieser Ausdruck ist negativ und reziprok dem für $\frac{d\eta}{d\xi}$ gefundenen Werte. Hienach steht die Tangente im Punkte M der Fußpunktkurve senkrecht zur Geraden QM und fällt, da Q auch der Mittelpunkt des dem Dreiecke OLM umschriebenen Kreises ist, mit der Tangente im Punkte M an diesen Kreis überein.

d) Gleichung der Fußpunktkurve der Ellipse in Polarkoordinaten und rechtwinkeligen Koordinaten, wenn der Mittelpunkt der Ellipse als Pol angenommen wird.

Die Mittelpunktsgleichung der Ellipse lautet:

6) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Die Gleichung der Tangente im Punkte x, y derselben hat bekanntlich die Form

7) $$\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} - 1 = 0.$$

Bringt man dieselbe auf die Hessesche Normalform der Gleichung einer Geraden, so ergibt sich unmittelbar die Gleichung der Fußpunktkurve in Polarkoordinaten. Die Normalform der Gleichung einer beliebigen Geraden g (Fig. 22) lautet nämlich

8) $$\xi \cos\varphi + \eta \sin\varphi + l = 0;$$

hierin bedeuten φ den Winkel der Normalen n der Geraden g mit der x-Achse, also $\varphi = \sphericalangle(x, n)$ und l den Normalabstand des Koordinatenursprunges von der Geraden, also $l = P_n O$. Durch Identifizierung der Gleichung 7) mit 8) ergeben sich die Beziehungen

$$-\frac{lx}{a^2} = \cos\varphi, \quad -\frac{ly}{b^2} = \sin\varphi$$

und hieraus

9) $$\begin{cases} -\dfrac{lx}{a} = a\cos\varphi, \\ -\dfrac{ly}{b} = b\sin\varphi. \end{cases}$$

Quadriert man die zwei letzten Gleichungen und addiert sie dann, so resultiert:

$$l^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung 6) der Ellipse

$$10)\qquad l^2=a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi.$$

Dies ist schon die Polargleichung der zu suchenden Fußpunktkurve. Um ihre Gleichung in rechtwinkeligen Koordinaten zu finden, hat man in 10) zu setzen

$$l^2=\xi^2+\eta^2,\quad \cos^2\varphi=\frac{\xi^2}{l^2}=\frac{\xi^2}{\xi^2+\eta^2},\quad \sin^2\varphi=\frac{\eta^2}{l^2}=\frac{\eta^2}{\xi^2+\eta^2}$$

und erhält:

$$\xi^2+\eta^2=\frac{a^2\xi^2+b^2\eta^2}{\xi^2+\eta^2}$$

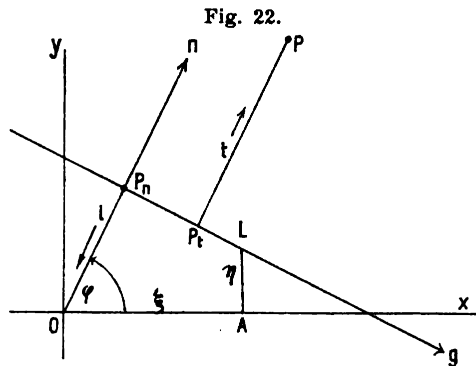
oder

$$11)\qquad (\xi^2+\eta^2)^2=a^2\xi^2+b^2\eta^2.$$

Die Fußpunktkurve der Ellipse in Bezug auf den Mittelpunkt als Pol ist, wie man sieht, eine algebraische Kurve vierten Grades. Sie liegt symmetrisch zu beiden Koordinatenachsen, geht durch die Scheitelpunkte A, A_1, B, B_1 der Ellipse und enthält den Koordinatenursprung als isolierten Punkt (Fig. 20).

e) Normalform der Gleichung einer Geraden. Die wichtige Gleichung 8) möge hier auch abgeleitet werden. Hiezu muß vorerst bemerkt werden, daß der senkrechte Abstand t irgend eines Punktes P (Fig. 22) von einer Geraden g stets von der Geraden — also vom Fußpunkte P_t der zu ihr Senkrechten — zum Punkt gezählt wird; dann gibt $P_tP=t$ den senkrechten Abstand des Punktes P von der Geraden g nach Größe und Vorzeichen an. Derselbe ist positiv, wenn der Punkt auf der positiven Seite der Geraden liegt, d. i. jene Seite, nach welcher die positive Richtung der Senkrechten hinweist, im Gegenfalle negativ. Die positive Richtung sei an der durch den Nullpunkt gehenden

Fig. 22.



Normalen n mittels einer Pfeilspitze angedeutet; sie wird durch den Winkel $\varphi = (x, n)$ bestimmt. Die Normale n und ihr Schnittpunkt P_n mit der Geraden g reichen für die Bestimmung der letzteren hin, wobei P_n durch den Abstand $P_n O = l$ des Ursprunges von der Geraden g gegeben sei. Nimmt man nun auf der Geraden g irgend einen Punkt L an, welcher die Koordinaten x, y haben möge, so ergibt sich, weil die Projektion des Polygons $O A L P_n O$ auf irgend eine Gerade, also auch auf die Normale n, Null ist, die Gleichung $x \cos\varphi + y \sin\varphi + l = 0$, übereinstimmend mit 8).

f) Punktweise Konstruktion der Fußpunktkurve der Ellipse, wenn der Mittelpunkt derselben als Pol angenommen wird.

Für das Verständnis dieser Konstruktion ist es notwendig, zunächst die Konstruktion von beliebig vielen Punkten der Ellipse mit Hilfe der beiden über den Ellipsenachsen als Durchmesser konstruierten Kreisen in Erinnerung zu bringen. Zieht man den Radius OG (Fig. 20), welcher die beiden Kreise in den Punkten K und G schneidet und legt durch G die Gerade RG parallel zur y-Achse und SK durch K parallel zur x-Achse, so ist der Schnittpunkt L dieser beiden Geraden ein Ellipsenpunkt. Schließt nämlich OG mit der Abszissenachse den Winkel ω (die sogenannte exzentrische Anomalie) ein, so hat man für die Koordinaten x, y des Punktes L die Gleichungen

12) $$x = a \cos\omega, \quad y = b \sin\omega;$$

hieraus folgt

$$\frac{x}{a} = \cos\omega, \quad \frac{y}{b} = \sin\omega.$$

Quadriert man diese Gleichungen und addiert sie dann, so resultiert:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2\omega + \sin^2\omega = 1;$$

das ist die Mittelpunktsgleichung der Ellipse; hiemit erscheint ihre punktweise Konstruktion bewiesen.

Die Gleichungen 12) sind die sogenannten Parametergleichungen der Ellipse.

Quadriert man die Gleichungen 12) und addiert sie dann, so folgt

$$x^2 + y^2 = a^2 \cos^2\omega + b^2 \sin^2\omega.$$

Der Vergleich dieser Gleichung mit jener 10) läßt sofort erkennen, daß der Radiusvektor OL der Ellipse ebenso groß ist, als

der Radiusvektor OP jenes Punktes P der Fußpunktkurve der Ellipse, welcher dem Polarwinkel ω entspricht. Beschreibt man also aus O als Mittelpunkt mit OL als Radius einen Kreisbogen, bis OG geschnitten wird, so ist der Schnittpunkt P ein Punkt der betrachteten Fußpunktkurve.

23. Reduktion der Präzisionswerte.

Das Verfahren, welches lehrt, aus den Präzisionswerten des in irgend einer Ebene liegenden Trefferbildes die entsprechenden Präzisionswerte des in einer anderen Ebene liegenden zugehörigen Trefferbildes abzuleiten, heißt Reduktion der Präzisionswerte. Selbstverständlich muß die Lage dieser beiden Ebenen zu einander bekannt sein.

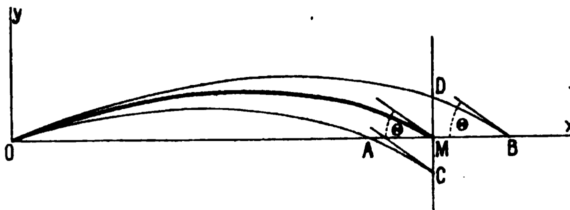
Nachstehend sollen folgende zwei in der Praxis häufig vorkommende Spezialfälle behandelt werden:

A) Aus den Präzisionswerten des im Mündungshorizonte liegenden, also horizontalen Trefferbildes die Präzisionswerte des zugehörigen vertikalen Trefferbildes oder umgekehrt abzuleiten; beide Trefferbilder haben also eine Flugbahngarbe gemeinsam.

B) Aus den Präzisionswerten des im Mündungshorizonte liegenden Trefferbildes die Präzisionswerte des zugehörigen, in einer anderen horizontalen Ebene, etwa am Meeresspiegel liegenden Trefferbildes zu ermitteln.

Zu *A)*. Nachdem, praktisch genommen, die 50-prozentige Breitenstreuung dem horizontalen und vertikalen Trefferbilde gemeinsam zukommt, so ist nur die Beziehung zwischen l_{50} und h_{50} aufzustellen.

Fig. 23.



Seien (Fig. 23) OA und OB jene Bahnen, innerhalb deren 50 Prozent sämtlicher Flugbahnen liegen, OM die mittlere Flugbahn, so ist die 50-prozentige Längenstreuung

$$AB = l_{50} = AM + MB,$$

die 50-prozentige Höhenstreuung

$$CD = h_{50} = CM + MD.$$

Des geringfügigen Distanzunterschiedes wegen sei für alle drei Bahnen der gleiche Einfallwinkel Θ angenommen.

Die analytische Beziehung zwischen l_{50} und h_{50} ergibt sich sofort, wenn man die Gleichungen der beiden Bahnen OA und OB aufstellt und dieselben für $OM = x_0$ spezialisiert, woraus CM und MD folgen. Mit Berücksichtigung der Gleichung der Substitutionsparabel $y = x\,tg\,\Theta\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)$ ergeben sich für die den Bahnen OA und OB zukommenden Substitutionsparabeln die Gleichungen:

$$y = x\,tg\,\Theta\left(1 - \frac{x}{x_0 - \frac{1}{2}l_{50}}\right) \quad \text{und} \quad y = x\,tg\,\Theta\left(1 - \frac{x}{x_0 + \frac{1}{2}l_{50}}\right);$$

hierin bedeuten x_0 die horizontale Schußweite OM und Θ den Einfallwinkel zur wagrechten Mündungsebene.

Wird in den beiden Flugbahngleichungen $x = x_0$ gesetzt und werden dann die absoluten Beträge der so erhaltenen Flugbahnordinaten addiert, so folgt mit Rücksicht darauf, daß $CM + MD = h_{50}$ ist, nach einfachen Reduktionen:

1) $$h_{50} = x_0^2\, l_{50}\, tg\,\Theta \cdot \frac{1}{x_0^2 - \left(\frac{l_{50}}{2}\right)^2} = l_{50}\, tg\,\Theta\, \frac{1}{1 - \left(\frac{l_{50}}{2\,x_0}\right)^2}.$$

Nachdem $\left(\frac{l_{50}}{2\,x_0}\right)^2$ ein sehr kleiner Bruch ist, so kann er gegen die Einheit vernachlässigt werden, wodurch sich 1) vereinfacht in:

2) $$h_{50} = l_{50}\, tg\,\Theta.$$

Diese Gleichung drückt die zu suchende Beziehung aus. Weil $\frac{1}{tg\,\Theta} = cot\,\Theta$ den bestrichenen Raum B_1 für 1 m Zielhöhe ausdrückt, so ist

3) $$\frac{l_{50}}{h_{50}} = B_1 = \text{bestrichener Raum für } 1\,m \text{ Zielhöhe.}$$

Die Gleichung 2) ergibt sich unmittelbar aus der Figur, wenn man die Flugbahnstücke DB und AC geradlinig und unter dem Einfallwinkel Θ gegen den Horizont geneigt ansieht $\left(\frac{1}{2}h_{50} = \frac{1}{2}l_{50}\, tg\,\Theta\right)$.

Geht man von den $\mathfrak{p}$-prozentigen Streuungswerten aus, so würde sich auf demselben Wege die allgemeine Beziehung

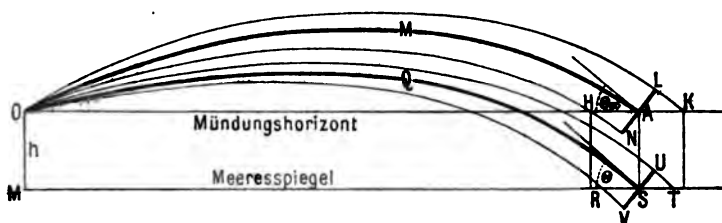
$$h_v = l_v \, tg \, \Theta$$

ergeben.

Zu *B)*. Die 50-prozentige Längenstreuung des im Mündungshorizonte liegenden Trefferbildes sei l_{50}, die zugehörige, auf den anderen Horizont, etwa den Meeresspiegel, reduzierte 50-prozentige Längenstreuung sei l'_{50}; es handelt sich nun zunächst um die Beziehung zwischen l_{50} und l'_{50}.

Zur Auffindung derselben wird von der Flugbahngarbe entsprechend der Horizontaldistanz $OA = x$ (Fig. 24) im Mündungshorizonte und von der Flugbahngarbe entsprechend der Horizontaldistanz $MS = x$ am Meeresspiegel ausgegangen. Diese zwei Flugbahngarben werden umso mehr voneinander verschieden sein, je größer der Höhenunterschied h ist. OMA sei die mittlere Bahn der oberen Flugbahngarbe, OQS die mittlere Bahn der unteren Flugbahngarbe; es sind sonach A und S einander entsprechende Treff-

Fig. 24.



punkte, und zwar A im Mündungshorizonte und S am Meeresspiegel. Den mittleren Treffpunkten beider Flugbahngarben entspricht also dieselbe Horizontaldistanz. Legt man durch A und S Ebenen senkrecht zu den entsprechenden mittleren Bahnen, so kann für die den tatsächlich erbauten Küstenwerken entsprechenden Höhen h (h gleich der Höhe der horizontalen Rohrachse über dem mittleren Meeresspiegel) angenommen werden, daß die in diesen zwei Ebenen enthaltenen Trefferbilder dieselbe Ausdehnung haben werden.

In der Fig. 24 sind nur jene Teile der zwei Flugbahngarben gezeichnet, welche den 50-prozentigen Längenstreuungen entsprechen; es ist also $HK = l_{50}$ und $RT = l'_{50}$.

Der Annahme zufolge ist $NL = VU$, also $l_{50} \sin \Theta_x = l'_{50} \sin \Theta$; daraus folgt:

$$l'_{50} = l_{50} \frac{\sin \Theta_x}{\sin \Theta}. \tag{4}$$

Wie man sieht, hängt l'_{50} von der Schußdistanz und dem Einfallwinkel Θ ab; letzterer ist von der Höhe des Geschützstandes

abhängig. Nach der Formel 4) könnten die in den allgemeinen Schießtafeln*) angegebenen 50-prozentigen Längenstreuungen auf den Meeresspiegel reduziert werden. Hiezu müßten l_{50}, Θ_x aus den allgemeinen Schießtafeln entnommen und der Einfallwinkel Θ berechnet werden.

Für Wurfgeschütze — Küstenmörser und Küstenhaubitzen — erleidet die schießtafelmäßige Längenstreuung l_{50} nach der Formel 4) keine berücksichtigungswerte Änderung; es kann also für Wurfgeschütze $l'_{50} = l_{50}$ gesetzt werden.

Für Flachbahngeschütze kann man die Formel 4) vereinfachen. Ist nämlich das Bahnschwenken zulässig, so ist $\Theta = \Theta_x + n$; für diesen besonderen Fall übergeht die Formel 4) in

$$l'_{50} = l_{50} \frac{\sin \Theta_x}{\sin(\Theta_x + n)},$$

oder wenn man den Weiser x wegläßt, da eine Irrung ausgeschlossen ist,

$$5) \qquad l'_{50} = l_{50} \frac{\sin \Theta}{\sin(\Theta + n)}.$$

Die 50-prozentige Höhenstreuung h'_{50} wird aus l'_{50} und dem Einfallwinkel Θ zufolge des Ergebnisses unter *A)* nach der Formel

$$6) \qquad h'_{50} = l'_{50} \, tg \, \Theta$$

berechnet, wobei das in Betracht kommende, verhältnismäßig kurze Flugbahnstück als geradlinig angesehen wird.

Der für die Reduzierung von l_{50} auf l'_{50} gemachten Annahme zufolge ist $b_{50} = b'_{50}$.

Wenn das Bahnschwenken zulässig ist, so kann man die Formel 5) direkt herleiten, wie dies aus der Lösung des folgenden Beispiels zu ersehen ist.

Beispiel. Welche Distanzänderung am Meeresspiegel bewirkt bei gleichbleibendem Zielpunkte eine Aufsatzänderung für $50\,m$?

---

*) Schießtafeln, welche Angaben für im Mündungshorizonte gelegene Ziele enthalten, heißen gewöhnlich allgemeine Schießtafeln, zum Unterschiede von den sogenannten Objektsschießtafeln, welche beim Schießen aus Küstenwerken benützt werden und auf Grund der allgemeinen Schießtafeln für jedes einzelne Küstenwerk ausgearbeitet werden.

Die Einrichtung der Objektsschießtafeln muß dem Schießvorgang angepaßt sein. Bei zweckmäßiger Einrichtung der Richtmittel und Distanzmesser kann der Schießvorgang äußerst einfach und doch genau sein. Die Objektsschießtafeln sind dann nur einfache Schießbehelfe und haben nicht den Charakter einer Schießtafel in des Wortes engerer Bedeutung.

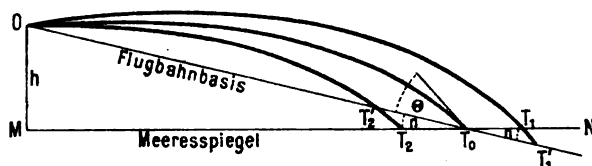
Eine Vermehrung oder Verminderung des Aufsatzes, z. B. für 50 *m*, verlegt bei gleichbleibendem Zielpunkte den Treffpunkt in der Flugbahnbasis $O T_0$ (Fig. 25) von T_0 um 50 *m* nach T_1' beziehungsweise T_2'. Die zugehörigen Treffpunkte auf dem Meeresspiegel sind T_1 und T_2. Die Maße $T_0 T_1$ beziehungsweise $T_2 T_0$ sind, wie aus der Figur ersichtlich, stets kleiner als 50 *m* und hängen von der Höhe des Geschützstandes, der Schußdistanz und dem Einfallwinkel ab.

Im Dreiecke $T_0 T_1' T_1$ ist $T_0 T_1' = 50\,m$, $\sphericalangle T_1 T_0 T_1' = n$, $\sphericalangle T_1 T_1' T_0 = \Theta$ (relativer Einfallwinkel), weiters ist als Außenwinkel dieses Dreieckes $\sphericalangle N T_1 T_1' = \Theta + n$. Nach dem Sinussatze erhält man sonach:

$$7) \qquad T_0 T_1 = T_2 T_0 = 50 \frac{\sin \Theta}{\sin (\Theta + n)} \text{ Meter}$$

(der Terrainwinkel n des Punktes T_0 ist als absoluter Wert eingeführt).

Fig. 25.



Auf die Notwendigkeit, sowohl die Streuungen als auch die Korrekturmaße beim Schießen aus Küstengeschützen auf den Meeresspiegel zu beziehen, hat zuerst der k. u. k. Generalmajor Artur Ritter v. Arbter hingewiesen.

24. Streuungsfehler des Geschützes.

Anschließend an die Bestimmung der Präzisionswerte des am Meeresspiegel liegenden Trefferbildes aus den Präzisionswerten des im Mündungshorizonte liegenden Trefferbildes soll der 50-prozentige oder wahrscheinliche Streuungsfehler der Küstengeschütze besprochen werden, welcher durch besondere, beim Schießen gegen das fahrende Ziel*) auftretende Streuungsursachen bedingt und daher größer ist als der Wert der Schießtafel. Diese

*) Beim fahrenden Schiffe kommen außer der fortschreitenden Bewegung noch drehende Bewegungen in Betracht. Man nennt die drehende Bewegung um die Längenachse des Schiffes die rollende, jene um die horizontale Querachse die stampfende, die Verbindung beider die schlingernde Bewegung; die Drehung um die vertikale Achse gibt sich als Kursänderung kund.

Untersuchung ist für die Ermittlung der Treffwahrscheinlichkeit für ein Schiff in Fahrt sehr wichtig.

Aus den Untersuchungen wird auch klar hervorgehen, inwieweit dieselben für andere Geschütze Gültigkeit haben.

Die hauptsächlichsten Fehlereinflüsse, welche die schießtafelmäßigen Streuungen der Küstengeschütze modifizieren, sind:

a) der Richtfehler, der durch die beim Verfolgen des fahrenden Zieles unvermeidlichen Ungenauigkeiten im Richten des Geschützes entsteht;

b) der Zeitfehler, der durch das nicht ganz regelmäßige Einhalten der Schußzeit auftritt, indem bald etwas zu früh, bald etwas zu spät abgefeuert wird. Als Schußzeit bezeichnet man die Flugzeit der Geschosse, vermehrt um jene Zeit, welche erfahrungsgemäß vom Kommando zur Feuerabgabe bis zum Momente des tatsächlichen Abfeuerns verfließt.

Der 50-prozentige oder wahrscheinliche Streuungsfehler des Geschützes ergibt sich demnach nach dem Didionschen Gesetze aus der schießtafelmäßigen 50-prozentigen Abweichung, aus dem 50-prozentigen Richtfehler und aus dem 50-prozentigen Zeitfehler der Schußzeit.

Der Fehler der Schußzeit kann bei gut geschulter Bedienung des Geschützes und des Distanzmessers auf ein verhältnismäßig kleines Maß herabgemindert werden; er wird daher in den folgenden Untersuchungen nicht in Betracht gezogen.

A) Genauigkeit der Höhenrichtung bei Benützung des Visierfernrohres, des Geschützaufsatzes, des Höhenrichtzeigers*) oder des Quadranten.

Es ist klar, daß die Richtmittel derart eingerichtet sein müssen, daß die den Geschützen eigentümlichen Präzisionen tunlichst ausgenützt werden können. Die Richtungen, in welchen die Verfeinerung der Richtmittel sich zu bewegen hat, sind hauptsächlich: Erhöhung der Genauigkeit der Visur, der Feinheit des Einstellens und der

*) Den Küstengeschützen wird die Höhenrichtung in der Regel durch den Höhenrichtzeiger erteilt. Dieser besteht aus einer beweglichen Scheibe (Bogen), welche mit einer Distanz-, Strich- oder Gradeinteilung versehen ist und aus einem festen Zeiger. Die Scheibe (Bogen) und das Rohr sind derart zwangläufig miteinander verbunden, daß bei der Bewegung des Rohres mittels der Höhenrichtmaschine die Scheibe auf den der jeweiligen Rohrelevation entsprechenden Teilstrich eingestellt wird. Der Zeiger kann auch derart eingerichtet sein, daß er eine Verschiebung längs des Umfanges der Scheibe zuläßt, wodurch die Erteilung von Korrekturen in einfacher Weise ermöglicht wird.

Empfindlichkeit der Libelle, ferner Paralysierung des schädlichen Einflusses der zufälligen seitlichen Neigungen der Symmetrieebene.

Bezüglich der Visierfernrohre oder Zielfernrohre muß zunächst betont werden, daß das Ausschlaggebende bei der Anwendung von Zielfernrohren nicht die Vergrößerungswirkung des Fernrohres ist; das Spezifische in der Anwendung von Zielfernrohren liegt ganz wo anders und kommt auch ohne jede Vergrößerungswirkung zur Erscheinung. Diesbezüglich wird auf die in der Geodäsie angewendeten Fernrohre ohne Vergrößerung (d. h. mit der Vergrößerung Eins) hingewiesen, die ihren Zweck vortrefflich erfüllen.

Gegen das Zielen mit Visur und Korn spricht hauptsächlich folgendes Moment: Durch die Verschiedenheit des Abstandes von Visier, Korn und Ziel zum Auge wird eine Unsicherheit im Zielen verursacht. Das Auge soll nämlich gleichzeitig auf das ganz nahe gelegene Visier, das entferntere Korn und das weitgelegene Ziel gerichtet und auch eingestellt (akkommodiert) werden. Wegen der großen Ungleichheit der Abstände dieser drei Punkte vom Auge fallen aber ihre Bilder nicht zugleich auf die Netzhaut, sondern etwas hintereinander. Das Auge besitzt zwar die Fähigkeit, sich den Entfernungen der Objekte gemäß innerhalb des Akkommodationsgebietes anzupassen, allein für drei so verschiedene Distanzen im gleichen Augenblicke kann offenbar diese Akkommodation nicht eintreten. Der Beobachter sieht entweder das entfernte Zielobjekt oder das Korn oder das Visier deutlich oder undeutlich, je nachdem er seine Aufmerksamkeit vorzugsweise auf den einen oder den andern Gegenstand richtet. Jeder Punkt des nicht scharf gesehenen Gegenstandes (z. B. des Visiers) erscheint als ein in der Ebene, auf welche das Auge eingestellt ist (Ebene des Kornes), befindliches, undeutliches Scheibchen.

Die Länge der Visierlinie, natürlich innerhalb gewisser Grenzen, hat auf die Genauigkeit der Visur keinen wesentlichen Einfluß. Nur wenn der Abstand des Visiers vom Auge kleiner wird als die deutliche Sehweite, nimmt die Genauigkeit der Visur ab.

Die Zielfernrohre legen das Bild des Zieles in die Ebene des Kreuzungspunktes zweier Striche (der Zielmarke), beide sind daher in der gleichen Entfernung vom Auge. Dadurch kommt das Seh- und Richtvermögen des Auges voll zur Geltung. Deshalb sind die Zielfernrohre auch dann schon der älteren Visiervorrichtung (mit Visier und Korn) überlegen, wenn sie eine Vergrößerung des Bildes nicht ergeben.

Eingehende Versuche, welche Professor Stampfer über Visiergenauigkeit angestellt hat, haben gelehrt, daß z. B. bei einem Fernrohrdiopter mit der Vergrößerung $v = 1$ der Visurfehler dreimal kleiner ist als beim gewöhnlichen Diopter.

Die Genauigkeit, welche beim Einstellen einer Visur mittels eines mäßig vergrößernden Fernrohres erreicht werden kann, ist nach den von Professor Stampfer hierüber angestellten Versuchen nahe der Vergrößerung v proportional. Hiebei ist eine mäßige Vergrößerung vorausgesetzt, da sonst unter Umständen der Visurfehler mit der Vergrößerung sogar zunehmen kann. Nach Angabe des genannten Professors ist der Visurfehler in Sekunden $\frac{15}{v}$.

Bei Stampfers Versuchen über Visurgenauigkeit wirkten äußerst günstige Nebenumstände mit, so daß dessen Ergebnisse als die Grenze anzusehen sind, welcher sich die Genauigkeit des Zielens mit dem Fernrohre nähert. Bei ungünstigen Beobachtungsverhältnissen erhält man größere Visurfehler bis $\frac{50}{v}$ und darüber.

Der von Professor Stampfer angegebene Ausdruck für den Visurfehler des Fernrohres ist auf rein empirischem Wege durch praktische Versuche entstanden. Man kann dessen Richtigkeit auch auf theoretischem Gebiete prüfen und gelangt für den Visurfehler, besonders günstige Verhältnisse vorausgesetzt, zu dem Ausdruck $\frac{12}{v}$. Dieser aus der Theorie der Fernrohre sich ergebende Ausdruck stimmt mit dem von Stampfer $\left(\frac{15}{v}\right)$ nahezu überein.

Es beträgt somit die Visiergenauigkeit bei einem Zielfernrohre mit vierfacher Vergrößerung unter besonders günstigen Verhältnissen 3 bis 4 Sekunden, sonst 12 Sekunden; bei einem Zielfernrohre mit der Vergrößerung gleich Eins 12 bis 15 Sekunden, beziehungsweise 50 Sekunden. Beim Richten mit dem Aufsatz (über Visier und Korn) dürfte der Visurfehler nach den von Professor Stampfer mit Dioptern durchgeführten Versuchen mindestens dreimal so groß sein als beim Fernrohre mit der Vergrößerung gleich Eins, daher 45 Sekunden unter günstigen, 2′ 30″ unter ungünstigen Verhältnissen.

Es muß noch bemerkt werden, daß das Richten über Visier und Korn, wenn es genau ausfallen soll, stets ziemlich zeitraubend ist; man darf dafür wohl mindestens 15 Sekunden ansetzen. Auch von diesem Gesichtspunkte sind Zielfernrohre in erster Linie für das Richten in Betracht zu ziehen.

Die in den Schießtafeln eingetragenen 50-prozentigen Längen- (Höhen-) Streuungen sind in der Regel bei Anwendung der Richtung mit dem Zielfernrohre oder der Quadrantenrichtung ermittelt, bei welchen der Richtfehler verhältnismäßig klein ist gegenüber jenen Richtfehlern, die sich beim Richten mittels des Aufsatzes oder des Höhenrichtzeigers ergeben. Die diesen Richtmitteln anhaftenden Fehlereinflüsse vergrößern daher die durch die Schießtafelwerte präzisierte Streuung des Geschützes.

Wenn mittels des Geschützaufsatzes gerichtet wird, kommt hauptsächlich der zufällige Visurfehler des Richtenden in Betracht dessen durchschnittlicher Wert, wie bereits gesagt, mit 45 Sekunden oder rund 50 Sekunden angegeben wird, unter der Voraussetzung, daß der Zielpunkt fest und deutlich markiert ist. Der 50-prozentige oder wahrscheinliche Visurfehler beträgt demnach unter dieser Annahme etwa 40 Sekunden (50-prozentiger Fehler ist gleich dem durchschnittlichen Fehler mal 0·84535). Beim Richten gegen ein Ziel in Bewegung, also gegen ein Schiff in Fahrt, wird natürlich der Visurfehler größer und, abgesehen von der Zielbeleuchtung, noch besonders durch die Fahrgeschwindigkeit des Schiffes und die Wellenbewegung des Meeres bedingt sein. Mittleren Verhältnissen entsprechend, wird man wenigstens das Doppelte des für den festen Zielpunkt gültigen Fehlermaßes in Rechnung ziehen müssen und den 50-prozentigen oder wahrscheinlichen Visurfehler beim Richten gegen ein fahrendes Schiff mit ungefähr $1\frac{1}{2}$ Minuten annehmen können. In Bezug auf die vertikal gedachte Bordwand eines Schiffes*) ergeben sich demnach auf

1000 *m*, 2000 *m*, 3000 *m*, 4000 *m* u. s. w.

die 50-prozentigen Abweichungen der Visur vom Zielpunkte mit

0·4 *m*, 0·9 *m*, 1·3 *m*, 1·7 *m* u. s. w.

(Es ist nämlich $arc\, 1\frac{1}{2}$ Minuten $= arc\, 1'\, 30'' = 0{\cdot}000436$.)

Die Genauigkeit der Höhenrichtung bei Benützung des Höhenrichtzeigers hängt sowohl von der Funktionierung seines Getriebes, als auch von der Beschaffenheit der Geschützunterlage ab und erfordert in ersterer Beziehung die Vermeidung eines toten Ganges,**)

*) Die Bordhöhen der Schlachtschiffe und größeren Kreuzer betragen 6 bis 8 *m*.

**) Über den toten Gang der Schrauben sei folgende, ganz allgemeine Bemerkung gemacht: Die Verstellung eines Apparatteiles oder eines außerhalb des Apparatteiles befindlichen Gegenstandes wird in sehr vielen Fällen durch Drehung eines Schraubenkopfes und nur selten aus freier Hand vorgenommen. Im

in letzterer Hinsicht, daß die Bettung horizontal liege. Bis zu welchem Genauigkeitsgrade diese beiden Forderungen in der Praxis tatsächlich zutreffen, müßte in jeder Batterie durch entsprechend zahlreiche Messungen erhoben, hiebei aber auch getrachtet werden, alle vermeidlichen, im Zeigergetriebe oder in der Geschützmontierung liegenden Fehlerursachen zu beseitigen. Nach den bisherigen Erfahrungsdaten kann im allgemeinen der 50-prozentige Fehler der Höhenrichtzeigerrichtung beim Schießen auf ein fahrendes Schiff ungefähr ebenso groß wie jener der Aufsatzrichtung, das ist mit etwa $1\frac{1}{2}$ Minuten, angenommen werden.

Der Fehler bei der Quadrantenrichtung setzt sich zusammen aus dem Fehler beim Einspielen der Libelle und dem Ablesefehler am Gradbogen. Der erste Fehler hängt von der Empfindlichkeit der Libelle (beträgt etwa 0·1 des Winkelwertes, welcher der Entfernung zweier Teilstriche der Libellenteilung entspricht), der letztere von der Noniusangabe (etwa die Hälfte der Nonienangabe) ab. Der Ablesefehler beim Quadranten kommt nicht in Betracht, wenn vorausgesetzt wird, daß die Quadrantenstellung bei einer Schußserie unverändert bleibt, wie dies beim Ermitteln der Präzisionsdaten auch tatsächlich der Fall ist.

---

ersten Falle hat man besonders auf den sogenannten toten Gang der Schrauben zu achten. Hatte man die Schraube zuerst nach der einen Seite gedreht, wobei sich ein gewisser Teil des Apparates verschob und dreht man sie hierauf zurück, so beginnt sich der von der Schraube geführte Teil des Apparates, wenn ein toter Gang vorhanden ist, nicht auch gleichzeitig nach der anderen Seite zu bewegen, so daß die Größe der Schraubendrehung nicht als Maß für die Verschiebung des betreffenden Apparatteiles dienen kann. Es soll nun entschieden werden, auf welche Weise in jedem gegebenen Falle der schädliche Einfluß des toten Ganges eliminiert werden könnte. Man kann entweder bei jeder Messung zwei Beobachtungen, die auf entgegengesetzten Seiten liegen, machen, d. h. die Schraube erst vorwärts, dann rückwärts drehen oder eine Reihe aufeinander folgender Messungen vornehmen, indem man die Schraube immer nach derselben Seite hin dreht. Es ist selbstverständlich, daß man diesen Vorgang bei der Erteilung der Richtung eines Geschützes nicht anwenden kann. Die Behebung der toten Gänge bei den Richtmitteln der Geschütze muß daher durch geeignete konstruktive Vorkehrungen erfolgen. Bei den Höhenrichtzeigern z. B., bei welchen die Scheibe durch einen am Rohre befestigten Zahnbogen in Drehung versetzt wird, ist folgende Einrichtung zur Ausschaltung des zwischen Zahnbogen und Zahnrad etwa vorhandenen toten Ganges getroffen. Das Zahnrad ist senkrecht zur Drehachse in zwei Teile geteilt, welche durch Federkraft stets im entgegengesetzten Sinne zu einander verstellt werden. Die Zahnflanken des Zahnrades werden hiedurch konstant in Anlehnung an jene des Zahnbogens erhalten und somit die den toten Gang verursachenden Spielräume aufgehoben.

Bei der Visiervorrichtung (dem Kollimateur) von Grubb wird nicht wie beim Visierfernrohre das Bild des Zieles auf ein physisches Kreuz, sondern umgekehrt das virtuelle Bild eines physischen Kreuzes (der Visiermarke) auf das entfernt bleibende Zie geworfen. Es befindet sich daher das Bild der Zielmarke mit dem Ziele in einer Ebene. Das Auge kann daher beide gleichzeitig betrachten und sie ohne zu ermüden, mit der für die Beurteilung seitlicher Lagenverschiedenheit beim freien Sehen geltenden Genauigkeit (bei größter Sehschärfe, besonderer Übung und äußerst günstigen Beobachtungsverhältnissen 12 bis 15 Sekunden, sonst 50 Sekunden und mehr) in Koinzidenz bringen.

Beim Visierapparat des französischen Feldgeschützes kann man das virtuelle Bild der Visiermarke mit dem Ziele nur beiläufig in Koinzidenz bringen, weil letzteres durch den Kollimateur verdeckt wird. Dieser Apparat wird daher nur zur Erteilung der Seitenrichtung beim indirekten Schießen verwendet. Der erwähnte Übelstand des französischen Kollimateurs kann durch Anbringung eines bis zur Zielmarke reichenden Ausschnittes im Glaskörper behoben werden.

Es sei hier noch die Wirkung der Refraktion beim Richten mit dem Aufsatze oder mit dem Zielfernrohre erwähnt. Durch die Refraktion wird nicht allein das Ziel für den Distanzmessenden, sondern auch für den das Geschütz Richtenden gehoben (gesenkt, wenn der Refraktionskoeffizient einen negativen Wert annimmt); letzterer richtet demnach das Geschütz selbst dann falsch, wenn er die richtige Entfernung am Geschützaufsatze eingestellt hätte. Der Fehler summiert sich mit dem beim Distanzmessen begangenen, ist jedoch an und für sich zumeist so gering, daß er vernachlässigt werden kann. Es wird hier deshalb nur auf ihn aufmerksam gemacht, weil er bei starker Abweichung des jeweilig gültigen Refraktionskoeffizienten vom für die Meeresküste gebräuchlichen Werte $k = 0{\cdot}16$ doch merklich wirkt. Es beträgt beispielsweise die Höhenversetzung des Zieles auf

5000 *m*	bei	$k = 0{\cdot}13$	0·3 *m*
	„	$k = 0{\cdot}50$	1·0 *m*
6000 *m*	„	$k = 0{\cdot}13$	0·4 *m*
	„	$k = 0{\cdot}50$	1·4 *m*.

Bei der Luftspiegelung (Fata morgana) nimmt man durch Totalreflexion erzeugte und verkehrte Spiegelbilder von direkt gesehenen oder auch verdeckten Objekten wahr.

B) **Bestimmung des 50-prozentigen oder wahrscheinlichen Richtfehlers der Höhenrichtung im Distanzmaße, ferner der 50-prozentigen oder wahrscheinlichen Längenabweichung im Mündungshorizonte und am Meeresspiegel.**

Auf Grund des bei der Richtung mit dem Visierfernrohre, dem Aufsatze oder mit dem Höhenrichtzeiger angenommenen 50-prozentigen oder wahrscheinlichen Winkelfehlers läßt sich der 50-prozentige oder wahrscheinliche Richtfehler der Höhenrichtung auch im Distanzmaße angeben, indem dieses Maß nach den Elevationswinkel-Differenzen der Schießtafel bestimmt wird.

Da die Längenabweichung des Geschosses beim Präzisionsschießen bei der Richtung mit dem Zielfernrohre oder mit dem Quadranten nur ganz unbedeutend beeinflußt wird, so erhält man bei Anwendung des Aufsatzes oder des Höhenrichtzeigers für die 50-prozentige oder wahrscheinliche Längenabweichung im Mündungshorizonte

$$\sqrt{\left(\frac{l_{50}}{2}\right)^2 + r_x^2},$$

worin l_{50} die schießtafelmäßige 50-prozentige Längenstreuung und r_x den 50-prozentigen Richtfehler der Höhenrichtung, im Distanzmaße ausgedrückt, bedeuten.

Die Reduktion dieses Streuungswertes auf den Meeresspiegel, d. i. die beim Schießen gegen ein Schiffsziel tatsächlich maßgebende Längenstreuung des Geschützes, erfolgt für Kanonen (Bahnschwenken zulässig) nach der Formel

$$s_x = \frac{\sin \Theta}{\sin (\Theta + n)} \sqrt{\left(\frac{l_{50}}{2}\right)^2 + r_x^2}$$

oder näherungsweise nach

$$s_x = \frac{\Theta}{\Theta + n} \sqrt{\left(\frac{l_{50}}{2}\right)^2 + r_x^2},$$

wobei Θ den Einfallwinkel der Flugbahn, n den Terrainwinkel des Zieles und s_x den 50-prozentigen oder wahrscheinlichen Streuungsfehler des Geschützes bedeuten.

Eine solche Umrechnung der schießtafelmäßigen Längenstreuungen mit Rücksicht auf das angewendete Richtmittel und die Seehöhe der Geschützstellung ist, wenn man praktisch halbwegs zutreffende Streuungsdaten erhalten will, unerläßlich.

Bei Küstenmörsern und Küstenhaubitzen ist, wie bereits im Punkte 23 dieses Abschnittes gesagt wurde, eine Reduktion der Längenstreuung unnötig, da bei diesen Wurfgeschützen die schieß-

tafelmäßige Längenstreuung weder durch den Richtfehler, noch durch die Höhenlage der Batterie eine berücksichtigungswerte Änderung erfährt; es ist daher $s_x = \frac{1}{2} l_{50}$.

C) Genauigkeit der Seitenrichtung bei Benützung des Aufsatzes, eines Zielfernrohres oder einer Seitenrichtskala (Horizontalskala).

Bestimmung des 50-prozentigen oder wahrscheinlichen Richtfehlers der Seitenrichtung, ferner der 50-prozentigen oder wahrscheinlichen Breitenabweichung.

Die 50-prozentige Breitenstreuung, welche die Schießtafeln angeben, ist entweder auf Grund der Seitenrichtung mittels des Aufsatzes ermittelt, oder es wurde das Geschütz auf den Teilstrich einer Seitenrichtskala (Horizontalskala) eingestellt. Wurde beim Ermitteln der Schußpräzision die Seitenrichtung mittels des Aufsatzes erteilt, so muß die 50-prozentige Breitenstreuung natürlich mehr betragen als die doppelte, durch den Visurfehler des Richtenden bedingte wahrscheinliche Abweichung. Dem früher mit 40 Sekunden angenommenen 50-prozentigen Visurfehler entsprechend, welcher — es sei ausdrücklich hervorgehoben — nur bei sehr gutem Richten und günstiger Beleuchtung erreicht wird, soll also die 50-prozentige Breitenstreuung auf

1000 *m*, 2000 *m*, 3000 *m*, ...

größer sein als die bezüglichen Maße

0·4 *m*, 0·9 *m*, 1·3 *m* u. s. w.

Dies trifft auch, wie man sich überzeugen kann, bei den Schießtafeln der Feld- und Festungsgeschütze, wenn die Breitenstreuung bei Anwendung der Aufsatzrichtung ermittelt wurde, tatsächlich zu. In den Schießtafeln der Küstenkanonen hingegen findet man Zahlen für b_{50} eingetragen, welche kleiner sind als die vorstehend angeführten Maße. Bei Beurteilung dieser Schießtafelangaben muß man daher annehmen, daß das Geschütz beim Ermitteln der Schußpräzision nicht von Schuß zu Schuß erneuert durch Aufsatzvisur gerichtet wurde, sondern daß dasselbe bei Beginn des Schießens auf das Ziel eingestellt und dann bloß nach jedem Schusse in Bezug auf eine Horizontalskala oder eine Marke auf der Geschützunterlage kontrolliert wurde, ob sich die Seitenrichtung des Geschützes verändert hat. Da die Küstenkanonen infolge ihres großen Gewichtes und ihrer festen Pivotierung eine bedeutende Stabilität besitzen, so

ist es möglich, daß eine ganze Präzisionsserie abgegeben wird, ohne daß die Unterlafette durch den Rückstoß beim Schusse aus ihrer ursprünglichen Stellung gerückt worden wäre.

Dementsprechend enthalten die Schießtafeln der Küstenkanonen den rein ballistischen, vom Richtmittel unabhängigen Streuungswert b_{50}, während der für das Schießen gegen ein fahrendes Schiff maßgebende 50-prozentige oder wahrscheinliche Breitenstreuungsfehler des Geschützes durch die Gleichung

$$s_s = \sqrt{\left(\frac{b_{50}}{2}\right)^2 + r_s^2}$$

gegeben ist, wenn mit r_s der 50-prozentige Richtfehler, im Distanzmaße ausgedrückt, bezeichnet wird, welcher sich beim Verfolgen des fahrenden Zieles mit der Aufsatzrichtung ergibt und welcher nach der bereits früher gegebenen Annahme einem 50-prozentigen Visurfehler von etwa $1\frac{1}{2}$ Minuten entspricht.

Bei den Küstenmörsern und Küstenhaubitzen kann aus denselben Gründen, welche bezüglich der Küstenkanonen angegeben wurden, der 50-prozentige oder wahrscheinliche Breitenstreuungsfehler beim Schießen auf ein Schiff in Fahrt auch nach der Formel

$$s_s = \sqrt{\left(\frac{b_{50}}{2}\right)^2 + r_s^2}$$

gerechnet werden, wobei der Richtfehler r_s, sowohl bei direkter als auch bei indirekter Seitenrichtung, auch basiert auf der Annahme eines Winkelfehlers von etwa $1\frac{1}{2}$ Minuten zu bestimmen wäre.

Die Werte der 50-prozentigen oder wahrscheinlichen Breitenstreuungsfehler im Mündungshorizonte und im Meeresspiegel können als gleich angenommen werden.

Bei Benützung eines Visierfernrohres zur Erteilung der Seitenrichtung sind schon bei der Vergrößerung Eins die Visurfehler höchstens $\frac{1}{3}$ so groß wie bei der Aufsatzrichtung; bei Anwendung mäßig starker Vergrößerungen sind die Visurfehler entsprechend kleiner.

25. Tageselemente und Tagesrelation.

A) Tageselemente.

Die durch das Einschießen ermittelten Schießelemente heißen Tageselemente, als: Tagesdistanz, Tagesaufsatz, Tageselevation, Tagesseitenverschiebung und Tagestempierung.

Als Tagesdistanz wird jene Distanz bezeichnet, welche bei Gebrauch des Aufsatzes und direkter Richtung auf das Ziel (des Libellenaufsatzes oder Richtbogens mit eingestelltem Terrainwinkel) der durch das Einschießen ermittelten Aufsatzhöhe (Richtbogendistanz) entspricht. Bei Benützung des Quadranten (Richtbogens) mit Grad- oder Strichskala wird zur Bestimmung der Tagesdistanz bei erhöhten (vertieften) Zielen vorerst die ermittelte Elevation um den Terrainwinkel vermindert (vermehrt), d. h. der relative Elevationswinkel oder der Schußwinkel ermittelt. Die dem so erhaltenen Winkel nach der Schießtafel zugehörige Distanz gibt die Tagesdistanz. Beim Schießen mit der oberen Winkelgruppe wird die Tagesdistanz dem Ergänzungswinkel entsprechend der Schießtafel entnommen.

Die Tagesdistanz entspricht der ungefähren horizontalen Zieldistanz und werden sich beide umsomehr nähern, je kleiner der Terrainwinkel des Zieles und je flacher die Bahn ist.

B) Tagesrelation.

Beim Schießen ohne Zuhilfenahme eines Distanzmessers versteht man unter Tagesrelation den Unterschied zwischen Tagesdistanz und der wahren oder geometrischen Zieldistanz.

Um diesen wichtigen Begriff der Schießtheorie auch dann klar zu erfassen, wenn ein Distanzmesser benützt wird, wird das Beschießen eines fahrenden Schiffes aus einem Küstengeschütze vorausgesetzt, wobei gleichzeitig ein Küstendistanzmesser mit vertikaler Basis zur Verfügung steht. Die Ergebnisse der Untersuchung können, soweit dies überhaupt zulässig ist, ohne Schwierigkeiten auf das Schießen aus anderen Geschützen und gegen andere Ziele bei gleichzeitiger Verwendung irgend eines beliebigen Distanzmessers übertragen werden.

Auf einer gegebenen Entfernung fällt der mittlere Treffpunkt des Geschützes mit dem mittleren Zielpunkte des Distanzmessers in der Regel nicht überein. Infolge der Tageseinflüsse weicht einerseits die mittlere Schußweite von den Schießtafelangaben ab, während anderseits auch der Distanzmesser nicht die durch die Distanzgleichung bestimmte mittlere Zielentfernung anzeigt. Diese zwischen Geschützportee und Distanzmessung sich ergebende Differenz — die Tagesrelation — ist, solange die Einflüsse gleich bleiben, auf einer Distanz unveränderlich und eben durch die Änderung jener unveränderlichen Größen bedingt, welche der Schießtafel- und Distanzrechnung zu Grunde liegen und mittleren Verhältnissen entsprechen.

Die Ermittlung der Tagesrelation für ein Ziel in Ruhe ist demnach leicht. Nicht so einfach gestaltet sich aber das Verfahren, wenn die Tagesrelation, wie beim Schießen auf ein fahrendes Schiff, bei fortwährend sich ändernder Distanz, also von einer Distanz auf eine andere übertragen werden soll.

Die Beziehung zwischen Tagesrelation und Distanz hängt von den Einflüssen ab, welche entweder eine Änderung des Geschützertrages oder eine Änderung der Distanzmessung zur Folge haben.

Die hauptsächlichsten, durch Tageseinflüsse hervorgerufenen Partialfehler der Schußweite erfolgen infolge Änderung der Anfangsgeschwindigkeit (bedingt durch Verschiedenheiten in der Temperatur und in der sonstigen Beschaffenheit der Pulverladung u. s. w.), durch Änderung des spezifischen Gewichtes der Luft, durch den Einfluß der Windströmungen u. s. w.

Bei Wurfgeschützen — Küstenmörsern und Küstenhaubitzen — muß beim Übertragen der Tagesrelation von einer Distanz auf eine andere auch der Ladungsbereich in Rücksicht gezogen werden.

Nachstehend bedeuten x_0 die horizontale Schußweite im lufterfüllten Raume, φ den Abgangswinkel, Θ den Einfallwinkel, V die Anfangsgeschwindigkeit, σ das spezifische Gewicht der Luft, P das Geschoßgewicht und $X_0 = \frac{V^2}{g} \sin 2\varphi$ (horizontale Schußweite im lufterfüllten Raume).

Man findet alsdann nach den Lehren der Ballistik für die relative Änderung*) $\frac{\Delta x_0}{x_0}$ der horizontalen Schußweite angenähert:

a) bei der Änderung des Abgangswinkels φ um $\Delta\varphi$ (im Bogenmaß):

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = \frac{\Delta \varphi}{tg\, \varphi}\left(\frac{X_0}{2\, X_0 - x_0} - tg^2 \varphi\right),$$

oder für die Benützung der Schießtafeln

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = \Delta \varphi \frac{\cos(\varphi + \Theta)}{\cos \varphi \sin \varphi};$$

*) Offenbar ist für die Beurteilung der Genauigkeit einer Messung nicht der absolute, sondern der relative Fehler maßgebend; multipliziert man letzteren mit 100, so erhält man den sogenannten prozentischen Fehler. Wenn man beispielsweise ein Gewicht bis auf 0·1 *g* sicher ermittelt, so kann die erreichte Genauigkeit in manchen Fällen äußerst groß, in anderen Fällen aber gänzlich unzureichend sein, je nachdem 0·1 *g* einen äußerst kleinen oder einen bereits beträchtlichen Bruchteil des Gesamtgewichtes bedeutet.

b) bei der Änderung der Anfangsgeschwindigkeit V um ΔV:

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = \frac{X_0}{2X_0 - x_0} \cdot \frac{2\Delta V}{V},$$

oder für die Benützung der Schießtafeln

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = \frac{tg\,\varphi}{tg\,\Theta} \frac{2\Delta V}{V};$$

c) bei der Änderung des Geschoßgewichtes P um ΔP:

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = -\frac{x_0}{2X_0 - x_0} \frac{\Delta P}{P},$$

oder für die Benützung der Schießtafeln

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = -\left(2\frac{tg\,\varphi}{tg\,\Theta} - 1\right)\frac{\Delta P}{P};$$

d) bei der Änderung des spezifischen Gewichtes der Luft σ um $\Delta\sigma$:

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = -\frac{X_0 - x_0}{2X_0 - x_0} \frac{\Delta\sigma}{\sigma},$$

oder für die Benützung der Schießtafeln

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = -\frac{\sin(\Theta - \varphi)}{\sin\Theta \sin\varphi} \frac{\Delta\sigma}{\sigma};$$

u. s. w.

Bedeutet w_x die Komponente der Windgeschwindigkeit in der Schußrichtung und t die totale Flugzeit, so resultiert infolge des Einflusses der Windströmung für die Änderung der horizontalen Schußweite angenähert $\Delta x_0 = w_x t$.

Um die für den Mündungshorizont gefundene Distanzänderung Δx_0 mit Rücksicht auf die Seehöhe der Geschützstellung auf den Meeresspiegel zu übertragen, hat man bei Küstenkanonen Δx_0 mit $\frac{\sin\Theta}{\sin(\Theta + n)}$ zu multiplizieren. Bezeichnet Δx die reduzierte Distanzänderung, so ist

$$\Delta x = \Delta x_0 \frac{\sin\Theta}{\sin(\Theta + n)}.$$

Für Küstenmörser und Küstenhaubitzen ist eine Reduktion unnötig, weil die Distanzänderung Δx_0 durch die Höhenlage der Batterie keine berücksichtigungswerte Änderung erfährt.

Die Distanzmessung wird sowohl durch Veränderung des spezifischen Luftgewichtes als auch durch den Flutwechsel, die Gezeiten, beeinflußt. Dadurch ergeben sich gegenüber der auf mittlere

Verhältnisse basierten Distanzbestimmung Messungsfehler, welche eine gewisse Zeit hindurch als unveränderlich angesehen werden können, nämlich solange, als sich die Einflüsse nahezu unverändert erhalten.

Das von der Temperatur der Atmosphäre abhängige und mit dieser schwankende spezifische Luftgewicht hat auch eine Änderung der Refraktion zur Folge. Der für die Meeresküste angenommene Refraktionskoeffizient $k = 0{\cdot}16$, welcher der Distanzgleichung (siehe Punkt 26 dieses Abschnittes)

$$x = h \cot\left\{\alpha - (1 - k)\frac{\gamma}{2}\right\} = h \cot\left\{\alpha - (1 - 0{\cdot}16)\frac{\gamma}{2}\right\} =$$
$$= h \cot(\alpha - 0{\cdot}42\,\gamma)$$

zu Grunde liegt, ist bei einer Abweichung von den angenommenen mittleren atmosphärischen Verhältnissen nicht mehr zutreffend; es ergibt sich ein Winkelfehler und diesem zufolge wieder ein Distanzfehler.

Man denke sich auf einer bestimmten Distanz das Ziel; es wird alsdann der Tiefenwinkel α (Fig. 26) sich ändern, wenn sich der Refraktionswinkel $r = \frac{1}{2} k\gamma$ ändert. Verschiedenen Werten von α entsprechen auch verschiedene Messungswerte für die Distanz. Wenn nun, wie angenommen wurde, das Ziel seine Position nicht ändert, so bleibt $r + \alpha$ konstant gleich c. Aus $r + \alpha = c$ folgt alsdann $\Delta r + \Delta\alpha = 0$ oder $\Delta\alpha = -\Delta r = -\frac{1}{2}\gamma\Delta k$.

Wenn also der Refraktionswinkel r wächst, nimmt der Tiefenwinkel α ab; einem kleineren Tiefenwinkel oder einer kleineren Schraubengangzahl entspricht aber eine größere Distanz. Man kann sagen: Einem positiven (negativen) Zuwachse des k entspricht eine Distanzvermehrung (Distanzverminderung).

Der dem geänderten Winkel α entsprechende Distanzfehler $\Delta_r x$ folgt aus $x = h \cot(\alpha - 0{\cdot}42\,\gamma)$ mit

$$\Delta_r x = -h \frac{1}{\sin^2(\alpha - 0{\cdot}42\gamma)} \cdot \Delta\alpha = -h \frac{\cos^2(\alpha - 0{\cdot}42\gamma)}{\sin^2(\alpha - 0{\cdot}42\gamma)} \cdot \frac{\Delta\alpha}{\cos^2(\alpha - 0{\cdot}42\gamma)} =$$
$$= -h \cot^2(\alpha - 0{\cdot}42\,\gamma)\frac{\Delta\alpha}{\cos^2(\alpha - 0{\cdot}42\gamma)} = -h \cdot \frac{x^2}{h^2} \cdot \frac{\Delta\alpha}{\cos^2(\alpha - 0{\cdot}42\gamma)} =$$
$$= -\frac{x^2}{h} \cdot \frac{\Delta\alpha}{\cos^2(\alpha - 0{\cdot}42\gamma)}.$$

Da $\alpha - 0{\cdot}42\gamma$ klein ist, so kann man näherungsweise $\cos^2(\alpha - 0{\cdot}42\gamma)$ der Einheit gleich setzen und es resultiert

$$\Delta_r x = -\frac{x^2}{h} \cdot \Delta\alpha.$$

Wie diese Gleichung zeigt, ist der Distanzfehler dem Quadrate der Distanz proportional; ferner ersieht man wieder, daß für negative (positive) $\Delta\alpha$ die Distanzänderung $\Delta_r x$ positiv (negativ) wird, d. h. eine Distanzvermehrung (Distanzverminderung) eintritt.

Der Einfluß der Änderung des Refraktionskoeffizienten wird sich also in direkter Weise durch die Änderung der Distanzmessung im Verlaufe eines lang andauernden Schießens und dadurch in indirekter Weise durch die Änderung der Tagesrelation fühlbar machen.

Von der bisherigen Praxis, mit einem Mittelwerte des Refraktionskoeffizienten zu arbeiten, kann schon der Einfachheit halber nicht abgegangen werden, hauptsächlich aber deshalb nicht, weil es ganz ausgeschlossen ist, vor dem Distanzmessen erst den Refraktionskoeffizienten zu bestimmen.

Der durch den Flutwechsel, die Gezeiten, also durch eine Änderung der mittleren Seehöhe h verursachte Distanzfehler ist durch die Gleichung

$$\Delta_h x = cot(\alpha - 0{\cdot}42\,\gamma) . \Delta h = \frac{x}{h} \cdot \Delta h$$

gegeben und steht also in einfach proportionalem Verhältnisse zur Distanz.

Es ist nun die Frage, welcher von den beiden Distanzänderungen $\Delta_r x$ und $\Delta_h x$ mehr Bedeutung beizumessen ist. Dieselben werden zwar in ihrer Größe wechseln, je nachdem der eine oder der andere Einfluß stärker ist; ihr maximaler Wert könnte aber immerhin zu ihrer vergleichsweisen Beurteilung dienen.

Dieser größte Fehlerwert läßt sich auch für den Einfluß des Flutwechsels ziemlich genau bestimmen, da der Unterschied der Wasserstände bei Ebbe und Flut bekannt ist und an unserer Küste etwa $0{\cdot}6\,m$ beträgt. Es ist somit Δh_{max} etwa gleich $0{\cdot}3\,m$ und der Maximalwert $\Delta_h x$ für die Distanz $x = 5000\,m$ und die Seehöhen $25\,m$, $50\,m$, $100\,m$ nach der obigen Gleichung beziehungsweise gleich $60\,m$, $30\,m$, $15\,m$.

Bezüglich der Refraktionsänderung ist jedoch eine hinreichend zutreffende Angabe des maximalen Wertes von $\Delta_r x$ nicht möglich, da über die Variation des Refraktionskoeffizienten bei den atmosphärischen Verhältnissen der Meeresküste noch keine hinreichenden, von verschiedenen Seehöhen auf das Meer ausgeführten Versuchsmessungen vorliegen. In Anbetracht dessen, daß der Einfluß des Flutwechsels an unserer Küste, wie die vorstehenden Zahlen zeigen, verhältnismäßig gering ist und die Refraktion schon im Verlaufe eines Tages nicht unbedeutenden Schwankungen unterliegt, läßt sich

durch Rechnung nachweisen, daß die Maximalwerte von $\Delta_r x$ mitunter größer sein können, als die Maximalwerte von $\Delta_h x$.

Bei der mannigfachen Art des Zusammenwirkens der verschiedenen Einflüsse auf die Beziehung zwischen Tagesrelation und Distanz ist nicht zu erwarten, daß es der reinen Theorie gelingen wird, den Einfluß aller Elemente auf die erwähnte Beziehung mit mathematischer Schärfe festzustellen. Die Theorie kann nur auf den qualitativen Einfluß aller Elemente auf die Größe der Tagesrelation hinweisen.

Eine zweckmäßige Korrektur der Tagesrelation soll derart erfolgen, daß sie, auf einer Distanz ausgeführt, auf allen anderen Entfernungen die zutreffenden Distanzänderungen auf dem Meeresspiegel bewirkt. Die nur einmal, auf einer Distanz vorgenommene Korrektur soll beim weiteren Verfolgen des fahrenden Zieles womöglich im ganzen Schußbereiche entsprechen. Dies ist aber bei den gegenwärtig bekannten Richtmitteln der Geschütze unmöglich und wird infolge der verwickelten, von Entfernung zu Entfernung sich in unbekannter Art ändernder Einflüsse auf die Tagesrelation kaum je zu erreichen sein. Es ist unrichtig, beispielsweise zu behaupten, daß die durch die Tageseinflüsse hervorgerufenen, auf den Meeresspiegel reduzierten Porteeänderungen stets Korrekturen der Höhenrichtung proportional oder im quadratischen Verhältnisse zur Distanz zur Folge haben.

26. Distanzberechnung mit Rücksicht auf Erdkrümmung und Refraktion.

Es sei in Fig. 26 C der Mittelpunkt der Erde, A der Aufstellungsort des Instrumentes, E das auf der Wasseroberfläche befindliche anzuvisierende Objekt, $AB = h$ der lotrechte Abstand der wagrechten Fernrohrachse des Instrumentes vom Meeresspiegel, $\sphericalangle BCE = \gamma$.

Vermöge der Refraktion wird man den Punkt E nicht in der Richtung AE, sondern in jener AT sehen und es ist $\sphericalangle TAE$ der Refraktionswinkel r, der gegeben ist durch:

$$r = \frac{1}{2} k \gamma = \frac{1}{2} \cdot 0{\cdot}16\, \gamma = 0{\cdot}08\, \gamma.$$

Durch die Visur nach dem Punkte E ergibt sich am Instrumente der Tiefenwinkel α. Die auf dem wahren Horizonte des Punktes E gemessene Entfernung dieses Punktes von B ist der Bogen $EB = x$.

Für die in Betracht kommenden Distanzen kann der Bogen EB mit der Sehne EB vertauscht werden; der dadurch begangene Fehler ist selbst für eine Länge des Bogens $EB = 20\,km$ noch unmerklich. Demgemäß kann die Sehne EB als die zu suchende Entfernung x angesehen und diese dann aus dem schiefwinkeligen Dreiecke ABE bestimmt werden. Ist im letzteren $\sphericalangle EAB = \varphi$ und $\sphericalangle BEA = \psi$, so hat man

$$\alpha + r + \varphi = 90^0, \quad \text{also} \quad \varphi = 90^0 - (\alpha + r) = 90^0 - \left(\alpha + \frac{k}{2}\gamma\right);$$

$$\alpha + r = \psi + \frac{\gamma}{2}, \quad \text{daher} \quad \psi = \alpha + r - \frac{\gamma}{2} = \alpha - (1 - k)\frac{\gamma}{2}.$$

Fig. 26.

Nach dem Sinussatze folgt:

$$x : h = \sin\varphi : \sin\psi = \sin\left\{90^0 - \left(\alpha + \frac{k}{2}\gamma\right)\right\} : \sin\left\{\alpha - (1 - k)\frac{\gamma}{2}\right\} =$$

$$= \cos\left(\alpha + \frac{k}{2}\gamma\right) : \sin\left\{\alpha - (1 - k)\frac{\gamma}{2}\right\};$$

hieraus

$$x = h\,\frac{\cos\left(\alpha + \frac{k}{2}\gamma\right)}{\sin\left\{\alpha - (1 - k)\frac{\gamma}{2}\right\}}.$$

Dies ist die Formel zur Berechnung von x. Dieselbe läßt sich wie folgt vereinfachen. Schreibt man im Zähler

$$\alpha + \frac{k}{2}\gamma = \alpha - \frac{\gamma}{2} + \frac{k}{2}\gamma + \frac{\gamma}{2} = \alpha - (1-k)\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2},$$

so ergibt sich:

$$x = h\,\frac{\cos\left\{\alpha - (1-k)\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2}\right\}}{\sin\left\{\alpha - (1-k)\frac{\gamma}{2}\right\}}.$$

Weil

$$\frac{\cos\left\{\alpha-(1-k)\frac{\gamma}{2}+\frac{\gamma}{2}\right\}}{\sin\left\{\alpha-(1-k)\frac{\gamma}{2}\right\}} = \frac{\cos\left\{\alpha-(1-k)\frac{\gamma}{2}\right\}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\left\{\alpha-(1-k)\frac{\gamma}{2}\right\}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\left\{\alpha-(1-k)\frac{\gamma}{2}\right\}} =$$

$$= \cot\left\{\alpha-(1-k)\frac{\gamma}{2}\right\}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2},$$

so ist auch:

$$x = h\left\{\cot\left(\alpha-(1-k)\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\right\},$$

und da γ sehr klein ist, bei Distanzmessungen bis 10 *km* nicht einmal 6 Minuten ($\cos 6' = 0{\cdot}999\,9985$), kann $\cos\frac{\gamma}{2} = 1$ gesetzt werden, wodurch

$$x = h\left\{\cot\left(\alpha-(1-k)\frac{\gamma}{2}\right) - \sin\frac{\gamma}{2}\right\}$$

wird.

Für Entfernungen von 500 *m* aufwärts und Seehöhen h von wenigstens 20 *m* wird die Differenz $\alpha - (1-k)\frac{\gamma}{2}$ schon so klein, also $\cot\left\{\alpha-(1-k)\frac{\gamma}{2}\right\}$ schon so groß, daß das Glied $\sin\frac{\gamma}{2}$ gegen $\cot\left\{\alpha-(1-k)\frac{\gamma}{2}\right\}$ vernachlässigt werden kann, so daß sich schließlich zur Berechnung der Distanzen x die einfache Formel ergibt:

$$x = h\cot\left\{\alpha-(1-k)\frac{\gamma}{2}\right\} = h\cot\psi = \frac{h}{tg\,\psi},$$

oder mit Rücksicht auf den Wert von k:

$$x = h\cot(\alpha - 0{\cdot}42\,\gamma) = \frac{h}{tg\,(\alpha - 0{\cdot}42\,\gamma)}.$$

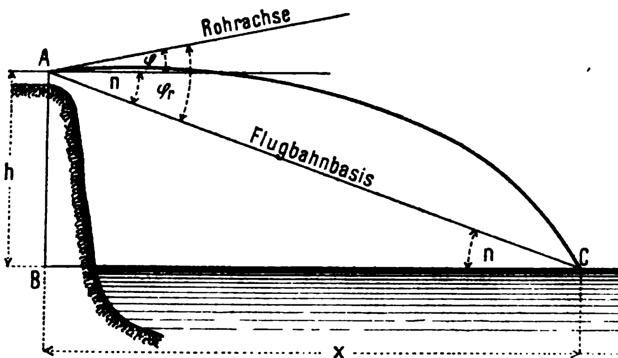
27. Beurteilung des automatischen Richtverfahrens (der automatischen Aufsätze) der Küstengeschütze.

Bei Küstengeschützen, welche genügend hoch über dem Meeresspiegel ständig aufgestellt sind, kann infolge der wagrechten Meeresfläche das Richten selbsttätig — automatisch — ausgeführt werden.

Anschließend an die Darlegungen der Punkte 24 und 25 dieses Abschnittes erscheint es angezeigt, das Wesen des automatischen Richtverfahrens der Küstengeschütze zu geben und sodann dieses Richtverfahren vom Standpunkte der Praxis zu beurteilen.

Wie aus der Fig. 27 zu ersehen ist, kann durch das direkte Anvisieren des Zieles C, wobei von der Wirkung der Refraktion abgesehen wird, der Terrainwinkel (der refraktionsfreie Tiefenwinkel oder der wahre Tiefenwinkel) n und mithin auch die horizontale Schußdistanz $BC = x$ bestimmt werden, weil die Überhöhung der Geschützstellung über dem Meeresspiegel $AB = h$ bekannt ist. Dieser horizontalen Schußdistanz entspricht ein bestimmter relativer Abgangswinkel φ_r, also auch ein bestimmter Abgangswinkel φ, daher

Fig. 27.



auch ein bestimmter Elevationswinkel $\varepsilon = \varphi - \Delta$, der erforderlich ist, damit das Ziel getroffen werde. Der Winkel Δ bedeutet den Erhebungswinkel, auch Abgangswinkelfehler genannt.

Beim Schießen gegen die See ist es also infolge der unveränderlichen Überhöhung der Geschützstellung $AB = h$ ein bezeichnendes Merkmal, daß zu jedem Terrainwinkel nur eine Distanz, und somit auch zu jedem Terrainwinkel nur ein einziger Elevationswinkel gehört.

Die Erkenntnis dieser einfachen Beziehung führte nun zur Idee, Richtinstrument und Geschütz durch einen Mechanismus zwangläufig derart zu verbinden, daß bei jeder Lage der Visierlinie das Rohr jenen einzigen, der Visierrichtung entsprechenden Elevationswinkel mit dem Horizonte einschließt. Die Visierlinie des Aufsatzes wird bei Einhaltung dieser Beziehung gleichzeitig mit dem Rohre durch die Richtmaschine des Geschützes bewegt; sobald die Visierlinie auf das Ziel trifft, hat auch schon das Rohr die zu-

treffende Elevation. Infolgedessen entfällt, theoretisch genommen, von den durch die Tagesrelation bedingten Korrekturen vorläufig abgesehen, jede Ermittlung der Schußelemente. Das Richten geschieht durch das Spiel des Apparates selbsttätig — automatisch —, daher der Name automatischer Aufsatz. Die Bedeutung eines so einfachen Richtvorganges für die Feuerwirkung ist unverkennbar. Die Anwendung einer solchen Richtmethode verspricht die volle Ausnützung gegebener Stellungsverhältnisse und, bei glücklicher Lösung der Frage, einen großen Schießerfolg.

Dem Gesagten zufolge muß es sonach befremden, daß das automatische Richten der Küstengeschütze in Seestaaten noch nicht jene allgemeine Bedeutung und durchgreifende Einführung erlangt hat, welche dieser Richtmethode bei oberflächlicher Beurteilung zukommen.

Um hierüber ein Urteil zu fällen, soll anschließend an das gegebene Prinzip des automatischen Richtens der Küstengeschütze die praktische Durchführbarkeit dieses Richtverfahrens besprochen werden. Hierauf gestützt und basiert auf die Ergebnisse der Erprobungen der tatsächlich in verschiedenen Staaten ausgeführten Konstruktionen läßt sich ein Urteil über das Entsprechen der automatischen Aufsätze bei den verschiedenen Küstengeschützen abgeben; hieraus kann schließlich gefolgert werden, bei welchen Küstengeschützen die Einführung des automatischen Aufsatzes von Vorteil wäre.

Im allgemeinen unterscheiden sich die Mechanismen, welche angewendet werden können, dadurch wesentlich voneinander, daß die Bewegung dem Richtinstrumente entweder vom Geschützrohre selbst oder von der Richtmaschine mitgeteilt wird, und daß entweder nur der vordere oder nur der rückwärtige Visierpunkt oder irgend ein Punkt der Visierlinie zwischen diesen beiden Visierpunkten bewegt wird.

Die verschiedenen Konstruktionen, durch welche die Rohrbewegung auf die Visierlinie übertragen werden kann, sollen hier nicht näher besprochen, sondern nur die praktische Durchführbarkeit des automatischen Richtverfahrens beurteilt werden.

Bei der Beurteilung des Richtverfahrens treten zwei verschiedenartige Umstände hervor, welche zusammen auf die Leistung des automatischen Aufsatzes einwirken und die Genauigkeit der automatischen Richtung bestimmen: das Einstellen der Visur auf das Ziel (Einfluß der Zielgenauigkeit) und das gleichzeitig erfolgende Übertragen der Richtung auf das Rohr (Wirkung des Mechanismus).

Durch die Visur wird der scheinbare Tiefenwinkel α des Zieles und somit auch, wie im Punkte 26 dieses Abschnittes bewiesen wurde, die Schußdistanz x bestimmt. Wurde beim Richten auf die Wasserlinie des Zieles ein Visurfehler begangen, so sind Tiefenwinkel und Entfernung des Zieles nicht genau gemessen; infolgedessen ist auch die Elevation des Rohres nicht die zutreffende, sondern mit einem Fehler behaftet, welcher dem durch die ungenaue Visur begangenen Distanzfehler entspricht.

Durch die automatische Richtung soll die Bewegung des Geschützrohres auf die Visierlinie derart übertragen werden, daß diese unter dem refraktionsfreien Tiefenwinkel oder unter dem wahren Tiefenwinkel n geneigt ist, wenn das Rohr die Elevation $\varepsilon - n$ besitzt, wobei ε den der horizontalen Entfernung des Zieles entsprechenden Elevationswinkel bedeutet. Der Winkel n ist durch die Gleichung $n = \alpha + \frac{k}{2}\gamma = \alpha + 0{\cdot}08\,\gamma$, worin α den scheinbaren Tiefenwinkel bedeutet (siehe Punkt 26 dieses Abschnittes), bestimmt. Die Distanzformel

$$x = h\,cot\,(\alpha - 0{\cdot}42\,\gamma) = h\,cot\,(n - \frac{\gamma}{2})$$

und die Gleichung für die Ordinate h, welche der Überhöhung der Geschützstellung entspricht,

$$h = x\,tg\,(\varepsilon + \varDelta - n) - \frac{g\,x^2}{2\,V^2\,cos^2\,(\varepsilon + \varDelta - n)}\,(1 + F)$$

zeigen zur Genüge, daß die Winkelgrößen n und ε in keinem einfachen, proportionalen Verhältnisse stehen und daß infolgedessen auch die Rohrbewegung auf die Visierlinie nicht in einfacher Weise durch Hebel, Zahnrad oder Schraube allein übertragen werden kann, sondern daß in den Mechanismus eine Kurve eingeschaltet werden muß, welche eben die obige Beziehung zum Ausdrucke bringt. Von der Genauigkeit der Konstruktion dieser Kurve hängt die Genauigkeit ab, mit welcher die Rohrbewegung auf die Visierlinie übertragen werden kann.

Als wichtigste Konstruktionsbedingungen für die Kurve beziehungsweise für das Anmontieren derselben müssen gestellt werden: die Stabilität des Aufsatzes und die Empfindlichkeit der Kurve.

Die Stabilität des automatischen Aufsatzes erfordert, daß die einzelnen Teile desselben beim Schießen stets genau dasselbe Lagenverhältnis untereinander und zum Geschützrohre behalten, welche sie nach ihrer Anmontierung besaßen und daß sie hierin

auch durch die Erschütterung des Schusses nicht beeinträchtigt werden. Bei irgend einer bestimmten Rohrlage muß daher das Richtinstrument jedesmal genau in derselben Stellung einspielen, welche dieser Elevation entspricht. Beim Schwenken des Geschützes muß sich jeder Punkt in einer wagrechten Ebene bewegen (Horizontalität der Bettung beziehungsweise der Geschützunterlage).

Die Empfindlichkeit des automatischen Apparates besteht in der Beweglichkeit der Visierlinie bei der Drehung des Rohres. Diese Empfindlichkeit soll möglichst groß sein, d. h. es sollen auch die kleinsten, beim Schießen noch in Betracht kommenden Änderungen der Rohrelevation sichtliche Verschiebungen der Visierlinie bewirken. Veränderungen des Terrainwinkels für große Schußweiten, besonders bei geringer Seehöhe der Geschützstellung, sind sehr klein, welcher Umstand die Aufsatzkonstruktion erschwert.

Eine große Schwierigkeit bei der Durchführung der automatischen Richtung ist in der genauen Ausarbeitung der Kurven zu erblicken, da für jedes Geschütz, für jede Geschoßgattung und für jede Ladung eine besondere Kurve hergestellt werden muß.

Die Bestimmung der Kurven erfolgt durch Rechnung. Aber selbst bei Annahme eines tadellosen Ganges werden alle nach der Anmontierung sich ergebenden kleinen und unvermeidlichen Unvollkommenheiten im Gange des Mechanismus auf Kurve und Visierlinie übertragen und die automatische Richtung beeinträchtigen. Durch eine sorgfältige, praktische Überprüfung müssen diese Mängel beseitigt werden.

Die automatischen Aufsätze sind für die Fernrohrvisur eingerichtet; hiedurch wird die Unsicherheit im Zielen beseitigt, welche durch die Verschiedenheit des Abstandes von Visier, Korn und Ziel verursacht wird. Das Fernrohr muß rückstoßsicher am Geschütz angebracht sein, da es vor Abgabe des Schusses vom Geschütze nicht abgenommen wird, damit, sobald die Visur auf das fahrende Ziel eingestellt wird, auch sofort abgefeuert werden kann.

Für die an der Küste verwendeten Wurfgeschütze (Küstenmörser und Küstenhaubitzen) besitzt das automatische Richtverfahren keinen Wert. Gegen fahrende Ziele ist das Treffvermögen der Wurfgeschütze infolge der großen Geschoßflugzeit ein geringes, da die Richtungselemente im vorhinein für jene Ziellage, welche dem Momente des Geschoßaufschlages entsprechen, nicht so genau wie bei Flachbahnkanonen bestimmt werden können. Die Rücksichten, welche infolge der großen und zur Distanz nicht einfach proportionalen Flugzeit der Geschosse auf Schiffskurs und Fahrgeschwindigkeit genommen

werden müssen, bedingen zu bedeutende und zu sehr veränderliche Korrekturen, als daß gegen fahrende Ziele die Richtung automatisch für eine Reihe aufeinander folgender Schüsse bewirkt werden könnte.

Die Ergebnisse der bekannt gewordenen Versuche mit automatischen Aufsätzen lassen leider die Bedeutung des automatischen Richtens für die Feuerwirkung der Küstengeschütze hinter den Erwartungen zurück, weil die angeführten Konstruktionsbedingungen für derlei Präzisionsapparate nicht in dem geforderten Grade erfüllt werden können. Die Schlußfolgerungen aus den Versuchsergebnissen sind in den folgenden Punkten zusammengefaßt:

a) Der automatische Aufsatz verschlechtert die Präzision des Schießens. Dieses Ergebnis wird hervorgerufen einerseits durch Ungenauigkeiten in der Konstruktion des automatischen Aufsatzes selbst, anderseits durch die Nichteignung des Geschützes als Unterlage für ein distanzmessendes Instrument. Die erste Ursache ist wohl bis zu einem gewissen Grade behebbar, die zweite Ursache jedoch kaum, da infolge der in Betracht kommenden Massen eine derartige Präzisionsarbeit, wie sie bei einem geodätischen Instrumente möglich ist, bei einem Geschütze ausgeschlossen erscheint.

b) Der automatische Aufsatz besitzt eine komplizierte Einrichtung. Infolgedessen ist er schwer zu konservieren und zu rektifizieren und ist auch ein Unbrauchbarwerden desselben durch den Gebrauch und durch das feindliche Feuer leichter möglich wie bei den bestehenden Richtmitteln und Distanzmessern.

c) Die Bedienung des automatischen Aufsatzes erfordert ein hervorragend ausgebildetes Professionistenpersonal, welches in der Zahl, wie sie die Einführung eines solchen Aufsatzes bei sämtlichen Küstengeschützen erfordert, nicht immer leicht zu erlangen ist.

d) Eine Erhöhung der Feuerschnelligkeit wird durch die Verwendung des automatischen Aufsatzes bei Rahmengeschützen im allgemeinen nicht erzielt. Der automatische Aufsatz kann bei allen jenen Geschützen, bei welchen das Rohr zum Laden in eine Ladestellung gebracht werden muß (das sind alle Rahmengeschütze, die schweren Geschütze in Mittelpivotwiegen- und Minimalschartenlafetten), seine Richttätigkeit erst nach Beendigung des Ladens aufnehmen und dauert dieselbe, infolge der notwendigen Bestimmung der Fahrtkomponenten des Zieles umso länger, je größer die Distanz beziehungsweise je länger die Geschoßflugzeit ist. Der Distanzmesser

hingegen besorgt diese Bestimmung der Fahrtkomponenten schon während des Ladens der Geschütze.

Nur bei leichten Geschützen in Mittelpivotwiegenlafetten (Schnellfeuerkanonen) kann während des Ladens gerichtet werden und ist demnach nur hier die Möglichkeit vorhanden, daß durch Verwendung des automatischen Aufsatzes eine Steigerung der Feuerschnelligkeit erzielt wird.

e) Bei Verwendung des automatischen Aufsatzes ergibt sich eine einfache Feuerleitung und weitgehende Entlastung des Batteriekommandanten, infolge des bei diesem Aufsatze zur Anwendung gelangenden Einzelfeuers, bei welchem die Geschütze vollkommen unabhängig voneinander schießen. Hinsichtlich Verläßlichkeit und Genauigkeit der Schußbeobachtung und des Einschießens ist jedoch diese Feuerart, insbesondere auf den großen Distanzen, dem einheitlich geleiteten Feuer unterlegen.

Der vorerwähnte Vorzug der einfacheren Feuerleitung bei Anwendung des automatischen Aufsatzes wird jedoch vermindert durch Annahme eines möglichst einfachen Schießvorganges.

Bei Einführung von automatischen Aufsätzen bei Rahmen- und sonstigen schweren Geschützen müßten daher, wie aus dem Vorstehenden hervorgeht, mehr oder weniger schwerwiegende Nachteile — insbesondere der Nachteil der Verschlechterung der Präzision — mit in Kauf genommen werden, welche durch den einzigen Vorzug der einfacheren Feuerleitung nicht aufgehoben werden.

Eine Einführung der automatischen Aufsätze bei Rahmengeschützen und den schweren Geschützen überhaupt ist demnach nicht gerechtfertigt.

Nur bei wirklichen Schnellfeuerkanonen kann, wie bereits angedeutet wurde, durch Anwendung des automatischen Aufsatzes eine Erhöhung der Feuerschnelligkeit erzielt werden. Diese erscheint im Vereine mit der durch diesen Aufsatz ermöglichten einfachen Feuerleitung für gewisse Schnellfeuerbatterien, welche überraschend und auf kleinere Distanzen (zur Verhinderung des Abräumens von Minenlinien; zur Forcierung von Hafeneinfahrten, wobei die Angriffsflotte nach Beseitigung der Hindernisse, ohne Rücksicht auf das Feuer der Küstenartillerie, mit Volldampf, an den Batterien vorüber, auf die Flotte des Verteidigers losfährt u. s. w.) wirken sollen, sehr erwünscht, doch muß auch die Präzision hinreichend sein; letzteres kann mit Rücksicht auf die hier in Betracht kommenden kleinen Schußdistanzen mit großer Wahrscheinlichkeit erwartet werden.

Die **Korrektur der Höhenrichtung** ist sowohl durch die gewöhnlichen Tageseinflüsse als auch durch die wechselnde Niveauhöhe des Meeres infolge der Gezeiten bedingt. Der letztere Einfluß beträgt (siehe Punkt 25 dieses Abschnittes)

$$\Delta_h x = \frac{x}{h} \Delta h.$$

Die Distanzänderung infolge Änderung der Seehöhe ist also der Distanz proportional. Dies läßt sich jedoch keineswegs von den durch die sonstigen Tageseinflüsse hervorgerufenen Porteeänderungen behaupten; man ist nicht berechtigt, die Korrekturen der Höhenrichtung proportional zur Distanz durchzuführen. Die Behauptung: „Sobald die Korrektur der Tagesrelation am automatischen Aufsatz nach den ersten Schüssen bewirkt ist, trägt das Geschütz alle Bedingungen der Treffähigkeit in sich und besitzt eine Präzision, welche nur durch die Streuung des Geschützes und durch den Visurfehler des Richtenden beeinflußt wird" ist unrichtig, denn der gesetzmäßige Einfluß der Tagesrelation auf die Höhenrichtung im ganzen Schußbereiche ist völlig unbekannt. Die Forderung, daß die auf einer Distanz am automatischen Aufsatze ausgeführte Korrektur der Höhenrichtung auch auf allen anderen Distanzen beim Verfolgen des Zieles die zutreffenden Korrekturen automatisch bewirkt, ist, wie schon gesagt wurde, unmöglich zu erfüllen, infolgedessen muß die Präzision des Schießens verschlechtert werden.

Dieselben Erwägungen können bezüglich der **Korrektur der Seitenrichtung** auf automatischem Wege gemacht werden.

28. Wahrscheinlichkeit für das Treffen eines in Ruhe befindlichen Zieles (Kriegsschiffes), wenn die Entfernung desselben mit einem Distanzmesser gemessen wurde.

Die Wahrscheinlichkeit, den in der Entfernung x befindlichen unendlich schmalen Zielstreifen mit einem Schusse zu treffen, oder die Wahrscheinlichkeit, daß der Treffpunkt ins Intervall $(x, x + dx)$ fällt, ist ausgedrückt durch

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx.$$

Darin bedeutet h das Maß der Präzision, welche in bekannter Weise durch die wahrscheinliche Abweichung (oder durch die 50-prozentige Streuung) ausgedrückt wird. Wenn r diese Abweichung und ϱ den zugehörigen Zahlenfaktor 0·4769 bedeuten, ist $h = \frac{\varrho}{r}$.

Das Ziel, in welchem der einfallende Schuß als Treffer angesehen werden kann, ist im allgemeinen eine horizontale oder vertikale Fläche (oder wie bei Schiffen aus beiden Flächen zusammengesetzt) von einer bestimmten Ausdehnung. Sei die in der Schußrichtung gemessene Zieldimension $2\,l$, so ist die Wahrscheinlichkeit, dieses Ziel zu treffen,

$$P = \frac{2\,\varrho}{r\sqrt{\pi}} \int_0^l e^{-\frac{\varrho^2 x^2}{r^2}}\, d\,x,$$

sobald beabsichtigt ist, das Ziel in der Längenmitte zu treffen.

Die hierin enthaltene wahrscheinliche Abweichung r entspricht der Präzision des Geschützes an sich, wobei vorauszusetzen ist, daß x die wirkliche, genaue Zieldistanz ist.

Im vorliegenden Falle ist jedoch x niemals ganz genau bekannt, sondern noch mit einem Fehler behaftet, welcher von dem Instrumente herrührt, mit welchem die Entfernung gemessen wurde. Es ist also einleuchtend, daß die Wahrscheinlichkeit, das Ziel zu treffen, geringer sein wird, wenn die Distanz x nicht genau bekannt ist; sie liegt selbst schon innerhalb gewisser Wahrscheinlichkeitsgrenzen, deren Ausdehnung von der Streuung der Distanzmessung abhängt.

Diese Streuung kann im gegebenen Falle am einfachsten berücksichtigt werden, indem die Streuung des Distanzmessers mit der Streuung des Geschützes zu einer aus beiden sich ergebenden wahrscheinlichen Abweichung verbunden wird, welche mit R bezeichnet werden soll. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, das Ziel zu treffen, gegeben durch

$$P = \frac{2\,\varrho}{R\sqrt{\pi}} \int_0^l e^{-\left(\frac{\varrho x}{R}\right)^2}\, d\,x.$$

Wenn die wahrscheinliche Abweichung, welche dem Distanzmesser allein eigen ist, mit r_d bezeichnet wird, so handelt es sich darum, den resultierenden Einfluß der beiden störenden Ursachen — Geschütz und Distanzmesser — auf die einzelnen Ursachen selbst zurückzuführen.

Diesbezüglich folgt nach dem Gesetze von Didion, daß $R^2 = r^2 + r_d$, daher $R = \sqrt{r^2 + r_d^2}$ ist; hiemit folgt

$$P = \frac{2\,\varrho}{\sqrt{\pi}\,(r^2 + r_d^2)} \int_0^l e^{-\frac{\varrho^2 x^2}{r^2 + r_d^2}}\, d\,x.$$

Um diese Formel auf Grund der zu Gebote stehenden Daten verwerten zu können, muß sie noch so transformiert werden, daß statt der wahrscheinlichen Abweichungen die 50-prozentigen Streuungen vorkommen. Nachdem nun

$$s_{50} = 2\,r, \quad \sigma_{50} = 2\,r_d \quad \text{und} \quad S_{50} = 2\,R$$

ist, und da man es bei den Distanzmessungen nur mit Längenstreuungen zu tun hat, so darf man auch beim Geschütz nur Längenstreuungen in Rechnung stellen, so daß $s_{50} = l_{50}$ und $S_{50} = L_{50} = 2\sqrt{r^2 + r_d^2}$ zu setzen ist; damit erhält man

$$P = \frac{4\,\varrho}{L_{50}\sqrt{\pi}} \int_0^l e^{-\frac{4\varrho^2 x^2}{L_{50}^2}}\,d\,x.$$

Zur Vereinfachung wird gesetzt:

$$\frac{4\,\varrho^2 x^2}{L_{50}^2} = t^2; \quad \text{es wird dann} \quad d\,x = \frac{L_{50}}{2\,\varrho}\,d\,t;$$

statt der früheren Integrationsgrenzen 0 und l ergeben sich die Integrationsgrenzen 0 und $\frac{2\,\varrho\,l}{L_{50}}$; dann ist

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{2\varrho l}{L_{50}}} e^{-t^2}\,d\,t.$$

Wird endlich noch die Zieldimension $2\,l = z$ und der Quotient $\frac{z}{L_{50}} = k$ gesetzt, so gibt schließlich die Formel

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho k} e^{-t^2}\,d\,t$$

jene Werte an, welche in den Schießtafeln als Funktion von k in der Tabelle der Wahrscheinlichkeitsfaktoren enthalten sind.

Diese Tabelle ist, wie bekannt, ganz unabhängig von der Streuung; sie gibt für einen bestimmten Wert von k die Anzahl der zu erwartenden Treffer in Prozenten, oder für eine bestimmte Anzahl von Treffern den Wert $k = \frac{z}{L_{50}}$ an, woraus dann wieder die Zieldimension oder die 50-prozentige Streuung bestimmt werden kann.

Am wichtigsten ist also die Kenntnis der Größe k und hiezu ist bei gegebener Zieldimension die Kenntnis der Streuungsgröße L_{50} nötig.

Letztere Größe bedeutet im betrachteten Falle die aus der Geschütz- und Distanzmesserstreuung resultierende Streuung und muß im Versuchswege bestimmt werden.

Die Streuung der Geschütze ist in den Schießtafeln enthalten; die Streuung des Distanzmessers kann bei gegebener Höhe des Distanzmessers über dem Meeresspiegel gerechnet werden. Bezeichnet man letztere mit λ_{50} und setzt $\frac{\lambda_{50}}{l_{50}} = \varkappa$, so wird

$$L_{50} = \sqrt{l_{50}^2 + \lambda_{50}^2} = l_{50}\sqrt{1 + \varkappa^2}.$$

Alle vorher gemachten Erwägungen haben hauptsächlich nur für den ersten Schuß ihre volle Geltung; für die folgenden, mit gleichen Elementen abgegebenen Schüsse ist die Gruppierung (das Trefferbild) von der Präzision des Geschützes allein abhängig und der Unterschied zwischen der gemessenen und der wahrscheinlichsten Zieldistanz ergibt sich als die Abweichung des mittleren Treffpunktes von dem beabsichtigten Treffpunkte.

Die wahrscheinlichste Größe der Zielentfernung soll man aber bereits nach dem ersten Schusse kennen. Man bestimmt daher die Entfernung des Aufschlages des ersten Schusses entweder abermals durch Messung mit dem Distanzmesser oder durch Schätzung der Abweichung des Aufschlages vom Ziele, wenn dafür genügende Anhaltspunkte gegeben sind.

Bei dieser Messung (oder Schätzung) macht sich aber wieder der dem Instrumente (Auge) anhaftende Fehler geltend; infolgedessen gipfelt die jetzt zu lösende Aufgabe in der Beantwortung der Frage:

Welches ist die wahrscheinlichste Zielentfernung x, wenn beim Schusse mit einer der gemessenen Entfernung a entsprechenden Höhenrichtung, z. B. ein Kurzschuß erhalten wird, dessen gemessene Abweichung vom beabsichtigten Treffpunkte das Maß l beträgt?

Die Lösung dieser Aufgabe erfolgt an anderer Stelle, da hiezu einige theoretische Untersuchungen nötig sind, welche hier noch nicht durchgeführt werden können.

Benützte Quellen.

Die Theorie der Wahrscheinlichkeit und ihre Anwendung im Gebiete des Schießwesens. Gemeinfaßlich behandelt von Nikolaus Wuich, Hauptmann im Artilleriestabe. Wien 1877.

Lehrbuch der äußeren Ballistik, verfaßt von Nikolaus Wuich, Hauptmann des Artilleriestabes. Wien 1882.

15 gemeinverständliche Vorträge über die Wirkungsfähigkeit der Geschütze von Nikolaus R. v. Wuich, k. u. k. Oberstleutnant. Wien 1891.

Methode der kleinsten Quadrate und deren Anwendung auf das Schießen von N. Mayevski (russisch). St. Petersburg 1881.

Lehrbuch der Physik von Chwolson, aus dem Russischen übersetzt von Pflaum. 1. Band. Braunschweig 1902.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung, ihre Anwendung auf das Schießen und auf die Theorie des Einschießens von N. Sabudski, kais. russischer Generalmajor; aus dem Russischen übersetzt von Ritter von Eberhard, Leutnant im Bergischen Feldartillerie-Regiment Nr. 59. Stuttgart 1906.

Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens, und zwar:

XXVIII. Jahrgang. 1897. Indra, Das Schießen aus Küsten- und Schiffsgeschützen; Ludwig, Über automatisches Richten der Küstengeschütze.

XXXII. Jahrgang. 1901. Ludwig, Schießen aus Küstengeschützen.

XXXIV. Jahrgang. 1903. Koss, Ergebnisse von Kimmtiefenbeobachtungen, angewendet auf das Distanzmessen.

XXXVI. Jahrgang. 1905. Gemeiner, Das Richten mit Zielfernrohr im Vergleiche zu jenem mit Visier und Korn. — Gemeiner, Visiervorrichtung (Kollimateur) von Grubb.

VII. Abschnitt.

Empirische Fehlergesetze.

1. Allgemeine Bemerkung.

Für die Lösung von Aufgaben auf dem Gebiete der Schießtheorie ist das bisher in Betracht gezogene, aus theoretischen Erwägungen gefolgerte Gaußsche Fehlergesetz in manchen Fällen unbequem, weil es häufig auf unlösbare Integrale führt. Es liegt sonach die Idee nahe, das theoretische Fehlergesetz durch einfacher konstruierte, sogenannte empirische Fehlergesetze zu ersetzen, welche sich jedoch möglichst an das erstere anschmiegen müssen.

Bei der Bestimmung der Gaußschen Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktion wird die Annahme gemacht, daß die Fehlergrenzen die denkbar weitesten seien, nämlich $-\infty$ und $+\infty$. Die Praxis steht dieser Annahme entgegen; es wurden deshalb auch solche Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktionen näher untersucht, welche graphisch dargestellt, nicht asymptotisch verlaufen, sondern die Achse der Fehler in endlicher Entfernung berühren oder sie schneiden.

In den nachfolgenden Untersuchungen werden zunächst einige praktisch brauchbare empirische Fehlergesetze eingehender behandelt, sodann noch drei empirische Fehlergesetze nur des historischen Interesses erwähnt.

Bei der Bearbeitung der empirischen Gesetze wurde vornehmlich das Werk von Wuich „Die Theorie der Wahrscheinlichkeit und ihre Anwendung im Gebiete des Schießwesens", Wien 1877, benützt; überdies wurden aber noch folgende Werke zu Rate gezogen: „Handbuch der Vermessungskunde" von Jordan, 1. Band der 3. und 4. Auflage, Stuttgart 1888 beziehungsweise 1895, „Die Theorie der Beobachtungsfehler" von E. Czuber, Leipzig 1891, endlich „Die Entwicklung der Wahr-

scheinlichkeitstheorie und ihre Anwendungen", gleichfalls von E. Czuber, Leipzig 1899.

In mehrfacher Richtung dürfte die in den zwei Punkten 12 und 13 dieses Abschnittes bearbeitete Materie von Interesse sein. Die Lösungen der in diesem Teile behandelten Aufgaben basieren auf dem Probleme von Moivre, daher dasselbe als Punkt 11 aufgenommen werden mußte. Bei der Bearbeitung dieses Teiles wurde das zuerst angeführte Werk von Czuber benützt, ferner noch die „Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung" von Norbert Herz, Leipzig 1900 und die in den „Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens", Wien 1901 und 1902 vom k. u. k. Oberstleutnant Benedikt Schöffler erschienenen Aufsätze über das „Gesetz der zufälligen Abweichungen". Diesen Aufsätzen, welche auch die Aufstellung von empirischen Gesetzen auf Grund von Elementarursachen behandeln, sind mehrfache Tabellen entnommen. Schöffler löste die hier behandelten Aufgaben in anderer Art, nämlich ohne Zuziehung des Problems von Moivre.

2. Das Fehlergesetz von Simpson.

a) Aufstellung der Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktion.

Die erste Idee eines Fehlergesetzes findet sich 1756 bei Simpson vor. Mit diesem Namen und Zeitpunkte beginnt auch die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf die Untersuchung der Beobachtungsfehler. Simpson stellt das Gesetz der Fehlerwahrscheinlichkeit geometrisch durch die Schenkel eines gleichschenkligen Dreieckes dar und trägt damit den beiden von ihm zum ersten Male ausgesprochenen Thesen: 1. daß positive und negative Fehler gleich wahrscheinlich seien und 2. daß es gewisse Grenzen gebe, innerhalb welcher alle Fehler eingeschlossen sind, in einfachster Weise Rechnung.

Die zwei Geraden, in welchen die Schenkel des erwähnten Dreieckes liegen, können durch die Gleichung

$$y = \mp \frac{\beta}{\alpha} x + \beta \tag{1}$$

dargestellt werden, worin α und β die Abschnitte auf den Achsen der x und y bedeuten (Fig. 28). Hiezu ist zu bemerken, daß das obere (untere) Vorzeichen für positive (negative) Fehler x gilt. Mit Hilfe der Fourierschen Reihen könnte wohl die Gleichung der gebrochenen Strecke $R'QR$ aufgestellt werden, wodurch man die

Gleichung des Fehlergesetzes erhielte, doch soll hier hievon Abstand genommen und die Untersuchung mit Hilfe der Gleichung 1) geführt werden.

b) Bestimmung des Parameters β durch α.

Der Parameter β kann durch jenen α ersetzt werden, der die größte zufällige Abweichung darstellt. Da nämlich zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$ alle Fehler enthalten sind, muß die zwischen der Fehlerwahrscheinlichkeitskurve und der Abszissenachse gelegene Fläche gleich 1, also $\alpha\beta = 1$ sein; hieraus ergibt sich

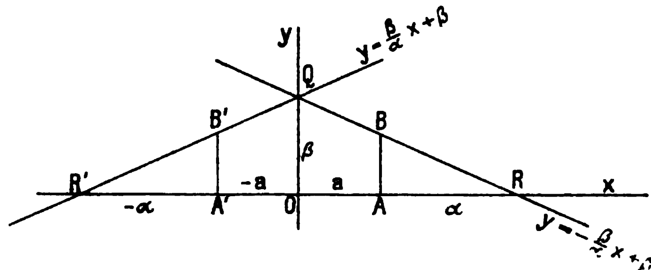
$$2)\qquad \beta = \frac{1}{\alpha},$$

womit die Gleichung 1) in

$$3)\qquad y = \frac{\alpha \mp x}{\alpha^2}, \quad |x| \leq \alpha$$

übergeht.

Fig. 28.



c) Wahrscheinlichkeit, daß der bei einer Beobachtung begangene Fehler, absolut genommen, kleiner ist als eine gegebene Größe a.

Für die Wahrscheinlichkeit, daß die bei einem Schusse erhaltene zufällige Abweichung kleiner als a ist, oder die Wahrscheinlichkeit mit einem Schusse den symmetrischen Zielstreifen von der Breite $2a$ zu treffen, erhält man:

$$4)\qquad P = 2\int_0^a \frac{\alpha - x}{\alpha^2}\,dx = \frac{2}{\alpha^2}\left\{\alpha x - \frac{x^2}{2}\right\}_0^a = \frac{a}{\alpha}\left(2 - \frac{a}{\alpha}\right) = 2\frac{a}{\alpha} - \left(\frac{a}{\alpha}\right)^2;$$

der Wahrscheinlichkeitswert P erscheint als Funktion des Verhältnisses der Fehlergröße a zum Maximalfehler α.

d) Bestimmung des 50-prozentigen oder wahrscheinlichen Fehlers a_{50}.

In ähnlicher Weise, wie bei Anwendung des theoretischen Fehlergesetzes das Maß der Präzision h zweckmäßiger Weise durch andere Präzisionswerte vertreten wurde, kann man auch hier α durch irgend eine, allgemein durch die $\mathfrak{p}$-prozentige Fehlergrenze $a_{\mathfrak{p}}$ oder durch einen Durchschnittsfehler ersetzen. Hier sollen die Beziehungen zwischen α und den Präzisionswerten a_{50}, ϑ und μ aufgesucht und ferner auch untersucht werden, inwieweit die mit den empirischen Fehlergesetzen erhaltenen Resultate sich jenen anschmiegen, die dem theoretischen Fehlergesetze entsprechen.*) (Siehe Punkt 5 dieses Abschnittes.)

Wird in die Formel 4) $P = 0{\cdot}0\,\mathfrak{p}$ gesetzt, so ergibt sich die Beziehung zwischen der $\mathfrak{p}$-prozentigen und der größten Abweichung; für die Annahme $P = \frac{1}{2}$ geht α in a_{50} über und es folgt:

$$\frac{1}{2} = 2\,\frac{a_{50}}{\alpha} - \left(\frac{a_{50}}{\alpha}\right)^2 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{a_{50}}{\alpha}\right)^2 - 2\,\frac{a_{50}}{\alpha} + \frac{1}{2} = 0.$$

Durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung ergibt sich

$$\frac{a_{50}}{\alpha} = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}};$$

da $a_{50} < \alpha$ sein muß, so hat nur das untere Vorzeichen einen Sinn und es ist

5) $$\frac{a_{50}}{\alpha} = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}} = 1 - 0{\cdot}7071 = 0{\cdot}2929, \quad a_{50} = 0{\cdot}2929\,\alpha$$

beziehungsweise

$$\frac{\alpha}{a_{50}} = 3{\cdot}4142, \quad \alpha = 3{\cdot}4142\,a_{50}.$$

Die Gleichung 4) kann man auch in folgender Form schreiben:

$$P = \frac{a}{a_{50}} \cdot \frac{a_{50}}{\alpha}\left(2 - \frac{a}{a_{50}} \cdot \frac{a_{50}}{\alpha}\right).$$

Führt man hierin für $\frac{a_{50}}{\alpha}$ den in 5) gefundenen Wert ein und setzt $\frac{a}{a_{50}} = k =$ relative Zieldimension, so resultiert

6) $$P = 0{\cdot}2929\,k\,(2 - 0{\cdot}2929\,k).$$

*) Siehe zum Vergleiche die Punkte 1, 3 und 5 des III. Abschnittes im I. Bande, ferner die Punkte 3, 4 nd 5 des VI. Abschnittes im II. Bande.

e) Bestimmung des Durchschnittsfehlers ϑ.

Der Durchschnittsfehler ϑ ist gegeben durch:

$$\vartheta = 2\int_0^\alpha x \cdot \frac{\alpha - x}{\alpha^2}\, dx = \frac{2}{\alpha^2}\left\{\alpha \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right\}_0^\alpha = \frac{1}{3}\alpha;$$

7) $$\vartheta = \frac{1}{3}\alpha, \quad \alpha = 3\vartheta.$$

f) Bestimmung des mittleren Fehlers μ.

Für das Quadrat des mittleren Fehlers μ hat man:

$$\mu^2 = 2\int_0^\alpha x^2 \cdot \frac{\alpha - x}{\alpha^2}\, dx = \frac{2}{\alpha^2}\left\{\alpha \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right\}_0^\alpha = \frac{1}{6}\alpha^2.$$

8) $$\mu = \frac{\alpha}{\sqrt{6}} = 0{\cdot}40825\,\alpha, \quad \alpha = 2{\cdot}4495\,\mu.$$

3. Ein aus dem Gaußschen Fehlergesetz abgeleitetes empirisches Fehlergesetz.

a) Aufstellung der Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktion.

Ein anderes empirisches Fehlergesetz ergibt sich aus $y = c e^{-h^2 x^2}$, wenn die beiden ersten Glieder der Reihenentwicklung von $e^{-h^2 x^2}$ beibehalten werden; man erhält hienach

$$y = c\,(1 - h^2 x);$$

wird hierin noch $h^2 = \frac{1}{\alpha^2}$ gesetzt, so folgt

1) $$y = c\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right).$$

Bei diesem Gesetze, welches geometrisch durch eine Parabel repräsentiert wird, entspricht dem maximalen Beobachtungsfehler der endliche Wert α, denn y wird Null für $x = \alpha$. Die Parabelachse fällt mit der y-Achse zusammen.

b) Bestimmung des Parameters c durch α.

Da zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$ alle Fehler enthalten sind, muß die zwischen der Fehlerwahrscheinlichkeitskurve und der Abszissenachse gelegene Fläche gleich 1 sein, also

$$2\int_0^\alpha c\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right) dx = 2\,c\int_0^\alpha \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right) dx = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{4}{3}\alpha c = 1,$$

daraus

2) $$c = \frac{3}{4\,\alpha}.$$

Wird dieser Wert für c in die Gleichung 1) eingeführt, so erhält das Fehlergesetz die Form

3) $$y = \frac{3}{4\,\alpha}\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right), \quad |x| \leq \alpha.$$

c) **Wahrscheinlichkeit, daß der bei einer Beobachtung begangene Fehler, absolut genommen, kleiner ist als eine gegebene Größe a.**

Zur Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeit dient die Gleichung

4) $$P = 2 \cdot \frac{3}{4\,\alpha} \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right) d\,x = \frac{3}{2\,\alpha}\left(a - \frac{a^3}{3\,\alpha^2}\right) = \frac{3}{2}\left\{\frac{a}{\alpha} - \frac{1}{3}\left(\frac{a}{\alpha}\right)^3\right\}.$$

Die Größe P erscheint in 4) ebenso wie beim Simpsonschen Fehlergesetz als Funktion des Verhältnisses der gegebenen Fehlergröße a zur oberen Fehlergrenze α.

d) **Bestimmung des 50-prozentigen oder wahrscheinlichen Fehlers a_{50}.**

Zur Bestimmung der 50-prozentigen Fehlergrenze a_{50}, d. h. des wahrscheinlichen Fehlers, setze man in 4) $P = \frac{1}{2}$, womit zur Bestimmung von a_{50} die Gleichung

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\left\{\frac{a_{50}}{\alpha} - \frac{1}{3}\left(\frac{a_{50}}{\alpha}\right)^3\right\} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{a_{50}}{\alpha}\right)^3 - 3\,\frac{a_{50}}{\alpha} + 1 = 0$$

resultiert, aus welcher als einzig zulässiger Wert

$$\frac{a_{50}}{\alpha} = 0{\cdot}34730, \quad a_{50} = 0{\cdot}34730\,\alpha$$

folgt, indem die absoluten Werte der beiden anderen Wurzeln größer als 1 sind. Hiemit findet man

$$\frac{\alpha}{a_{50}} = 2{\cdot}87944, \quad \alpha = 2{\cdot}87944\,a_{50}.$$

Die Gleichung 4) kann man auch in der Form

$$P = \frac{3}{2}\left\{\frac{a}{a_{50}}\,\frac{a_{50}}{\alpha} - \frac{1}{3}\left(\frac{a}{a_{50}}\,\frac{a_{50}}{\alpha}\right)^3\right\}$$

schreiben. Führt man hierin für $\frac{a_{50}}{\alpha}$ den in 5) gefundenen Wert ein und setzt $\frac{\alpha}{a_{50}} = k =$ relative Zieldimension, so ergibt sich

6) $$P = \frac{3}{2}\left(0{\cdot}34730\,k - \frac{1}{3}\cdot 0{\cdot}34730^3\,k^3\right).$$

e) Bestimmung des Durchschnittsfehlers ϑ.

Zur Bestimmung des Durchschnittsfehlers ϑ dient die Gleichung

$$\vartheta = \frac{3}{2\,\alpha}\int_0^\alpha x\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right)dx = \frac{3}{8}\,\alpha;$$

es ist also

7) $$\vartheta = \frac{3}{8}\,\alpha, \quad \alpha = \frac{8}{3}\,\vartheta.$$

f) Bestimmung des mittleren Fehlers μ.

Das Quadrat des mittleren Fehlers μ ist bestimmt durch

$$\mu^2 = \frac{3}{2\,\alpha}\int_0^\alpha x^2\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right)dx = \frac{1}{5}\alpha^2.$$

8) $$\mu = \frac{\alpha}{\sqrt{5}} = 0{\cdot}4472\,\alpha, \quad \alpha = 2{\cdot}2361\,\mu.$$

4. Beurteilung der Brauchbarkeit des Simpsonschen und des parabolischen Fehlergesetzes.

Für die obere Fehlergrenze, den Maximalfehler α, wurde gefunden unter Zugrundelegung des

Simpsonschen Gesetzes	parabolischen Gesetzes
$\alpha = 3{\cdot}4142\,a_{50}$,	$\alpha = 2{\cdot}87944\,a_{50}$,
$\alpha = 3\,\vartheta$,	$\alpha = \frac{8}{3}\,\vartheta$,
$\alpha = 2{\cdot}4495\,\mu$,	$\alpha = 2{\cdot}2361\,\mu$.

Diese Beziehungen zwischen der oberen Fehlergrenze α und den Präzisionswerten a_{50}, namentlich aber ϑ und μ weichen, wie ersichtlich, nicht sehr erheblich von jenen ab, die unter Zugrundelegung des Gaußschen Fehlergesetzes gefunden wurden (siehe Seite 64 des ersten Bandes). Klarer wird jedoch die Brauchbarkeit der beiden empirischen Fehlergesetze und ihre Anlehnung an das Gaußsche

Fehlergesetz demonstriert, wenn man das Verhältnis $a_{50} : \vartheta : \mu$ nach den empirischen Gesetzen rechnet und mit dem aus dem Gaußschen Gesetze hervorgehenden Verhältnisse vergleicht.

Es ist nach Simpsons Gesetz

$$a_{50} : \vartheta : \mu = 1 : 1{\cdot}138 : 1{\cdot}393;$$

nach dem parabolischen Gesetze

$$a_{50} : \vartheta : \mu = 1 : 1{\cdot}071 : 1{\cdot}288;$$

dem Gaußschen Gesetze zufolge soll aber sein

$$a_{50} : \vartheta : \mu = 1 : 1{\cdot}183 : 1{\cdot}253.$$

Man kann auch Tabellen aufstellen, die für die Argumente $\frac{a}{a_{50}}$, $\frac{a}{\vartheta}$ und $\frac{a}{\mu}$ die Funktionswerte P geben. Lehnen sich diese Tabellen mit einer für die Praxis hinreichenden Genauigkeit an die bezüglichen drei Tabellen, welche sich auf das Gaußsche Fehlergesetz basieren, so kann man dann die empirischen Fehlergesetze als praktisch brauchbar erklären.

5. Wahrscheinlichkeit, daß der bei einer Beobachtung begangene Fehler, absolut genommen, kleiner ist als eine gegebene Größe a, ausgedrückt als Funktion von $\frac{a}{\vartheta}$.

Führt man in die gefundenen Gleichungen

$$P = 2\frac{a}{\alpha} - \left(\frac{a}{\alpha}\right)^2, \quad P = \frac{3}{2}\left\{\frac{a}{\alpha} - \frac{1}{3}\left(\frac{a}{\alpha}\right)^3\right\}$$

die Werte für α, nämlich $\alpha = 3\vartheta$ beziehungsweise $\alpha = \frac{8}{3}\vartheta$ ein, so resultiert

$$P = \frac{2}{3}\frac{a}{\vartheta} - \frac{1}{9}\left(\frac{a}{\vartheta}\right)^2 \quad \text{beziehungsweise} \quad P = \frac{9}{16}\frac{a}{\vartheta} - \frac{27}{1024}\left(\frac{a}{\vartheta}\right)^3,$$

d. h. P als Funktion des Verhältnisses $\frac{a}{\vartheta}$. In ähnlicher Weise kann P als Funktion der Verhältnisse $\frac{a}{a_{50}}$, $\frac{a}{\mu}$ u. s. w. gefunden werden.

Um die Brauchbarkeit der empirischen Fehlergesetze darzutun, wurde die nachfolgende Tabelle zusammengestellt, welche für um 0·1 wachsende Argumentenwerte $\frac{a}{\vartheta}$ die Funktionswerte P sowohl für das Gaußsche Fehlergesetz als auch für die beiden empirischen Fehlergesetze enthält.

$\frac{a}{\vartheta}$	$\Phi\left(0{\cdot}564\,19\frac{a}{\vartheta}\right)$ (Gaußsches Gesetz)	$\frac{2}{3}\frac{a}{\vartheta}-\frac{1}{9}\left(\frac{a}{\vartheta}\right)^2$	$\frac{9}{16}\frac{a}{\vartheta}-\frac{27}{1024}\left(\frac{a}{\vartheta}\right)^3$	Unterschied zwischen $\Phi\left(0{\cdot}564\,19\frac{a}{\vartheta}\right)$ und $\frac{2}{3}\frac{a}{\vartheta}-\frac{1}{9}\left(\frac{a}{\vartheta}\right)^2$	Unterschied zwischen $\Phi\left(0{\cdot}564\,19\frac{a}{\vartheta}\right)$ und $\frac{9}{16}\frac{a}{\vartheta}-\frac{27}{1024}\left(\frac{a}{\vartheta}\right)^3$
0·1	0·063 59	0·065 56	0·056 22	— 0·001 97	0·007 37
0·2	0·126 78	0·128 89	0·112 29	— 0·002 11	0·014 49
0·3	0·189 17	0·190 00	0·168 04	— 0·000 83	0·021 13
0·4	0·250 38	0·248 89	0·223 31	0·001 49	0·027 07
0·5	0·310 06	0·305 56	0·277 95	0·004 50	0·032 11
0·6	0·367 86	0·360 00	0·331 80	0·007 86	0·036 06
0·7	0·423 50	0·412 23	0·384 71	0·011 27	0·038 79
0·8	0·476 72	0·462 23	0·436 50	0·014 49	0·040 22
0·9	0·527 29	0·510 00	0·487 03	0·017 29	0·040 26
1·0	0·575 06	0·555 56	0·536 13	0·019 50	0·038 93
1·1	0·619 88	0·598 89	0·583 65	0·020 99	0·036 23
1·2	0·661 46	0·640 01	0·629 43	0·021 45	0·032 03
1·3	0·700 37	0·678 90	0·673 32	0·021 47	0·027 05
1·4	0·736 02	0·715 56	0·715 14	0·020 46	0·020 88
1·5	0·768 62	0·750 01	0·754 75	0·018 61	0·013 87
1·6	0·798 25	0·782 23	0·791 99	0·016 00	0·006 26
1·7	0·825 02	0·812 23	0·826 69	0·012 79	— 0·001 67
1·8	0·849 04	0·840 01	0·858 71	0·009 03	— 0·009 67
1·9	0·870 47	0·865 57	0·887 88	0·004 90	— 0·017 41
2·0	0·889 45	0·888 90	0·914 04	0·000 55	— 0·024 59
2·1	0·906 17	0·910 01	0·937 04	— 0·003 84	— 0·030 87
2·2	0·920 79	0·928 90	0·956 71	— 0·008 11	— 0·035 92
2·3	0·933 51	0·945 57	0·972 91	— 0·012 06	— 0·039 40
2·4	0·944 49	0·960 01	0·985 46	— 0·015 52	— 0·040 97
2·5	0·953 95	0·972 24	0·994 22	— 0·018 29	— 0·040 27
2·6	0·961 96	0·982 24	0·999 02	— 0·020 28	— 0·037 06
2·7	0·968 78	0·990 02	0·999 71	— 0·021 24	— 0·030 93
2·8	0·974 43	0·995 57		— 0·021 14	
2·9	0·979 32	0·998 91		— 0·019 59	
3·0	0·983 31	1·000 00		— 0·016 69	

Diese Tabelle zeigt, daß sich insbesondere die dem Fehlergesetze von Simpson entsprechenden Wahrscheinlichkeitswerte P mit einer für die Praxis hinreichenden Genauigkeit an jene anschließen, welche dem theoretischen Fehlergesetze entsprechen, woraus man die Berechtigung ableitet, von den beiden empirischen Fehlergesetzen namentlich dann Gebrauch zu machen, wenn die Anwendung des Gaußschen Fehlergesetzes oder des Exponentialgesetzes zu keiner endlichen Lösung führt.

6. Fehlerwahrscheinlichkeitskurven mit Berührungsanschluß.

Nachstehend sollen Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktionen ermittelt werden, welche, graphisch dargestellt, zunächst im Scheitel ähnlich wie die Parabel ansetzen, dann aber links und rechts in (endlichen) Abständen α des Maximalfehlers symmetrisch die Fehlerachse nach irgend einer Ordnung berühren. Der Kürze wegen sollen mit Jordan solche Fehlerwahrscheinlichkeitskurven als Fehlerwahrscheinlichkeitskurven mit Berührungsanschluß bezeichnet werden.

Zu diesem Zwecke setze man

$$1)\qquad \varphi(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \cdots\cdots = y.$$

Weil $\varphi(-x) = \varphi(x)$ sein muß, ist naturgemäß $\varphi(x)$ eine gerade Funktion von x. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler im Intervall $(x, x + dx)$ liegt, ist bekanntlich durch $\varphi(x)\,dx$ ausgedrückt und die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler im Intervall $(-\alpha, \alpha)$ gelegen sei, wobei α wieder den Maximalfehler bedeutet, führt zur Bedingung

$$2)\qquad \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(x)\,dx = 2\int_{0}^{\alpha} \varphi(x)\,dx = 1.$$

Die durch 1) dargestellte Kurve soll nicht, wie die Gaußsche Fehlerfunktion zur Fehlerachse asymptotisch verlaufen, sondern sie soll diese Achse in den Punkten mit den Abszissen $-\alpha$ und α berühren.

7. Fehlerwahrscheinlichkeitskurve, welche die Fehlerachse nach der ersten Ordnung berührt.

a) Bestimmung der Parameter a_0, a_2, a_4 und Aufstellung der Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktion.

Zur Bestimmung der Parameter $a_0, a_2, a_4, \ldots\ldots$ der Funktion $\varphi(x)$ sind folgende Bedingungen vorhanden:

Erstens: Für $x=\alpha$ muß $y=0$ sein; dies gibt

1) $$a_0+a_2\alpha^2+a_4\alpha^4+\cdots\cdots=0.$$

Zweitens: Soll die Fehlerwahrscheinlichkeitskurve die Fehlerachse nach der 1. Ordnung berühren, so muß der erste Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ für $x=\alpha$ verschwinden; dies gibt, weil

$$\frac{dy}{dx}=2a_2x+4a_4x^3+\cdots\cdots$$

ist,

2) $$a_2\alpha+2a_4\alpha^3+\cdots\cdots=0.$$

Drittens: Zufolge 2) und 1) des Punktes 6 dieses Abschnittes muß

$$2\int_0^\alpha y\,dx=2\left\{a_0x+a_2\frac{x^3}{3}+a_4\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\right\}_0^\alpha=1$$

oder

3) $$2\int_0^\alpha y\,dx=2a_0\alpha+\frac{2}{3}a_2\alpha^3+\frac{2}{5}a_4\alpha^5+\cdots\cdots=1$$

sein. Mittels der drei Bedingungsgleichungen 1), 2) und 3) kann man nur drei Parameter bestimmen. Aus diesem Grunde nehme man für die Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktion die Form

$$y=a_0+a_2x^2+a_4x^4$$

an und hat dann zur Bestimmung der Parameter a_0, a_2, a_4 die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} a_0+a_2\alpha^2+a_4\alpha^4&=0,\\ a_2\alpha+2a_4\alpha^3&=0,\\ 2a_0\alpha+\frac{2}{3}a_2\alpha^3+\frac{2}{5}a_4\alpha^5&=1;\end{aligned}$$

aus denselben findet man

4) $$a_0=\frac{15}{16}\frac{1}{\alpha},\quad a_2=-\frac{15}{8}\frac{1}{\alpha^3},\quad a_4=\frac{15}{16}\frac{1}{\alpha^5}.$$

Hiemit ergibt sich für die Fehlerwahrscheinlichkeitskurve die Gleichung

$$y=\frac{15}{16}\frac{1}{\alpha}-\frac{15}{8}\frac{x^2}{\alpha^3}+\frac{15}{16}\frac{x^4}{\alpha^5}$$

oder

5) $$y=\frac{15}{16}\frac{1}{\alpha}\left\{1-2\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{x}{\alpha}\right)^4\right\}=\frac{15}{16}\frac{1}{\alpha}\left\{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2\right\}^2,\quad |x|\leq\alpha.$$

b) Wahrscheinlichkeit, daß der bei einer Beobachtung begangene Fehler, absolut genommen, kleiner ist als eine gegebene Größe a.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler zwischen den Grenzen $-a$ und a liegt, ist gegeben durch

$$6)\qquad P = 2\int_0^a y\,dx = 2\left\{\frac{15}{16}\left(\frac{a}{\alpha}\right) - \frac{5}{8}\left(\frac{a}{\alpha}\right)^3 + \frac{3}{16}\left(\frac{a}{\alpha}\right)^5\right\}.$$

Der Wahrscheinlichkeitswert P erscheint als Funktion des Verhältnisses der Fehlergröße a zum Maximalfehler α.

c) Bestimmung des 50-prozentigen oder wahrscheinlichen Fehlers a_{50}.

Der wahrscheinliche Fehler a_{50} wird erhalten aus der Gleichung

$$2\int_0^{a_{50}} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

oder

$$2\left\{\frac{15}{16}\left(\frac{a_{50}}{\alpha}\right) - \frac{5}{8}\left(\frac{a_{50}}{\alpha}\right)^3 + \frac{3}{16}\left(\frac{a_{50}}{\alpha}\right)^5\right\} = \frac{1}{2}.$$

Die Auflösung dieser Gleichung gibt als zulässigen Wert $\frac{a_{50}}{\alpha} = 0{\cdot}281\,08$; es ist also

$$7)\qquad a_{50} = 0{\cdot}281\,08\,\alpha, \quad \alpha = 3{\cdot}557\,7\,a_{50}.$$

d) Bestimmung des Durchschnittsfehlers ϑ.

Der Durchschnittsfehler ϑ ist gegeben durch

$$\vartheta = \int_{-\alpha}^{\alpha} |x|\,y\,dx = 2\int_0^{\alpha} x\,y\,dx;$$

setzt man hierin für y den Wert aus 5) ein, so folgt

$$\vartheta = 2\,\alpha\left(\frac{15}{32} - \frac{15}{32} + \frac{15}{96}\right) = \frac{5}{16}\,\alpha;$$

daher

$$8)\qquad \vartheta = \frac{5}{16}\,\alpha = 0{\cdot}3125\,\alpha, \quad \alpha = \frac{16}{5}\,\vartheta = 3{\cdot}2\,\vartheta.$$

e) Bestimmung des mittleren Fehlers μ.

Für das Quadrat des mittleren Fehlers hat man

$$\mu^2 = 2\int_0^\alpha x^2\, y\, dx = 2 \cdot \frac{15}{16}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\right)\alpha^2 = \frac{1}{7}\,\alpha^2;$$

hieraus folgt

9) $$\mu = 0{\cdot}377\,96\,\alpha, \quad \alpha = 2{\cdot}645\,75\,\mu.$$

f) Bestimmung der Wendepunkte der Fehlerwahrscheinlichkeitskurve.

Bildet man $\frac{d^2 y}{d x^2}$ aus Gleichung 5) und setzt diesen Differentialquotienten gleich Null, so befinden sich die Abszissen der Wendepunkte, falls solche vorhanden sind, unter den Wurzeln der Gleichung $\frac{d^2 y}{d x^2} = 0$. Setzt man $\frac{x}{\alpha} = \xi$, so folgt mit Hinweglassung des Faktors vor der geschwungenen Klammer

$$\frac{d y}{d \xi} = -4\,\xi + 4\,\xi^3, \quad \frac{d^2 y}{d \xi^2} = -4 + 12\,\xi^2 = 0,$$

also $3\,\xi^2 = 1$, woraus $\xi = \pm\, 0{\cdot}577\,35$. Man überzeugt sich leicht, daß die Fehlerwahrscheinlichkeitskurve zwei Wendepunkte besitzt. Es ist sonach Wendepunktsabszisse $x = \pm\, 0{\cdot}577\,35\,\alpha$, oder weil $\alpha = 2{\cdot}6458\,\mu$ ist, Wendepunktsabszisse $x = \pm\, 1{\cdot}5276\,\mu$. Führt man die gefundenen Abszissenwerte in die Kurvengleichung ein, so ergeben sich die Wendepunktsordinaten.

Nach diesem empirischen Gesetze weicht das Verhältnis $a_{50} : \vartheta : \mu = 1 : 1{\cdot}11 : 1{\cdot}34$ von seinem theoretischen Werte ungefähr ebenso sehr ab, wie das Verhältnis $a_{50} : \vartheta : \mu$ nach dem Simpsonschen Gesetze; letzteres ist aber viel einfacher als das in diesem Punkte betrachtete Fehlergesetz.

8. Fehlerwahrscheinlichkeitskurve, welche die Fehlerachse nach der zweiten Ordnung berührt.

a) Bestimmung der Parameter a_0, a_2, a_4, a_6 und Aufstellung der Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktion.

Soll die durch $y = \varphi(x)$ dargestellte Kurve die Fehlerachse in den Punkten mit den Abszissen $-\alpha$ und α nach der zweiten Ordnung berühren, so erhält man, wie gleich gezeigt werden soll, vier Bedingungsgleichungen; man kann alsdann vier Parameter bestimmen. Aus diesem Grunde hat die Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktion die Form

1) $$y = a_0 + a_2\, x^2 + a_4\, x^4 + a_6\, x^6.$$

Die zu erfüllenden Bedingungsgleichungen sind für diesen Fall: Erstens: Für $x = \alpha$ muß $y = 0$ sein; dies gibt

$$a_0 + a_2 \alpha^2 + a_4 \alpha^4 + a_6 \alpha^6 = 0.$$

Zweitens: Zufolge 2) des Punktes 6 dieses Abschnittes und der Gleichung 1) muß

$$2\int_0^\alpha y\,dx = 2\left\{a_0 x + a_2 \frac{x^3}{3} + a_4 \frac{x^5}{5} + a_6 \frac{x^7}{7}\right\}_0^\alpha = 1$$

oder

$$2\int_0^\alpha y\,dx = 2\,a_0\,\alpha + \frac{2}{3}\,a_2\,\alpha^3 + \frac{2}{5}\,a_4\,\alpha^5 + \frac{2}{7}\,a_6\,\alpha^7 = 1$$

stattfinden.

Soll die Fehlerwahrscheinlichkeitskurve die Fehlerachse nach der 2. Ordnung berühren, so muß sowohl $\frac{dy}{dx}$ als auch $\frac{d^2y}{dx^2}$ für $x = \alpha$ verschwinden. Man hat also

drittens: $\frac{dy}{dx} = 0$ für $x = \alpha$, d. h. $a_2\,\alpha + 2\,a_4\,\alpha^3 + 3\,a_6\,\alpha^5 = 0$;

viertens: $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ für $x = \alpha$, d. h. $a_2 + 6\,a_4\,\alpha^2 + 15\,a_6\,\alpha^4 = 0$.

Zur Bestimmung der vier Parameter a_0, a_2, a_4 und a_6 hat man sonach das Gleichungssystem

$$2)\quad \left\{\begin{aligned} a_0 + a_2\,\alpha^2 + a_4\,\alpha^4 + a_6\,\alpha^6 &= 0,\\ 2\,a_0\,\alpha + \frac{2}{3}\,a_2\,\alpha^3 + \frac{2}{5}\,a_4\,\alpha^5 + \frac{2}{7}\,a_6\,\alpha^7 &= 1,\\ a_2\,\alpha + 2\,a_4\,\alpha^3 + 3\,a_6\,\alpha^5 &= 0,\\ a_2 + 6\,a_4\,\alpha^2 + 15\,a_6\,\alpha^4 &= 0; \end{aligned}\right.$$

aus denselben findet man

$$3)\quad a_0 = \frac{35}{32}\,\frac{1}{\alpha},\quad a_2 = -\frac{3}{\alpha^2}\,a_0,\quad a_4 = \frac{3}{\alpha^4}\,a_0,\quad a_6 = -\frac{1}{\alpha^6}\,a_0.$$

Hiemit ergibt sich für die Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktion

$$4)\quad y = \frac{35}{32\,\alpha}\left\{1 - 3\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{\alpha}\right)^4 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^6\right\} = \frac{35}{32\,\alpha}\left\{1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2\right\}^3;$$

sie wurde zuerst von Helmert in der „Zeitschrift für Vermessungswesen 1878" behandelt.

b) **Wahrscheinlichkeit, daß der bei einer Beobachtung begangene Fehler, absolut genommen, kleiner ist als eine gegebene Größe a.**

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler zwischen den Grenzen $-a$ und a liegt, ist gegeben durch

$$5)\qquad P = 2\int_0^a y\,dx = \frac{35}{16}\left\{\frac{a}{\alpha} - \left(\frac{a}{\alpha}\right)^3 + \frac{3}{5}\left(\frac{a}{\alpha}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{a}{\alpha}\right)^7\right\};$$

der Wahrscheinlichkeitswert P erscheint wieder als Funktion von $\frac{a}{\alpha}$.

c) **Bestimmung des 50-prozentigen oder wahrscheinlichen Fehlers a_{50}.**

Der wahrscheinliche Fehler a_{50} folgt aus der Gleichung

$$\frac{35}{16}\left\{\frac{a_{50}}{\alpha} - \left(\frac{a_{50}}{\alpha}\right)^3 + \frac{3}{5}\left(\frac{a_{50}}{\alpha}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{a_{50}}{\alpha}\right)^7\right\} = \frac{1}{2}.$$

Die Auflösung dieser Gleichung gibt als zulässigen Wert $\frac{a_{50}}{\alpha} = 0{\cdot}2493$; es ist also

$$6)\qquad a_{50} = 0{\cdot}2423\,\alpha, \qquad \alpha = 4{\cdot}1271\,a_{50}.$$

d) **Bestimmung des Durchschnittsfehlers ϑ.**

Der Durchschnittsfehler ϑ ist gegeben durch

$$\vartheta = \int_{-\alpha}^{\alpha} |x|\,y\,dx = 2\int_0^{\alpha} x\,y\,dx =$$

$$= \frac{35}{16\,\alpha}\int_0^{\alpha}\left\{1 - 3\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{\alpha}\right)^4 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^6\right\} x\,dx =$$

$$= \frac{35}{16}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)\alpha = \frac{35}{16}\cdot\frac{1}{8}\,\alpha = \frac{35}{128}\,\alpha;$$

es ist sonach

$$7)\qquad \vartheta = \frac{35}{128}\,\alpha = 0{\cdot}273\,44\,\alpha, \quad \alpha = 3{\cdot}6571\,\vartheta.$$

e) **Bestimmung des mittleren Fehlers μ.**

Für das Quadrat des mittleren Fehlers hat man

$$\mu^2 = 2\int_0^{\alpha} x^2\,y\,dx = \frac{35}{16\,\alpha}\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9}\right)\alpha^3 = \frac{\alpha^2}{9}$$

hieraus folgt

$$8)\qquad \mu = \frac{\alpha}{3}, \quad \alpha = 3\,\mu.$$

f) Bestimmung der Wendepunkte der Fehlerwahrscheinlichkeitskurve.

Um die Abszissen der Wendepunkte zu erhalten, hat man den zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2 y}{d x^2}$ gleich Null zu setzen. Sind Wendepunkte vorhanden, so befinden sich ihre Abszissen unter den Wurzeln der Gleichung $\frac{d^2 y}{d x^2} = 0$. Führt man vorübergehend die Veränderliche ξ mittels der Beziehung $\frac{x}{\alpha} = \xi$ ein, so hat man mit Hinweglassung des Faktors vor der geschwungenen Klammer

$$\frac{dy}{d\xi} = -6\,\xi + 12\,\xi^3 - 6\,\xi^5,$$

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} = -6 + 36\,\xi^2 - 30\,\xi^4 = 0 \quad \text{oder} \quad 5\,\xi^4 - 6\,\xi^2 + 1 = 0.$$

Diese Gleichung gibt

$$\xi^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9-5}}{5} = \frac{3 \pm 2}{5}, \quad \xi^2 = 1 \quad \text{oder} \quad \xi^2 = \frac{1}{5}$$

Die erste Wurzel $\xi^2 = 1$ oder $\xi = \pm 1$ entspricht der vierten der unter *a)* aufgestellten Bedingungen zur Bestimmung der Parameter der Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktion. Die zweite Wurzel $\xi^2 = \frac{1}{5} = 0{\cdot}2$ gibt $\xi = \pm 0{\cdot}447\,21$. Man überzeugt sich leicht, daß die Fehlerwahrscheinlichkeitskurve zwei Wendepunkte besitzt. Es ist sonach Wendepunktsabszisse $x = \pm 0{\cdot}447\,21\,\alpha$, oder weil $\alpha = 3\,\mu$ ist, Wendepunktsabszisse $x = \pm 1{\cdot}341\,63\,\mu$. Für die gefundenen Abszissenwerte findet man aus der Gleichung der Fehlerwahrscheinlichkeitskurve die Wendepunktsordinaten.

9. Vergleichung der Fehlerwahrscheinlichkeitskurven mit Berührungsanschluß.

Vergleichungen der beiden Fehlerwahrscheinlichkeitskurven mit Berührungsanschluß, Formel 5) des Punktes 7 und Formel 4) des Punktes 8, mit der Erfahrung, wie sie von Jordan angestellt wurden, gaben zwar eine im allgemeinen genügende Übereinstimmung, werden jedoch von dem Exponentialgesetze hierin entschieden übertroffen.

Zum Vergleiche mit dem Exponentialgesetze sei noch die folgende Tabelle angeführt:

Benennung	Berührung 1. Ordnung	Berührung 2. Ordnung	Exponentialgesetz
Wendepunktsabszisse . .	$x = 1{\cdot}5276\,\mu$	$x = 1{\cdot}3416\,\mu$	$x = \mu$
Durchschnittsfehler . .	$\vartheta = 0{\cdot}8268\,\mu$	$\vartheta = 0{\cdot}8203\,\mu$	$\vartheta = 0{\cdot}7979\,\mu$
Wahrscheinlicher Fehler	$r = 0{\cdot}7437\,\mu$	$r = 0{\cdot}7269\,\mu$	$r = 0{\cdot}6745\,\mu$
Maximalfehler	$\alpha = 2{\cdot}6458\,\mu$	$\alpha = 3\,\mu$	$\alpha = \infty$

In dieser Reihenfolge nehmen der Durchschnittsfehler und der wahrscheinliche Fehler ab; es ist aber innerhalb 10% übereinstimmend $\vartheta = 0{\cdot}8\,\mu$ und $r = 0{\cdot}7\,\mu$. Der Maximalfehler nimmt dagegen zu von $2{\cdot}6\,\mu$ bis ∞; für alle innerhalb dieser Grenzen liegenden Fehlergesetze kann man $\alpha > 2{\cdot}65\,\mu$ setzen.

Helmert hat gezeigt, daß algebraische Funktionen, welche die zwei betrachteten Fehlergesetze darstellen, nur Glieder in einer Reihe von Näherungsformeln sind, die sich dem Gaußschen Gesetze mehr und mehr anschließen, aber den Maximalfehler gleich einem immer größeren Vielfachen des mittleren Fehlers ergeben.

10. Anführung weiterer empirischer Fehlergesetze.

S. D. Poisson hat als Gleichung der Fehlerwahrscheinlichkeitskurve

$$y = \frac{c}{1 + x^2}$$

vorgeschlagen. Dieses Fehlergesetz leistet den charakteristischen Eigenschaften der unregelmäßigen, zufälligen oder unvermeidlichen Fehler Genüge (Punkt 3 des I. Abschnittes im ersten Bande).

Daniel Bernoulli schlug vor, die Wahrscheinlichkeit einen Fehler von der Größe x zu begehen, durch einen Ausdruck darzustellen, welcher proportional $\sqrt{r^2 - x^2}$ sei, wobei r eine Konstante bedeutet. Dieser Annahme entspricht als Wahrscheinlichkeitskurve ein Halbkreis.

Nimmt man als Fehlerwahrscheinlichkeitskurve eine begrenzte Gerade (Strecke) parallel zur x-Achse an, so sind die Wahrscheinlichkeiten für alle Beobachtungsfehler gleich, eine Annahme, die wohl nur für sehr grobe Näherungsberechnungen zulässig ist. Die Gleichung der Wahrscheinlichkeitskurve hat die Form:

$$y = \varphi(x) = b$$

Die Konstante b soll nun so bestimmt werden, daß im Intervalle $-\alpha$ bis $+\alpha$ alle Fehler enthalten sind. Es muß dann stattfinden

$2\int_0^\alpha \varphi(x)\,dx = 2\int_0^\alpha b\,dx = 2\,b\,\alpha = 1$, also ist $b = \frac{1}{2\,\alpha}$ und hiemit folgt:

$$y = \varphi(x) = \frac{1}{2\,\alpha}, \quad |x| \leq \alpha.$$

Für die Wahrscheinlichkeit, daß der bei der Beobachtung begangene Fehler, absolut genommen, kleiner als a ist, hat man

$$P = 2\int_0^a \varphi(x)\,dx = 2\int_0^a \frac{1}{2\,\alpha}\,dx = \frac{a}{\alpha}.$$

Wird $P = \frac{1}{2}$ gesetzt, so folgt für den wahrscheinlichen Fehler a_{50} die Beziehung $\frac{1}{2} = \frac{a_{50}}{\alpha}$; es ist sonach $a_{50} = \frac{\alpha}{2}$, $\alpha = 2\,a_{50}$.

Der Durchschnittsfehler ϑ ist gegeben durch

$$\vartheta = 2\int_0^\alpha x\,\varphi(x)\,dx = 2\,.\,\frac{1}{2\,\alpha}\cdot\frac{\alpha^2}{2} = \frac{\alpha}{2};$$

es bestehen also die Beziehungen $\vartheta = \frac{\alpha}{2}$, $\alpha = 2\,\vartheta$.

Das Quadrat des mittleren Fehlers μ ist bestimmt durch

$$\mu^2 = 2\int_0^\alpha x^2\,.\,\varphi(x)\,dx = 2\cdot\frac{1}{2\,\alpha}\int_0^\alpha x^2\,dx = \frac{\alpha^2}{3};$$

es ist also $\mu^2 = \frac{\alpha^2}{3}$, $\mu = 0{\cdot}577\,35\,\alpha$, $\alpha = 1{\cdot}732\,05\,\mu$.

Man findet nun leicht

$$a_{50} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mu = 0{\cdot}866\,03\,\mu, \quad \mu = \frac{2}{\sqrt{3}}\,a_{50} = 1{\cdot}154\,70\,\vartheta.$$

11. Moivres Problem.

Eine Urne enthalte n mit 1, 2, 3, ..., n bezeichnete Kugeln. Man zieht eine Kugel, notiert die auf ihr befindliche Zahl und legt dann die gezogene Kugel in die Urne zurück. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Summe der in s Ziehungen erschienenen Nummern gleich z ist?

Dieselbe Aufgabe kann auch folgendermaßen formuliert werden: s reguläre Polyeder mit je n Seiten tragen an den verschiedenen Seiten die Zahlen 1, 2, 3, ..., n. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit den s Polyedern die Summe z zu werfen?

a) Erste Art der Bestimmung des Ausdruckes für die zu suchende Wahrscheinlichkeit.

Für die Lösung der Aufgabe nach der ersten Formulierung sei angenommen, daß die Wahrscheinlichkeiten für das Erscheinen der verschieden bezeichneten Kugeln auch verschieden seien, und zwar seien die Wahrscheinlichkeiten für das Erscheinen der mit 1, 2, 3, ..., n bezeichneten Kugeln beziehungsweise gleich $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots, p_n$.

Für die Lösung der Aufgabe nach der zweiten Formulierung sei angenommen, daß die Wahrscheinlichkeiten für das Erscheinen der verschieden bezeichneten Seiten des Polyeders denselben Wert haben; diese Lösung geht dann aus der vorigen hervor, wenn $p_1 = p_2 = p_3 = \ldots\ldots = p_n$ gesetzt wird.

Bei den s Ziehungen möge α_1-mal die Kugel mit der Zahl 1, α_2-mal die Kugel mit der Zahl 2, α_3-mal die Kugel mit der Zahl 3, ..., α_n-mal die Kugel mit der Zahl n erschienen sein; oder in der zweiten Fassung auf den s Polyedern mögen die Zahlen 1, 2, 3, ..., n beziehungsweise α_1-, α_2-, α_3-, ..., α_n-mal auftreten. Dann muß, da die Anzahl aller Zahlen (Ziehungen, Polyeder) s ist,

$$1) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots\cdots + \alpha_n = \sum_1^n \alpha_i = s$$

sein, und, da die Summe aller erschienenen Zahlen z betragen soll, muß

$$2) \qquad 1\,\alpha_1 + 2\,\alpha_2 + 3\,\alpha_3 + \cdots\cdots + n\,\alpha_n = \sum_1^n i\,\alpha_i = z$$

werden. Alle Wertkombinationen von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_n$, welche diesen zwei Gleichungen Genüge leisten, werden als der gestellten Bedingung entsprechend anzusehen sein.

Die Wahrscheinlichkeit für das α_1-malige Erscheinen der Zahl 1 ist aber $p_1^{\alpha_1}$; die Wahrscheinlichkeit für das α_2-malige Erscheinen der Zahl 2 ist $p_2^{\alpha_2}$; die Wahrscheinlichkeit für das α_3-malige Erscheinen der Zahl 3 ist $p_3^{\alpha_3}$; ......; die Wahrscheinlichkeit für das α_n-malige Erscheinen der Zahl n ist $p_n^{\alpha_n}$; daher beträgt die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit für das α_1-malige Erscheinen der Zahl 1, mit dem α_2-maligen Erscheinen der Zahl 2, mit dem α_3-maligen Erscheinen der Zahl 3, ..., endlich mit dem α_n-maligen Erscheinen der Zahl n in beliebiger Reihenfolge:

$$3)\quad P' = \frac{s!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!\ldots\ldots\alpha_n!}\,p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}\ldots\ldots p_n^{\alpha_n}.$$

Da aber die Größen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots, a_n$ alle Werte annehmen können, welche den Bedingungen 1) und 2) genügen, so wird die Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen der Summe z gleich sein der Summe der Wahrscheinlichkeiten P' genommen nach dem α, also

$$4)\quad P_z = \sum \frac{s!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!\ldots\ldots\alpha_n!}\,p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}\ldots\ldots p_n^{\alpha}.$$

Eine direkte Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeit ist möglich für den zweiten Fall, wo die Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots, p_n$ einander gleich sind; in diesem Falle wird, wenn dann

$$p_1 = p_2 = p_3 = \ldots\ldots = p_n = p = \frac{1}{n}$$

gesetzt wird,

$$5)\quad P_z = \sum \frac{s!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!\ldots\ldots\alpha_n!}\,p^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots\cdots+\alpha_n} =$$

$$= \sum \frac{s!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!\ldots\ldots\alpha_n!}\cdot\frac{1}{n^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots\cdots+\alpha_n}}.$$

Da aber für alle möglichen Kombinationen die Bedingung 1) erfüllt sein soll, so wird der Exponent für alle Summanden gleich s und man erhält dann, da sich die Summierung nur auf die Koeffizienten von $\frac{1}{n}$ zu erstrecken hat, wenn

$$6)\qquad g_z = \sum \frac{s!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!\ldots\ldots\alpha_n!}$$

gesetzt wird,

$$7)\qquad P_z = g_z p^s = \frac{g_z}{n^s}.$$

Da n^s die Anzahl der möglichen Fälle bedeutet, so stellt g_z die Anzahl der für das Erscheinen der Summe z günstigen Fälle dar.

b) Zweite Art der Bestimmung des Ausdruckes für die zu suchende Wahrscheinlichkeit.

In dem Polynom

$$8)\qquad \frac{1}{n}u^1 + \frac{1}{n}u^2 + \frac{1}{n}u^3 + \ldots\ldots + \frac{1}{n}u^n$$

sind die Fälle, welche sich mit einem Polyeder zutragen können, und ihre Wahrscheinlichkeiten in eigentümlicher Weise zum Ausdrucke

gebracht: der Exponent des Hilfsbuchstaben u bedeutet die Anzahl Augen oder die auf der betreffenden Seite des Polyeders angeschriebene Zahl und der Koeffizient $\frac{1}{n}$ die Wahrscheinlichkeit, daß diese Zahl sich einstelle.

Multipliziert man das Polynom mit sich selbst und ordnet das Produkt nach den Potenzen von u, so werden die Exponenten addiert, die Koeffizienten der miteinander multiplizierten Glieder multipliziert und die Koeffizienten gleicher Potenzen zu einer Summe vereinigt; die Rechnung geht also nach solchen Regeln vor sich, daß der Koeffizient von u^z in dem entwickelten Produkte unmittelbar die Wahrscheinlichkeit angibt, mit zwei regulären Polyedern mit je n Seiten die Summe z zu werfen. Multipliziert man das Produkt aufs neue mit dem Polynom 8), so gibt in der nach Potenzen von u geordneten Entwicklung der Koeffizient von u^z aus den gleichen Gründen die Wahrscheinlichkeit an, daß mit drei regulären Polyedern mit je n Seiten die Summe z erzielt werde.

Allgemein wird demnach der Koeffizient von u^z in der Entwicklung von

$$9)\qquad \left(\frac{1}{n}u^1+\frac{1}{n}u^2+\frac{1}{n}u^3+\cdots\cdots+\frac{1}{n}u^n\right)^s$$

die Wahrscheinlichkeit darstellen, daß mit s Polyedern die Summe z falle. Sondert man den Nenner n^s ab, welcher die möglichen Fälle zählt, die sich bei einem Wurfe mit s Polyedern zutragen können, so bleibt

$$(u^1+u^2+u^3+\cdots\cdots+u^n)^s$$

und nunmehr gibt der Koeffizient von u^z die dem Erscheinen der Summe z günstigen Fälle g_z. Man ersieht, daß der Koeffizient g_z als der Koeffizient der z-ten Potenz von u in der Entwicklung

$$(u^1+u^2+u^3+\cdots\cdots+u^n)^s=u^s(1+u+u^2+\cdots\cdots+u^{n-1})^s$$

erscheint. Summiert man die auf der rechten Seite innerhalb der Klammern enthaltene geometrische Reihe, so ergibt sich

$$10)\quad (u^1+u^2+u^3+\cdots\cdots+u^n)^s=u^s\left(\frac{1-u^n}{1-u}\right)^s=u^s(1-u^n)^s(1-u)^{-s}.$$

Es ist aber

$$(1-u^n)^s=1-\binom{s}{1}u^n+\binom{s}{2}u^{2n}-\binom{s}{3}u^{3n}+\cdots+(-1)^\rho\binom{s}{\rho}u^{\rho n}+\cdots,$$

$$(1-u)^{-s}=1+\binom{s}{1}u+\binom{s+1}{2}u^2+\binom{s+2}{3}u^3+\cdots\cdots+$$
$$+\binom{s+\sigma-1}{\sigma}u^\sigma+\cdots\cdots$$

Der Koeffizient von u^s in 10) ist offenbar derselbe, wie der Koeffizient des Gliedes u^{z-s} im Produkte $(1-u^n)^s(1-u)^{-s}$; dieser Koeffizient soll nun bestimmt werden.

Bei der Ausführung der Multiplikation $(1-u^n)^s(1-u)^{-s}$ entstehen Glieder mit u^{z-s} dadurch, daß man

das 1. Glied (die Einheit) des ersten Faktors multipliziert mit dem Gliede $\binom{z-1}{z-s}u^{z-s}$ des zweiten Faktors,

das 2. Glied $\binom{s}{1}u^n$ des ersten Faktors multipliziert mit dem Gliede $\binom{z-1-n}{z-s-n}u^{z-s-n}$ des zweiten Faktors,

das 3. Glied $\binom{s}{2}u^{2n}$ des ersten Faktors multipliziert mit dem Gliede $\binom{z-1-2n}{z-s-2n}u^{z-s-2n}$ des zweiten Faktors u. s. w.; der Koeffizient von u^{z-s}, welcher auch gleich g_z ist, hat mithin den Wert:

$$g_z=\binom{z-1}{z-s}-\binom{z-1-n}{z-s-n}\binom{s}{1}+\binom{z-1-2n}{z-s-2n}\binom{s}{2}-\cdots\cdots$$

Da aber bekanntlich $\binom{r}{i}=\binom{r}{r-i}$ ist, so läßt sich dieser Ausdruck auch schreiben

$$g=\binom{z-1}{z-s}-\binom{s}{1}\binom{z-1-n}{s-1}+\binom{s}{2}\binom{z-1-2n}{s-1}-$$
$$-\binom{s}{3}\binom{z-1-3n}{s-1}+\cdots\cdots \text{ oder}$$

11) $$g_z=\binom{z-1}{z-s}-\binom{s}{1}\binom{z-n-1}{s-1}+\binom{s}{2}\binom{z-2n-1}{s-1}-$$
$$-\binom{s}{3}\binom{z-3n-1}{s-1}+\cdots\cdots$$

Die Reihe auf der rechten Seite dieser Formel bricht ab, sobald nach der Entwicklung der Binomialkoeffizienten und Kürzung der so entstandenen Brüche im Zähler eines Bruches der Faktor Null oder negative Faktoren auftreten sollten (siehe Formel 1) Seite 359 und Formel 1) Seite 367).

Die verlangte Wahrscheinlichkeit ist demnach

12) $$P_z=\frac{1}{n^s}\left\{\binom{z-1}{z-s}-\binom{s}{1}\binom{z-n-1}{s-1}+\binom{s}{2}\binom{z-2n-1}{s-1}-\right.$$
$$\left.-\binom{s}{3}\binom{z-3n-1}{s-1}+\cdots\cdots\right\}.$$

Setzt man $z-n=z_1$, $z-2n=z_2$, $z-3n=z_3, \ldots\ldots$, dann erhält der Ausdruck für P_z folgende symmetrische, zur Berechnung von Zahlenbeispielen geeignete Form:

$$13)\quad P_z=\frac{1}{n^s}\left\{\binom{z-1}{z-s}-\binom{s}{1}\binom{z_1-1}{s-1}+\binom{s}{2}\binom{z_2-1}{s-1}-\right.$$
$$\left.-\binom{s}{3}\binom{z_3-1}{s-1}+\ldots\ldots\right\}.$$

c) Beispiele.

1. **Beispiel.** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln die Summe 8 zu werfen?

Man hat $s=3$, $n=6$, $z=8$ zu setzen und findet

$$P_8=\frac{1}{6^3}\binom{7}{5}=\frac{7!}{6^3 . 5!\, 2!}=\frac{6 . 7}{216 . 2}=\frac{21}{216}=\frac{7}{72}.$$

2. **Beispiel.** Es ist die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, mit 6 Würfeln die Summe 15 zu treffen.

Für diesen Fall ist $s=6$, $n=6$, $z=15$ und es ergibt sich

$$P_{15}=\frac{1}{6^6}\left\{\binom{14}{9}-6\binom{8}{5}\right\}=\frac{1}{6^6}\left(\frac{14!}{9!\,5!}-6 . \frac{8!}{5!\,3!}\right)=$$
$$=\frac{1}{6^6}\left(\frac{10 . 11 . 12 . 13 . 14}{1 .\ 2 .\ 3 .\ 4 .\ 5}-\frac{6 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8}{1 . 2 . 3 . 4 . 5}\right)=$$
$$=\frac{2002-336}{6^6}=\frac{1666}{46656}=\frac{833}{23328}.$$

Das Problem von Moivre soll in den folgenden zwei Punkten auf zwei Spezialfälle und deren Beziehungen zum theoretischen Trefferbild angewendet werden.

12. Anwendung des Problems von Moivre auf den speziellen Fall $s=3$ und $n=6$.

A) Wahrscheinlichkeit, mit drei Würfeln eine gegebene Summe zu werfen.

In diesem Falle ist $s=3$ und $n=6$ zu setzen; die Summe z der bei einem Wurfe erschienenen Nummern kann einen der Werte 3, 4, 5, ..., 18 erhalten. Die Anzahl der möglichen Fälle beträgt $6^3=216$.

Für die zu suchende Wahrscheinlichkeit P_z ergibt sich nach Gleichung 12) oder 13) des Punktes 11 dieses Abschnittes die Formel:

$$P_z = \frac{1}{6^3}\left\{\binom{z-1}{z-3} - \binom{3}{1}\binom{z-7}{2} + \binom{3}{2}\binom{z-13}{2}\right\}.$$

Weil $\binom{z-1}{z-3} = \frac{(z-1)!}{(z-3)!\,2!} = \frac{(z-2)(z-1)}{2}$ ist, so hat man auch

$$1)\quad P_z = \frac{1}{6^3}\left\{\frac{(z-2)(z-1)}{2} - 3\,\frac{(z-7)(z-8)}{2} + 3\,\frac{(z-13)(z-14)}{2}\right\}.$$

Zur Bestimmung von P_z beziehungsweise g_z werden aber nicht immer alle drei Glieder auf der rechten Seite benützt; es gilt

$$2)\qquad P_z = \frac{1}{6^3}\,\frac{(z-2)(z-1)}{2}\ .$$

für $z = 3$ bis einschließlich $z = 8$;

$$3)\qquad P_z = \frac{1}{6^3}\left\{\frac{(z-2)(z-1)}{2} - 3\,\frac{(z-7)(z-8)}{2}\right\}$$

für $z = 9$ bis einschließlich $z = 14$.

Die dreigliederige Formel 1) wird benützt für $z = 15$ bis einschließlich $z = 18$.

Hienach beträgt die Anzahl der günstigen Fälle für die Summen

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18

beziehungsweise

1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27, 27, 25, 21, 15, 10, 6, 3, 1,

woraus sich die Wahrscheinlichkeiten für das Erscheinen der einzelnen Summen sofort ableiten lassen. So ist z. B. die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln auf einen Wurf die Summe 14 zu werfen, gleich $\frac{15}{216}$. Aus Formel 3) folgt natürlich dasselbe Resultat; es ist

$$P_{14} = \frac{1}{216}\left\{\frac{(14-2)(14-1)}{2} - 3\,\frac{(14-7)(14-8)}{2}\right\} =$$
$$= \frac{1}{216}\left(\frac{12.13}{2} - \frac{3\cdot 7\cdot 6}{2}\right) = \frac{78-63}{216} = \frac{15}{216}.$$

Die Anzahl der günstigen Fälle kann man hier übrigens ohne Hilfe der allgemeinen Formel leicht finden. Beispielsweise erhält man mit 3 Würfeln die Summe 8, indem die 1 eines Würfels mit der Summe 7 der beiden anderen Würfel, die 2 eines Würfels mit der Summe 6 der beiden anderen Würfel u. s. w. kombiniert wird; also einfach durch entsprechende Summierung der für 2 Würfeln gültigen Zahlen. Bei 2 Würfeln entfällt aber auf die Summe

2 der Fall 1, 1; d. i. 1 Fall,
3 die Fälle 1, 2; 2, 1; d. s. . . . . 2 Fälle,
4 „ „ 1, 3; 2, 2; 3, 1; d. s. . . . . 3 „ ,
5 „ „ 1, 4; 2, 3; 3, 2; 4, 1; d. s. . . . . 4 „ ,
6 „ „ 1, 5; 2, 4; 3, 3; 4, 2; 5, 1; d. s. . . . . . . 5 „ ,
7 „ „ 1, 6; 2, 5; 3, 4; 4, 3; 5, 2; 6, 1; d. s. . . . . 6 „ ,
8 „ „ 2, 6; 3, 5; 4, 4; 5, 3; 6, 2; d. s. . . . . . . 5 „ ,
9 „ „ 3, 6; 4, 5; 5, 4; 6, 3; d. s. . . . . 4 „ ,
10 „ „ 4, 6; 5, 5; 6, 4; d. s. . . . . 3 „ ,
11 „ „ 5, 6; 6, 5; d. s. . . . . 2 „ ,
12 der Fall 6, 6; d. i. . . . . 1 Fall.

Rechnet man die Wahrscheinlichkeiten, mit welchen die Summen 3 bis 18 mit 3 Würfeln geworfen werden können, indem die Häufigkeit des Vorkommens jeder dieser Zahlen — die Anzahl der günstigen Fälle — durch 216 — die Anzahl der möglichen Fälle — dividiert wird, so ergeben sich in der nachstehenden Tabelle die Zahlen der Spalte 3. Die Anzahl der günstigen Fälle erscheinen in der Spalte 2 ausgewiesen. Selbstverständlich muß die Summe der in dieser Spalte angegebenen Zahlen 216 sein, weil in derselben alle

z	g_z	$P_z = \frac{g_z}{216}$	Wahrscheinlichkeitszahlen	Prozentzahlen	Abgerundete Prozentzahlen
			für ein theoretisches Trefferbild mit 16 Zielstreifen von der Breite $\frac{s_{50}}{4}$		
1	2	3	4	5	6
3	1	0·0046	0·0091	0·91	1·0
4	3	0·0139	0·0124	1·24	1·0
5	6	0·0278	0·0244	2·44	2·5
6	10	0·0463	0·0428	4·28	4·5
7	15	0·0695	0·0672	6·72	7·0
8	21	0·0972	0·0941	9·41	9·0
9	25	0·1157	0·1179	11·79	12·0
10	27	0·1250	0·1321	13·21	13·0
11	27	0·1250	0·1321	13·21	13·0
12	25	0·1157	0·1179	11·79	12·0
13	21	0·0972	0·0941	9·41	9·0
14	15	0·0695	0·0672	6·72	7·0
15	10	0·0463	0·0428	4·28	4·5
16	6	0·0278	0·0244	2·44	2·5
17	3	0·0139	0·0124	1·24	1·0
18	1	0·0046	0·0091	0·91	1·0
Summe	216	1·0000	1·0000	100·00	100·0

möglichen Fälle angegeben sind. Die Summe der Zahlen in Spalte 3 muß nach dem Satze von den einander ausschließenden Ereignissen gleich 1 sein, weil eine der Summen 3 bis 18 sicher geworfen werden muß. Man vergleiche auch die Zahlen der Spalten 4, 5 und 6 mit den theoretischen Trefferbildern und zwar mit der Fig. 11 auf Seite 253 und mit der Fig. 12 auf Seite 254.

B) Beziehung der Wahrscheinlichkeiten P_z zum theoretischen Trefferbilde.

Teilt man eine Treffläche symmetrisch zum mittleren Treffpunkte in Parallelstreifen gleicher Breite und bestimmt die Wahrscheinlichkeiten, mit welchen diese Streifen getroffen werden können, oder, indem man diese Wahrscheinlichkeitswerte mit 100 multipliziert, die Prozentzahlen der Treffer, welche in jedem Streifen zu erwarten sind, so resultiert bekanntlich das theoretische Trefferbild, wenn die erhaltenen Zahlen in die entsprechenden Streifen der graphisch dargestellten Zielfläche eingetragen werden.

Die Schießtafeln enthalten in der Regel solche theoretische Trefferbilder für eine Treffläche, welche symmetrisch zum mittleren Treffpunkte in 16 Parallelstreifen von der Breite $\frac{1}{4} s_{50}$ geteilt ist, so daß die 16 Streifen, zusammen in der Breite $4 s_{50}$, nahezu, oder praktisch genommen, sämtliche Treffer enthalten müssen. Die Zahlen der Spalte 6 in der Tabelle auf Seite 360 sind enstanden durch Abrundung der genau berechneten Prozentzahlen der Spalte 5 und diese wieder sind das Hundertfache der Zahlen der Spalte 4; diese stellen die nach der Tabelle der Wahrscheinlichkeitsfaktoren genau berechneten Wahrscheinlichkeiten (unter Zugrundelegung des Gaußschen Fehlergesetzes) dar, mit welchen die 16 Parallelstreifen von der Breite von je $\frac{1}{4} s_{50}$ getroffen werden können. Vergleicht man die Zahlen der Spalten 4 mit den berechneten Zahlen der Spalte 3, so findet man eine ziemliche Übereinstimmung.

Durch Abrundung der Zahlen der Spalte 3 gelangt man auch zu den in Spalte 6 eingetragenen Zahlen des theoretischen Trefferbildes. Der Vergleich der Zahlen der Spalten 3 und 4 läßt schließen, daß die mit den Würfeln geworfenen 16 Zahlen 3 bis 18 sich nach einem ähnlichen Gesetze gruppieren, wie die Treffer eines Trefferbildes, welches in 16 Parallelstreifen von gleicher Breite von je $\frac{1}{4} s_{50}$ symmetrisch zum mittleren Treffpunkte geteilt wurde.

Die Tabelle zeigt ferner, daß die mittleren Zahlen 10 und 11 mit der größten Wahrscheinlichkeit geworfen werden, welche der Wahrscheinlichkeit des Treffens der beiden zunächst des mittleren Treffpunktes liegenden Streifen von der Breite $\frac{1}{4} s_{50}$ nahezu gleichkommt; je mehr die mit drei Würfeln geworfenen Zahlen von 10 und 11 abweichen, desto mehr nimmt die Wahrscheinlichkeit ab, daß sie geworfen werden, nach dem gleichen Gesetze, wie die Wahrscheinlichkeit des Treffens eines Parallelstreifens von der Breite $\frac{1}{4} s_{50}$ mit seinem Abstande vom mittleren Treffpunkte abnimmt.

Die für die Praxis völlige Übereinstimmung beider Gesetze ist noch mehr in die Augen fallend, wenn man die Zahlen der Spalten 3 und 4 als Ordinaten für Abszissen, welche um die gleiche Breite der Parallelstreifen wachsen, in ein rechtwinkeliges Koordinatensystem aufträgt und so die Wahrscheinlichkeitskurven konstruiert.

Diese Wahrnehmungen führen auf den Gedanken, beim Artillerieschießspiele drei Würfel anzuwenden, um über die vorkommenden Abweichungen der Flugbahnen von der mittleren Flugbahn zu entscheiden.

C) Anwendung von Würfeln zur Bestimmung der wahrscheinlichen Abweichungen beim Artillerieschießspiele.

Dem Leiter einer Artillerieschießspielaufgabe handelt es sich hauptsächlich darum, die Streuung der Geschosse in möglichst ähnlicher Weise auf die Lösung einer Aufgabe Einfluß nehmen zu lassen, wie dies beim wirklichen Schießen der Fall ist. Bei Schießspielaufgaben bestimmt der Übungsleiter mit Berücksichtigung der Verhältnisse nach seinem Ermessen die entsprechende Zielentfernung, z. B. mit 3332 *m.**) Kommandiert jetzt der Übende z. B. 3400 *m*, so muß der Übungsleiter die durch die Streuung bedingte Abweichung zu dieser kommandierten Entfernung zuzählen beziehungsweise von derselben abziehen. Hat er z. B. für diesen Schuß 100 *m* abzuziehen, so fällt der Schuß auf 3300 *m* und ist dem Übenden vom Übungsleiter „kurz" anzusagen.

---

*) In der Wirklichkeit wird sich die genaue Tagesdistanz niemals den von 25 zu 25 *m* abstufenden Aufsatzdistanzen anbequemen; es ist für den Übenden lehrreich und wichtig, schließlich zwischen den zwei, in dem angeführten Beispiele besten Aufsatzstellungen für 3325 *m* und 3350 *m* ohne Kenntnis der Annahme des Übungsleiters die günstigere Aufsatzstellung zu wählen.

Hat man sich mit Rücksicht auf die schießtafelmäßige Streuung und die aus dem Kriegsspiele hervorgehende Gefechtslage*) für eine im Kopfe der nachstehenden Tabelle eingetragene Streuung entschieden, so ist, um die Lage des Geschoßaufschlages zum Ziele festzustellen, die der geworfenen Zahl entsprechende Abweichung der genannten Tabelle zu entnehmen und zur kommandierten Entfernung zuzuzählen oder von derselben abzuziehen.

Mit 3 Würfeln geworfene Augenzahl	Bei der 50-prozentigen Streuung von								
	20	30	40	50	60	80	100	120	140
	Metern ist von der kommandierten Entfernung abzuziehen								
3	40	60	80	100	120	160	200	240	280
4	35	52	70	87	105	140	175	210	245
5	30	45	60	75	90	120	150	180	210
6	25	37	50	62	75	100	125	150	175
7	20	30	40	50	60	80	100	120	140
8	15	22	30	37	45	60	75	90	105
9	10	15	20	25	30	40	50	60	70
10	5	7	10	12	15	20	25	30	35
	ist zur kommandierten Entfernung zuzuzählen								
11	5	7	10	12	15	20	25	30	35
12	10	15	20	25	30	40	50	60	70
13	15	22	30	37	45	60	75	90	105
14	20	30	40	50	60	80	100	120	140
15	25	37	50	62	75	100	125	150	175
16	30	45	60	75	90	120	150	180	210
17	35	52	70	87	105	140	175	210	245
18	40	60	80	100	120	160	200	240	280

Hat der Übungsleiter z. B. die 50-prozentige Streuung 60 dem Schießen zu Grunde gelegt und wird die Zahl 4 mit den Würfeln geworfen, so ist nach der Tabelle 105 von der kommandierten Entfernung abzuziehen, wird dagegen die Zahl 12 geworfen, so ist 30 zuzuzählen. Auf Grund der so bestimmten Entfernung des Geschoß-

*) Nach General **Rohne** werden bei Verwendung des Schwarzpulvers 62% der Schüsse richtig, 31% fraglich und 7% falsch beobachtet. Nach Oberstleutnant **Callenberg** ist das Verhältnis der falschen zu den richtigen Beobachtungen bei rauchschwachem Pulver in den Monaten Dezember bis Februar 1 : 14·5, in den übrigen Monaten 1 : 24·3. Nach statistischen Daten der russischen Feldartillerieschießschulen ist bei rauchschwachem Pulver das Verhältnis der falsch zu den richtig beobachteten Schüssen 1 : 4·1 bis 1 : 10·8.

aufschlages ist hierauf dem Übenden die Abweichung vom Ziele dem Sinne nach — kurz oder weit — anzugeben oder durch einen Apparat zu versinnlichen*).

Um auch falsche und zweifelhafte (fragliche) Beobachtungen berücksichtigen zu können, füge man zu den drei Würfeln überdies noch drei andere Würfel hinzu. Von diesen drei Würfeln sind zwei Würfel mit je 3 schwarzen und 3 weißen Flächen versehen, ein Würfel besitzt 2 schwarze und 4 weiße Flächen und ein Würfel, gleichgültig welcher von diesen drei Würfeln, trägt auf einer weißen Fläche noch den Buchstaben *z* (zweifelhaft) oder ein Fragezeichen.

Ein mit 3 schwarzen und 3 weißen Flächen versehener Würfel wird eine schwarze Fläche mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{6}$ zeigen, während der Würfel mit 2 schwarzen und 4 weißen Flächen eine schwarze Fläche mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{6}$ zeigen wird.

Die Wahrscheinlichkeit, daß alle drei Würfel gleichzeitig schwarze Flächen zeigen, ist nach dem Satze von den voneinander unabhängigen Ereignissen:

$$p_f = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{18}{216} = \frac{1}{12}.$$

Der Buchstabe *z* oder das Fragezeichen wird mit der Wahrscheinlichkeit

$$p_z = \frac{1}{6} = \frac{36}{216} = \frac{2}{12}$$

erscheinen.

Die Wahrscheinlichkeit, daß weder 3 schwarze Flächen noch der Buchstabe *z* oder das Fragezeichen durch die drei beigegebenen Würfel geworfen werden, ist

$$p_r = 1 - p_f - p_z = \frac{216}{216} - \frac{18}{216} - \frac{36}{216} = \frac{162}{216} = \frac{9}{12};$$

Denn weil irgend ein Fall von den drei angeführten Fällen eintreten muß, besteht die Gleichung:

$$p_r + p_f + p_z = 1.$$

*) Es ist wichtig, daß sich der Gedankengang des Übenden beim Schießspiel in möglichst ähnlicher Weise abwickelt wie beim wirklichen Schießen; deshalb ist es auch nicht gleichgültig, ob dem Übenden vom Übungsleiter die Abweichungen einfach angegeben werden, oder ob der Übende gezwungen wird, seine Kombinationen auf Erscheinungen zu gründen, die der Wirklichkeit möglichst entsprechen. Das beste Schießspiel ist daher eine rationell geleitete Übung mit Markierpatronen.

Man kann nun folgende Regeln festsetzen:

a) Die Beobachtung ist zweifelhaft oder fraglich, wenn der Buchstabe *z* oder das Fragezeichen erscheint;

b) die Beobachtung ist falsch, wenn 3 schwarze Flächen erscheinen und

c) die Beobachtung ist richtig, wenn keiner der Fälle *a)* und *b)* eintritt.

Die drei mit den Punktzahlen 1 bis 6 versehenen Würfel, welche gleichzeitig mit den 3 schwarzweißen Würfeln für den Übenden nicht sichtbar geworfen werden, geben die wahrscheinlichen Abweichungen von der kommandierten Entfernung an*) und ermöglichen dem Übungsleiter, die Lage des Aufschlagpunktes zum Ziele zu bestimmen; der Übungsleiter gibt nun dem Übenden im Falle *c)* die Lage des Aufschlages zum Ziele richtig, im Falle *b)* falsch und im Falle *a)* gar nicht, den Geschoßaufschlag als nicht beobachtet, an.

Es beträgt nun die Wahrscheinlichkeit für eine

richtige Beobachtung $\frac{9}{12}$,	entspricht 75·00%
falsche Beobachtung $\frac{1}{12}$,	entspricht 8·33%
zweifelhafte Beobachtung $\frac{2}{12}$,	entspricht 16·67%
Summe $\frac{12}{12}$,	entspricht 100%.

Das Verhältnis der falschen zu den richtigen Beobachtungen 1 : 9 entspricht den von General **Rohne** und in den russischen Feldartillerieschießschulen ermittelten statistischen Daten (siehe „Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens" Jahrgang 1899, 12. Heft) und kann vom Übungsleiter durch entsprechende Kombination der beigegebenen Würfel mit weißen und schwarzen Flächen der Situation entsprechend abgeändert werden.

Wendet man z. B. zwei Würfel mit je 2 schwarzen und 4 weißen Flächen und mit einem Buchstaben *z* oder mit einem Fragezeichen an und bestimmt, daß 2 schwarze Flächen eine falsche Beobachtung bedeuten, so ist die Wahrscheinlichkeit für eine

*) Die kommandierte Entfernung weicht von der Aufsatzdistanz um die sogenannte Tagesrelation ab; diese hat jedoch als sogenannte konstante Abweichung auf den Gang des Schießens und auf die zum Einschießen notwendige Schußzahl keinen Einfluß.

falsche Beobachtung $p_f = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{36}$, entspricht 11·1%

zweifelhafte Beobachtung $p_z = \frac{1}{6} = \frac{6}{36}$, entspricht 16·7%

richtige Beobachtung $p_r = 1 - p_f - p_z = \frac{26}{36}$, entspricht 72·2%

Summe $\frac{36}{36}$, entspricht 100%.

Dies ist gegenüber dem früheren ein ungünstigerer Fall, da das Verhältnis der falschen zu den richtigen Beobachtungen $2:13 = 1:6{\cdot}5$ beträgt.

Will man die zweifelhaften Beobachtungen vermindern, so kann man die im ersten Falle angenommenen drei Würfel mit je 3 Buchstaben z oder mit je 3 Fragezeichen versehen und jene Schüsse als fraglich annehmen, bei welchen 3 Fragezeichen gleichzeitig erscheinen.

Es ist in diesem Falle die Wahrscheinlichkeit für eine

zweifelhafte Beobachtung $p_z = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{27}{216}$, entspricht 12·5%

falsche Beobachtung $p_f = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{18}{216}$, entspricht 8·3%

richtige Beobachtung $p_r = 1 - p_f - p_z = \frac{171}{216}$, entspricht 79·2%.

Das Verhältnis der falschen zu den richtigen Beobachtungen beträgt hier $18:171 = 2:19 = 1:9{\cdot}5$.

13. Anwendung des Problems von Moivre auf den speziellen Fall $s = 3$ und $n = 28$.

A) Eine Urne enthält 28 mit 1, 2, 3, ..., 28 bezeichnete Kugeln. Man führt nacheinander 3 Ziehungen aus und legt jedesmal die gezogene Kugel, nachdem man ihre Nummer notiert hat, zurück. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Summe der erschienenen Nummern z sei?

In diesem Falle ist $s = 3$ und $n = 28$ zu setzen; die Summe z der in drei Ziehungen erschienenen Nummern kann einen der Werte 3, 4, 5, ..., $3 \cdot 28 = 84$ erhalten. Die Anzahl der möglichen Fälle beträgt $n^s = 28^3 = 21\,952$.

Für die zu suchende Wahrscheinlichkeit P_z ergibt sich nach Gleichung 12) oder 13) des Punktes 11 dieses Abschnittes die Formel:

$$1)\quad P_z = \frac{1}{28^3}\left\{\binom{z-1}{z-3} - \binom{3}{1}\binom{z-29}{2} + \binom{3}{2}\binom{z-57}{2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{28^3}\left\{\frac{(z-2)(z-1)}{2} - 3\,\frac{(z-29)(z-30)}{2} + 3\,\frac{(z-57)(z-58)}{2}\right\}.$$

Zur Bestimmung von P_z beziehungsweise g_z werden aber nicht immer alle drei Glieder auf der rechten Seite benützt; es gilt

$$2)\qquad P_z = \frac{1}{28^3}\,\frac{(z-2)(z-1)}{2}$$

für $z = 3$ bis einschließlich $z = 30$,

$$3)\qquad P_z = \frac{1}{28^3}\left\{\frac{(z-2)(z-1)}{2} - 3\,\frac{(z-29)(z-30)}{2}\right\}$$

für $z = 31$ bis einschließlich $z = 58$; die dreigliedrige Formel wird benützt für $z = 59$ bis einschließlich $z = 84$.

Offenbar kann jede der 82 Zahlen von 3 bis 84 als Summe z der drei Ziehungen resultieren. Die Bestimmung der Anzahl der günstigen Fälle g_z für das Erscheinen dieser Summen kann auf Grund der angeführten Formeln 1), 2) und 3) vorgenommen werden. Man findet beispielsweise

$$g_5 = \frac{(5-2)(5-1)}{2} = 6,$$

$$g_{20} = \frac{(20-2)(20-1)}{2} = \frac{18.19}{2} = 171,$$

$$g_{26} = \frac{(26-2)(26-1)}{2} = \frac{24.25}{2} = 300,$$

$$g_{61} = \frac{(61-2)(61-1)}{2} - 3\,.\,\frac{(61-29)(61-30)}{2} +$$

$$+ 3\,.\,\frac{(61-57)(61-58)}{2} = \frac{59.60}{2} - 3\,.\,\frac{32.31}{2} + 3\,.\,\frac{4.3}{2} =$$

$$= 1770 - 1488 + 18 = 300.$$

Es besteht demnach für das Erscheinen der Summen 26 und 61 in 3 Ziehungen dieselbe Wahrscheinlichkeit. Die Bestimmung der Werte g_z braucht überhaupt nur bis g_{43} durchgeführt zu werden, weil die Werte g_{44} bis einschließlich g_{84} den Werten g_3 bis einschließlich g_{43} in umgekehrter Ordnung gleich sind.

Es ist sonach $P_{26} = P_{61} = \frac{g_{26}}{28^3} = \frac{g_{61}}{28^3} = \frac{300}{21\,952} = \frac{75}{5\,488}$.

Weiters ergibt sich beispielsweise

$$g_{31} = \frac{(31-2)(31-1)}{2} - 3 \cdot \frac{(31-29)(31-30)}{2} = 432,$$

$$g_{43} = \frac{(43-2)(43-1)}{2} - 3 \cdot \frac{(43-29)(43-30)}{2} = 588.$$

Um die Wahrscheinlichkeit P_z zu erhalten, mit welcher eine bestimmte von den möglichen Summen 3 bis 84, allgemein die Summe z, erscheinen kann, dividiert man die aus der Spalte 2 der auf den Seiten 370 und 371 befindlichen Tabelle zu entnehmende Zahl g_z, welche die Anzahl aller günstigen Fälle angibt, durch die Anzahl aller möglichen Fälle $28^3 = 21\,952$. Die sich ergebenden Wahrscheinlichkeiten P sind in der Spalte 3 dieser Tabelle enthalten.

B) Berechnung der Tabelle der Wahrscheinlichkeitsfaktoren.

Die Zahlen der Spalte 3 stellen auch ein theoretisches Trefferbild für symmetrische Parallelstreifen von gleicher Breite dar.

Da die Zahlen 3 bis 84 von Einheit zu Einheit zunehmen, ihre Abstände daher einander gleich sind, kann man diese Abstände mit gleich breiten Parallelstreifen einer zu treffenden Fläche vergleichen.

Am größten ist die Anzahl der günstigen Fälle für das Erscheinen der Summen 43 und 44, nämlich je 588; der dem mittleren Treffpunkte entsprechende Punkt fällt daher zwischen die Zahlen 43 und 44.

Übergeht man von der Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen dieser Zahlen auf die Wahrscheinlichkeit für das Treffen, so folgt, daß der Parallelstreifen AB aus 82, je einer Einheit entsprechenden, daher gleich breiten Parallelstreifen besteht; derselbe enthält alle Treffer, weil die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Spalte 3 die Zahl 1 ergibt.

Um nun die Wahrscheinlichkeit zu erhalten, mit welcher ein Parallelstreifen von beliebiger Breite innerhalb AB, z. B. der Parallelstreifen CD, getroffen wird, braucht man nur nach dem Satze von den einander ausschließenden Ereignissen die Wahrscheinlichkeiten der Spalte 3 zwischen C und D zu addieren; es ergibt sich auf diese Weise als Wahrscheinlichkeit für das Treffen des Parallelstreifens CD der Wert 0·5056, also nahezu 0·5.

Nimmt man die 50-prozentige Streuung s_{50} als Maßeinheit für die Breite eines Parallelstreifens an, so hat, wie man sich leicht überzeugen kann, der Parallelstreifen

EF	die	Breite	$0{\cdot}1\,s_{50}$,
GH	„	„	$0{\cdot}2\,s_{50}$,
CD	„	„	$1{\cdot}0\,s_{50}$,
JK	„	„	$3{\cdot}3\,s_{50}$,
LM	„	„	$4{\cdot}0\,s_{50}$,
AB	„	„	$4{\cdot}1\,s_{50}$.

Man erhält die Wahrscheinlichkeit, mit welcher der Parallelstreifen EF von der Breite $0{\cdot}1\,s_{50}$ getroffen werden kann, durch die Summierung der zwischen E und F liegenden Zahlen der Spalte 3 mit 0·0536; auf diese Weise wird die durch die Spalten 6 und 7 dargestellte Tabelle der Wahrscheinlichkeitsfaktoren für symmetrische Parallelstreifen gewonnen.

Die Spalte 6 enthält die relative Zieldimension k und die Spalte 7 die auf die beschriebene Art berechnete Wahrscheinlichkeit, mit welcher der Parallelstreifen von der in der Spalte 6 angegebenen relativen Zieldimension mit einem Schusse getroffen werden kann.

Die den relativen Zieldimensionen der Spalte 6 entsprechenden Prozentzahlen bei Zugrundelegung des Gaußschen Gruppierungsgesetzes sind in der Spalte 8 ausgewiesen. Bestimmt man aus den Wahrscheinlichkeitswerten der Spalte 7 die Prozentzahlen, so ist ersichtlich, daß letztere mit jenen in der Spalte 8 eingetragenen Prozentzahlen nahezu übereinstimmen. Die durch die Spalten 6 und 7 dargestellte Tabelle der Wahrscheinlichkeitsfaktoren genügt daher auch für alle Fälle der Praxis.

Die Zahlen der Spalte 7 kann man selbstverständlich auch erhalten, wenn die entsprechenden Zahlen der Spalte 2 (Anzahl der günstigen Fälle) addiert und durch $28^3 = 21\,952$ (Anzahl aller möglichen Fälle) dividiert werden. So ergibt sich z. B. die Wahrscheinlichkeit für das Treffen des Parallelstreifens GH von der Breite $0{\cdot}2\,s_{50}$, wenn die entsprechenden 4 Zahlen der Spalte 2 zwischen G und H addiert und durch 28^3 dividiert werden:

$$P_{GH} = \frac{2\,(586 + 588)}{21\,952} = 0{\cdot}1070.$$

Da die Zahlen der Spalte 2 zum mittleren Treffpunkte symmetrisch angeordnet sind, genügt es, nur die Zahlen einer Seite zu addieren und durch $\frac{28^3}{2} = 10\,976$ zu dividieren; es ist somit auch

$$P_{GH} = \frac{586 + 588}{10\,976} = 0{\cdot}1070.$$

z	g_z	P_z	$\sum_{3}^{z} i\, g_i$	$s_{z}'' - \sum_{3}^{z} i\, g_i = \sum_{z+1}^{43} i\, g_i$	Relative Zieldimension k, ausgedrückt durch s_{50}	Wahrscheinlichkeit, berechnet mit Hilfe der Angaben in Spalte 3 oder 2	Trefferprozente nach dem Gaußschen Fehlergesetze
1	2	3	4	5	6	7	8
3	1	0·000 0_5	1	10 975	0·1	0·053 6	5
4	3	0·000 1	4	10 972	0·2	0·107 0	11
5	6	0·000 3	10	10 966	0·3	0·160 0	16
6	10	0·000 5	20	10 956	0·4	0·212 5	21
7	15	0·000 7	35	10 941	0·5	0·264 2	26
8	21	0·001 0	56	10 920	0·6	0·315 1	31
9	28	0·001 3	84	10 892	0·7	0·364 8	36
10	36	0·001 6	120	10 856	0·8	0·413 3	41
11	45	0·002 1	165	10 811	0·9	0·463 8	46
12	55	0·002 5	220	10 756	1·0	0·505 6	50
13	66	0·003 0	286	10 690	1·1	0·549 2	54
14	78	0·003 6	364	10 612	1·2	0·590 7	58
15	91	0·004 1	455	10 521	1·3	0·630 1	62
16	105	0·004 8	560	10 416	1·4	0·667 1	66
17	120	0·005 5	680	10 296	1·5	0·701 5	69
18	136	0·006 2	816	10 160	1·6	0·733 5	72
19	153	0·007 0	969	10 007	1·7	0·763 1	75
20	171	0·007 8	1 140	9 836	1·8	0·790 5	78
21	190	0·008 7	1 330	9 646	1·9	0·815 6	80
22	210	0·009 6	1 540	9 436	2·0	0·838 6	82
23	231	0·010 5	1 771	9 205	2·1	0·859 7	84
24	253	0·011 5	2 024	8 952	2·2	0·878 8	86
25	276	0·012 6	2 300	8 676	2·3	0·896 1	88
26	300	0·013 7	2 600	8 376	2·4	0·911 7	90
27	325	0·014 8	2 925	8 051	2·5	0·925 7	91
28	351	0·016 0	3 276	7 700	2·6	0·938 0	92
29	378	0·017 2	3 654	7 322	2·7	0·949 0	93
30	406	0·018 5	4 060	6 916	2·8	0·958 5	94
31	432	0·019 7	4 492	6 484	2·9	0·966 8	95
32	456	0·020 8	4 948	6 028	3·0	0·973 9	96
33	478	0·021 8	5 426	5 550	3·1	0·980 0	96

Die Spalte 4 enthält die Summen $\sum_{3}^{z} i\, g_i$, die Spalte 5 die Summen $\sum_{z+1}^{43} i\, g_i$ ausgewiesen und es muß

$$\sum_{3}^{z} i\, g_i + \sum_{z+1}^{43} i\, g_i = 10\,976$$

sein.

Es ist daher die Wahrscheinlichkeit für das Treffen des Parallelstreifens JK, welcher die Breite $3{\cdot}3\, s_{50}$ hat,

$$P_{JK} = \frac{21\,952 - \sum_{3}^{10} i\, g_i - \sum_{77}^{84} i\, g_i}{21\,952}$$

und da

$$\sum_{3}^{10} i\, g_i = \sum_{77}^{84} i\, g_i = 120$$

ist, so folgt

$$P_{JK} = \frac{10\,976 - \sum_{3}^{10} i\, g_i}{10\,976} = \frac{10\,976 - 120}{10\,976} = \frac{10\,856}{10\,976} = 0{\cdot}9891.$$

34	498	0·022 7	5 924	5 052	3·2	0·985 0	97
35	516	0·023 5	6 440	4 536	3·3	0·989 1	97
36	532	0·024 2	6 972	4 004	3·4	0·992 3	98
37	546	0·024 9	7 518	3 458	3·5	0·994 9	98
38	558	0·025 4	8 076	2 900	3·6	0·996 8	99
39	568	0·025 9	8 644	2 332	3·7	0·998 2	99
40	576	0·026 2	9 220	1 756	3·8	0·999 1	99
41	582	0·026 5	9 802	1 174	3·9	0·999 6	99
42	586	0·026 7	10 388	588	4·0	0·999 9	99
43	588	0·026 8	10 976	0	4·1	1·000 0	
44	588	0·026 8					
45	586	0·026 7					
46	582	0·026 5					
47	576	0·026 2					
48	568	0·025 9					
49	558	0·025 4					
50	546	0·024 9					
51	532	0·024 2					
52	516	0·023 5					
53	498	0·022 7					
54	478	0·021 8					
55	456	0·020 8					
56	432	0·019 7					
57	406	0·018 5					
58	378	0·017 2					
59	351	0·016 0					
60	325	0·014 8					
61	300	0·013 7					
62	276	0·012 6					
63	253	0·011 5					
64	231	0·010 5					
65	210	0·000 6					
66	190	0·008 7					
67	171	0·007 8					
68	153	0·007 0					
69	136	0·006 2					
70	120	0·005 5					
71	105	0·004 8					
72	91	0·004 1					
73	78	0·003 6					
74	66	0·003 0					
75	55	0·002 5					
76	45	0·002 1					
77	36	0·001 6					
78	28	0·001 3					
79	21	0·001 0					
80	15	0·000 7					
81	10	0·000 5					
82	6	0·000 3					
83	3	0·000 1					
84	1	0·000 0					
Summe	21 952	1·000 0					

Übereinstimmend mit dieser Aufgabe ist die folgende:

Die Wahrscheinlichkeit für das Werfen einer von den Summen 11 bis einschließlich 76 zu bestimmen.

C) Summatorisches Glied für $\sum_{3}^{z} i g_i$, wobei z irgend einen der Werte 3 bis einschließlich 43 annehmen kann.

Die Zahlen in der Spalte 2 von 1 bis einschließlich 406 sind Dreieckszahlen (Trigonalzahlen), welche unter die Gattung der sogenannten figurierten Zahlen (siehe Punkt 14 dieses Abschnittes) gehören. Der Summe z als Resultat der 3 Würfe entsprechen g_z günstige Fälle und es bedeutet demnach g_z die $(z-2)$-te $= i$-te Dreieckszahl. Zur Bestimmung von g_z dient, wie gezeigt wurde, die Formel $g_z = \binom{z-1}{z-s}$ worin $s = 3$ zu setzen ist; man hat also

$$g_z = \binom{z-1}{z-3} = \binom{z-1}{2} = \frac{(z-1)(z-2)}{2}.$$

Wie im Punkte 14 dieses Abschnittes bewiesen werden wird, beträgt die Summe der ersten i Trigonalzahlen

4) $$\frac{i(i+1)(i+2)}{6} = \frac{(z-2)(z-1)z}{6}.$$

Die Gesamtzahl der günstigen Fälle für das Werfen der Summen $z=3$ bis einschließlich $z=30$ ist hienach gleich der Summe der ersten 28 Trigonalzahlen und diese beträgt

$$\sum_3^{30}{}_z g_z = \frac{28 \,.\, 29 \,.\, 30}{6} = 4060.$$

Die den Zeigern $z=31$ bis $z=43$ entsprechenden g_z können keine Trigonalzahlen sein, weil ihre Berechnung nach der Formel $g_z = \binom{z-1}{z-3} - \binom{3}{1}\binom{z_1-1}{2}$ erfolgt, welche von der Formel zur Berechnung der aufeinander folgenden Dreieckszahlen verschieden ist. Zur Berechnung von g_z für $z=31$ bis einschließlich $z=43$ (die Berechnung braucht, wie schon gesagt wurde, nur bis $z=43$ durchgeführt zu werden), hat man sonach

$$g_z = \binom{z-1}{z-3} - \binom{3}{1}\binom{z-29}{2} = \frac{(z-1)(z-2)}{2} - 3\frac{(z-29)(z-30)}{2}.$$

Von der durch 4) gegebenen Summe ist daher die $\frac{3}{2}$-fache Summe der Reihe, deren allgemeines Glied $(z-29)(z-30)$ ist, zu subtrahieren. Setzt man in demselben nacheinander $z=31$, 32, 33 u. s. w. ein, so folgt als Schema dieser Reihe

$$\begin{array}{ccccccccccc} 2, & & 6, & & 12, & & 20, & & 30, & & 32, \ldots\ldots \\ & 4, & & 6, & & 8, & & 10, & & 12, \ldots\ldots\ldots & \\ & & 2, & & 2, & & 2, & & 2, \ldots\ldots\ldots\ldots & & \end{array}$$

Das summatorische Glied dieser Reihe heißt

$$iu_0 + \frac{i(i-1)}{2}\Delta u_0 + \frac{i(i-1)(i-2)}{6}\Delta^2 u_0 = 2i + 2i(i-1) +$$
$$+ \frac{1}{3}i(i-1)(i-2) = \frac{6i^2 + i(i-1)(i-2)}{3} = \frac{i(i+1)(i+2)}{3},$$

oder weil $i = z-30$ ist,

$$\frac{(z-30)(z-29)(z-28)}{3}.$$

Man hat also für die Summe der g_z, gültig von $z=31$ bis einschließlich $z=43$,

5) $$\frac{(z-2)(z-1)z - 3(z-30)(z-29)(z-28)}{6}.$$

Beispielsweise ist

$$\sum_3^{31} g_i = \frac{(31-2)(31-1)31 - 3(31-30)(31-29)(31-28)}{6} = 4492$$

und

$$\sum_3^{43} g_i = \frac{(43-2)(43-1)43 - 3(43-30)(43-29)(43-28)}{6} =$$

$$= 10\,976 = \frac{28^3}{2}.$$

14. Figurierte Zahlenreihen.

a) Entstehung der figurierten Zahlenreihen.

Bildet man, von einer arithmetischen Reihe der k-ten Ordnung ausgehend, die aufeinander folgenden Summenreihen, so sind diese nach Punkt 6 des IV. Abschnittes dieses Bandes wieder arithmetische Reihen der $(k+1)$-ten, $(k+2)$-ten u. s. w. Ordnung, deren allgemeine und summatorische Glieder sich ohne Schwierigkeit finden lassen. Läßt man insbesondere die Hauptreihe die arithmetische Reihe der 1. Ordnung sein, deren erstes Glied 1 und deren konstante Differenz irgend eine ganze Zahl d ist, also die Reihe

1) $\quad 1,\ 1+d,\ 1+2d,\ 1+3d, \ldots\ldots,\ 1+nd, \ldots\ldots,$

so ist deren erste Summenreihe:

2) $\quad 1,\ 2+d,\ 3+3d,\ 4+6d,\ 5+10d, \ldots\ldots,$

für welche als arithmetische Reihe der zweiten Ordnung, wenn u_0 das Anfangsglied 1 bezeichnet, das n-te Glied u_{n-1} durch

3) $$u_{n-1} = 1 + (n-1)(1+d) + \binom{n-1}{2} d = \frac{1}{2} n \left\{2 + (n-1)d\right\} = \\ = \frac{(2-d)n + dn^2}{2},$$

gegeben ist; die Summe ihrer n ersten Glieder ist dargestellt durch

4) $$s_n = n + \binom{n}{2}(1+d) + \binom{n}{3} d = \frac{1}{6} n(n+1)\left\{(n-1)d + 3\right\} = \\ = \frac{(3-d)n + 3n^2 + dn^3}{6}.$$

Als zweite Summenreihe erhält man

5) $\quad 1,\ 3+d,\ 6+4d,\ 10+10d,\ 15+20d, \ldots\ldots,$

für welche als arithmetische Reihe der dritten Ordnung

6) $u_{n-1} = 1 + (n-1)(2+d) + \binom{n-1}{2}(1+2d) + \binom{n-1}{3}d =$

$= \frac{1}{6}n(1+n)\{3+(n-1)\} = \frac{3-d}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{d}{6}n^3,$

7) $s_n = n + \binom{n}{2}(2+d) + \binom{n}{3}(1+2d) + \binom{n}{4}d =$

$= \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)\{(n-1)d+4\} =$

$= \frac{(4-d)n}{12} + \frac{(12-d)n^2}{24} + \frac{(2+d)n^3}{12} + \frac{dn^4}{24}$

sich ergibt u. s. w.

Diese aufeinander folgenden Summenreihen 2), 5), ... sind unter dem Namen **figurierte Zahlenreihen** beziehungsweise der ersten, zweiten u. s. w. Ordnung bekannt; insbesondere heißt 2) die Reihe der **Polygonal- oder Vieleckszahlen**; 5) die Reihe der **Pyramidalzahlen**. Setzt man in diesen Reihen nacheinander

$$d = 1,\ d = 2,\ d = 3, \ldots\ldots, d = m-2,$$

so ergeben sich aus 2) die besonderen Reihen der Dreiecks-, Vierecks-, Fünfecks-, ..., m-Eckszahlen; aus 5) jene der dreiseitigen, vierseitigen, fünfseitigen, ..., m-seitigen Pyramidalzahlen.

b) Die Polygonalzahlen oder figurierte Zahlen der ersten Ordnung.

Für die Reihe der Polygonalzahlen hat man:

$$1,\ 2+d,\ 3+3d,\ 4+6d,\ 5+10d, \ldots\ldots$$

$$u_{n-1} = \frac{(2-d)n + dn^2}{2},\quad s_n = \frac{(3-d)n + 3n^2 + dn^3}{6}.$$

Für $d = m - 2$ ergeben sich hieraus die m-Eckzahlen; diese bilden also die Reihe:

$$1,\ m,\ 3m-3,\ 6m-8,\ 10m-15\ \ldots\ldots;$$

hiefür findet man

$$u_{n-1} = \frac{(m-2)n^2 - (m-4)n}{2},\quad s_n = \frac{(m-2)n^3 + 3n^2 - (m-5)n}{6}.$$

Wird hierin nach und nach $m = 3, 4, 5, 6, \ldots\ldots$ gesetzt, so folgt für die

Dreieckszahlen 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ...

$$u_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2},\quad s_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6};$$

Viereckszahlen 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...

$$u_{n-1} = n^2, \quad s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

Fünfeckszahlen 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, ...

$$u_{n-1} = \frac{n(3n-1)}{2}, \quad s_n = \frac{n^2(n+1)}{2};$$

Sechseckszahlen 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, ...

$$u_{n-1} = n(2n-1), \qquad s_n = \frac{1}{6} n(n+1)(4n-1) \text{ u. s. w.}$$

c) Die Pyramidalzahlen oder figurierte Zahlen der zweiten Ordnung.

Für die Reihe der Pyramidalzahlen hat man:

$$1,\ 3+d,\ 6+4d,\ 10+10d,\ 15+20d, \ldots\ldots,$$

$$u_{n-1} = \frac{3-d}{6} n + \frac{1}{2} n^2 + \frac{d}{6} n^3,$$

$$s_n = \frac{(4-d)n}{12} + \frac{(12-d)n^2}{24} + \frac{(2+d)n^3}{12} + \frac{dn^4}{24}.$$

Für $d = m - 2$ ergeben sich hieraus die m-seitigen Pyramidalzahlen; diese bilden also die Reihe:

$$1,\ m+1,\ 4m-2,\ 10m-10, \ldots\ldots;$$

hiefür findet man

$$u_{n-1} = \frac{5-m}{6} n + \frac{n^2}{2} + \frac{m-2}{6} n^3,$$

$$s_n = \frac{6-m}{12} n + \frac{14-m}{24} n^2 + \frac{m}{12} n^3 + \frac{m-2}{24} n^4.$$

Wird hierin nach und nach $m = 3, 4, 5, 6, \ldots\ldots$ gesetzt, so folgt für die

dreiseitigen Pyramidalzahlen 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, ...

$$u_{n-1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}, \quad s_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24};$$

vierseitigen Pyramidalzahlen 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, ...

$$u_{n-1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad s_n = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12};$$

fünfseitigen Pyramidalzahlen 1, 6, 18, 40, 75, 126, 196, ...

$$u_{n-1} = \frac{n^2(n+1)}{2}, \quad s_n = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24} \text{ u. s. w.}$$

d) Geometrische Darstellung der Polygonalzahlen oder m-Eckzahlen.

Es soll noch der Grund angeführt werden, warum die Glieder der Reihe

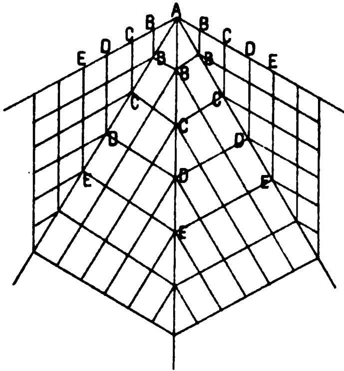
$$1,\ m,\ 3m-3,\ 6m-8,\ 10m-15,\ldots\ldots$$

m-Eckzahlen genannt werden. Das Schema der Reihe ist

$1,$	$m,$	$3m-3,$	$6m-8,$	$10m-15,\ldots$	Hauptreihe,
$m-1,$	$2m-3,$	$3m-5,$	$4m-7,\ldots\ldots\ldots\ldots$		1. Differenzreihe,
	$m-2,$	$m-2,$	$m-2,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$		2. Differenzreihe.

Konstruiert man ein reguläres m-Eck $ABBB\ldots\ldots$ (Fig. 29) und verlängert beliebig die durch eine Ecke A gehenden Seiten und Diagonalen desselben, trägt auf diesen Verlängerungen Seiten beziehungsweise Diagonalen beliebig oft nach C, D, $E,\ldots\ldots\ldots$ auf und verbindet die aufeinander folgenden Punkte C, C, $C,\ldots\ldots$, ebenso D, D, $D,\ldots\ldots$ u. s. w. durch gerade Linien, so sind diese, wie sich leicht ergibt, den Polygonseiten parallel und

Fig. 29.



$$BB = \frac{1}{2}CC = \frac{1}{3}DD = \frac{1}{4}EE\ldots.$$

Führt man durch die Punkte $B, C, D,\ldots$ Parallele zu den in A sich schneidenden Polygonseiten und Diagonalen, so werden die Strecken CC in zwei, die Strecken DD in drei, die Strecken EE in vier .... gleiche Teile geteilt.

Aus dieser Konstruktion kann man folgende Schlüsse ziehen:

α) Jeder der Umfänge $BBB\ldots$, $CCC\ldots.$, $DDD\ldots.$ u. s. w. enthält $m-2$ Seiten, weil die zwei in A zusammenstoßenden Seiten des m-Ecks entfallen. Die Seitenzahl dieser ohne Ende fortgehenden Umfänge stellt also die beständige Differenz $m-2$ der Hauptreihe dar.

β) Betrachtet man die Anzahl der Durchschnittspunkte auf jedem dieser Umfänge, so ergibt sich:

auf dem Umfange $BBB\ldots\ldots$ liegen $m-1$ Punkte, weil die Spitze A des m-Ecks fehlt;

auf dem Umfange $CCC\ldots\ldots$ liegen die $m-1$ mit C bezeichneten Punkte und auf jeder der $m-2$ Seiten ein Zwischenpunkt; im ganzen also $(m-1)+(m-2)=2m-3$ Punkte;

auf dem Umfange $DDD\ldots\ldots$ liegen die $m-1$ mit D bezeichneten Punkte und auf jeder der $m-2$ Seiten zwei Zwischenpunkte; im ganzen also $(m-1)+2(m-2)=3m-5$ Punkte;

Setzt man dies fort, so zeigt sich, daß die Anzahl der auf den einzelnen Umfängen liegenden Schnittpunkte die erste Differenzreihe

$$m-1,\ 2m-3,\ 3m-5,\ 4m-7,\ldots\ldots$$

der Hauptreihe darstellt.

γ) Werden endlich nach und nach die Punkte zusammengefaßt, welche in A, in A und im ersten Umfange, in A und in den zwei ersten Umfängen u. s. w. liegen, so ergeben sich die Glieder der Hauptreihe selbst, nämlich

$$1,\ m,\ 3m-3,\ 6m-8,\ldots\ldots,$$

wodurch die Benennung der Zahlen gerechtfertigt ist.

15. Ableitung von Fehlergesetzen bei der Annahme einer endlichen Anzahl von unabhängigen Elementarursachen.

a) Allgemeine Bemerkungen.

Jedes Ereignis wird in einem bestimmten Zeitpunkte, in einem bestimmten Punkte einer Bahn oder Strecke, einer Fläche oder des Raumes, in einem bestimmten Zeit-, Lage- oder Zustandsverhältnisse zu anderen Ereignissen u. s. w. durch das Zusammenwirken bestimmter bekannter oder unbekannter Ursachen hervorgerufen. Jedes Ereignis ist der Erfolg der Resultierenden aller das Ereignis beeinflussenden Ursachen.

Würden alle für und gegen das Zustandekommen eines Ereignisses wirkenden Ursachen bei jeder Wiederholung des Ereignisses in der mittleren, daher gleichen Richtung, mit der mittleren, daher gleichen Intensität, in den mittleren, daher denselben Zeitverhältnissen u. s. w. einwirken, so müßte das Ereignis bei jedesmaliger Wiederholung in demselben Punkte einer Strecke u. s. w. eintreten. Jener Punkt, in welchem das Ereignis bei Zugrundelegung dieser Annahmen eintreffen würde, soll allgemein Mittelpunkt, beim Schießen mittlerer Treffpunkt, genannt werden.

Nachfolgend soll nur der Fall berücksichtigt werden, bei welchem ein Ereignis in einem Punkte innerhalb einer bestimmten Strecke stattfinden kann. Diese Annahme erlaubt unmittelbar die Anwendung auf die Theorie des Schießens und ist leicht auf alle anderen Fälle übertragbar.

Die Grundlage für die Aufstellung eines Wahrscheinlichkeitsgesetzes bildet die Kenntnis des Einflusses der verschiedenen, für und gegen das Zustandekommen eines Ereignisses wirkenden Ursachen nach Richtung, Zeitverhältnis, Intensität u. s. w., weshalb diese Verhältnisse unter bestimmten, möglichst einfachen Annahmen hier untersucht werden sollen.

Beim Schießen haben auf die Lage des Treffpunktes zum mittleren Treffpunkte z. B. folgende Ursachen Einfluß: Änderungen des Abgangswinkels, des Ladungsgewichtes, Änderungen in der Beschaffenheit der Ladung, im Geschoßgewichte, in der Geschoßform, in der Luftdichte u. s. w. Da es praktisch ausgeschlossen ist, daß keine Änderungen in den in endlicher Zahl auftretenden Ursachen vorkommen, so muß bei jedem Schusse ein anderer Punkt getroffen werden.

Jede der genannten Änderungen wird selbst durch mehrere Ursachen hervorgerufen; so wirken z. B. auf die Änderungen im Abgangswinkel ein: Änderungen des Erhebungswinkels, dessen Größe selbst wieder von mehreren Nebenumständen abhängt; dann Änderungen, welche durch das verschiedene Aufstellen des Quadranten (Richtbogens) hervorgerufen werden; Änderungen, welche in der unvollkommenen Konstruktion des Quadranten (Richtbogens) ihre Ursache haben; Fehler, welche durch die Unempfindlichkeit des Quadranten (Richtbogens) gegen kleine Lageänderungen entstehen, u. s. w.

Jene Ursachen, welche sich nicht weiter zerlegen lassen, seien Elementarursachen genannt; jene Abweichung vom mittleren Treffpunkte, welche unter der Annahme entstehen würde, daß sich nur eine Elementarursache allein ändert, während alle anderen sich in ihrer Wirkung gleich bleiben, sei Elementarabweichung oder Elementarfehler genannt. Je mehr voneinander unabhängige Elementarursachen auf das Zustandekommen eines Ereignisses wirken, desto wahrscheinlicher ist es, daß sich die Wirkungen derselben gegenseitig aufheben, desto wahrscheinlicher sind daher auch kleine Abweichungen. Bei der Annahme unendlich vieler voneinander unabhängiger Elementarursachen ist es am wahrscheinlichsten, daß sich die Wirkungen derselben gegenseitig vollkommen aufheben; es gibt also bei dieser Annahme keine Streuung.

Aus dem Gesagten geht hervor, daß die folgenden Betrachtungen den Einfluß einer endlichen Anzahl von unabhängigen Elementarursachen behandeln werden und daß daher in den verschiedenen Fällen eine verschiedene Anzahl derselben in Betracht kommen wird. Es wird deshalb nebst Intensität und Art auch die Anzahl der Elementarursachen die Form des Wahrscheinlichkeitsgesetzes bedingen.

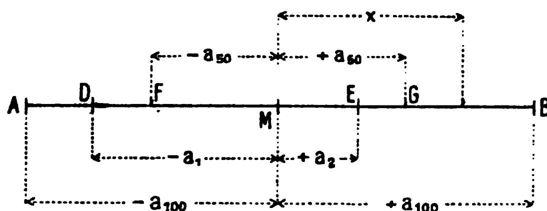
Ist die Anzahl der unabhängigen Elementarursachen und ihre Wirkung vollkommen klar, dann kann man, wie dies beim Beispiele mit den drei Würfeln gezeigt wurde, auch ein Gesetz aufstellen, welches verläßliche Antworten auf gestellte Fragen gibt. Gelingt es nachzuweisen, daß die Anzahl der unabhängigen Elementarursachen keinen wesentlichen Einfluß auf das Gesetz hat, so kann man bei unbekannter Anzahl derselben eine beliebige endliche Anzahl als Grundlage annehmen und auf um so genauere Resultate rechnen, je kleiner der Einfluß der Anzahl der Elementarursachen ist.

Als Grundlage für die Aufstellung des Gesetzes wird der Einfachheit halber die Annahme gemacht, daß alle in Betracht kommenden unabhängigen Elementarursachen sich an dem Zustandekommen des Ereignisses in ganz gleicher Weise beteiligen. Wirken also n unabhängige Elementarursachen für das Zustandekommen des Ereignisses zusammen und schaltet man $n-1$ unabhängige beliebige Elementarursachen aus, so daß das Ereignis nur durch eine einzige der n Elementarursachen hervorgerufen wird, so ist mit Rücksicht auf die obige Annahme die Wirkung in jedem Falle die gleiche.

b) Gesetz der zufälligen Abweichungen bei der Annahme einer Elementarursache.

Für den Fall, als nur eine einzige Elementarursache ein Ereignis hervorruft, gelte noch die Annahme, daß das Ereignis innerhalb einer bestimmten Strecke AB (Fig. 30) hervorgerufen werden muß, und zwar in jedem Punkte dieser Strecke mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Bezieht man die Punkte der Strecke AB, in welchen das Ereignis stattfinden muß, auf den Halbierungspunkt M derselben, so ist nach dem Gesagten die Wahrscheinlichkeit für das Zustandekommen des Ereignisses im Abstande x von M bei Einwirkung nur einer Elementarursache unabhängig vom Werte x, also für alle möglichen Werte von x zwischen $-a_{100}$ und $+a_{100}$ gleich. Da die endliche Strecke AB aus unendlich vielen Elementen dx zusammengesetzt ist, so ist die Wahrscheinlichkeit dP für das Eintreten des Ereignisses in einem bestimmten Elemente dieser Strecke oder im Intervalle $(x, x+dx)$ unendlich klein; es ist

Fig. 30.



$$1)\qquad dP = \frac{dx}{AB} = \frac{dx}{2\,a_{100}}.$$

In diesem Bruche repräsentiert dx die Anzahl der günstigen Fälle und $AB = 2\,a_{100}$ die Anzahl der möglichen Fälle.

Aus Gleichung 1) folgt für das Fehlerverteilungsgesetz oder für die Fehlerhäufigkeit die Formel

$$2)\qquad \frac{dP}{dx} = y = \frac{1}{2\,a_{100}} = \text{konstant},$$

übereinstimmend mit dem für y auf Seite 353 gefundenen Ausdrucke, mit Rücksicht darauf, daß α die Bedeutung von a_{100} hat.

Die der Einwirkung einer einzigen Elementarursache zugesprochene Eigenschaft, daß das Ereignis in jedem Elemente der Strecke AB mit gleicher Wahrscheinlichkeit eintreten kann, scheint in vielen Fällen mit der Wirklichkeit übereinzustimmen. Im Beispiele mit den 3 Würfeln bedeutet jeder der Würfel eine Elementarursache; die dort einwirkenden 3 Elementarursachen besitzen die erwähnte Eigenschaft, denn durch jeden der 3 Würfel können die Zahlen 1 bis 6 mit gleicher Wahrscheinlichkeit geworfen werden.

Zur weiteren Aufklärung über die einer Elementarursache zugesprochenen Eigenschaften soll die Wahrscheinlichkeit P_{DE} für das Eintreten des Ereignisses innerhalb einer gegebenen endlichen Strecke DE betimmt werden; diese ergibt sich aus der Gleichung 1) mit

$$3)\qquad P_{DE} = \int_{-a_1}^{a_2} \frac{dx}{2\,a_{100}} = \frac{a_2 + a_1}{2\,a_{100}} = \frac{DE}{2\,a_{100}};$$

für die Wahrscheinlichkeit P_{AB}, daß das Eintreten des Ereignisses irgendwo innerhalb der Strecke AB erfolgt, resultiert

$$4)\qquad P_{AB} = \int_{-a_{100}}^{a_{100}} \frac{dx}{2\,a_{100}} = \frac{2\,a_{100}}{2\,a_{100}} = 1,$$

was mit der ursprünglichen Annahme übereinstimmt; denn es wurde vorausgesetzt, daß das Ereignis durch eine einzige Elementarursache innerhalb der Strecke AB hervorgerufen werden muß.

Auf die üblichen Bezeichnungen beim Schießen übergehend, sei der Halbierungspunkt M der Strecke AB der mittlere Treffpunkt, die ganze Strecke AB, innerhalb welcher der Treffer liegen muß, die 100-prozentige Streuung s_{100}, der Abstand $-a_1$, $+a_2$, x u. s. w.

eines Treffers vom mittleren Treffpunkte die Abweichung, endlich der größte mögliche Abstand $-a_{100}$ beziehungsweise $+a_{100}$ eines Treffers die 100-prozentige Abweichung. Die Ausdehnung einer zum mittleren Treffpunkte M symmetrisch liegenden Strecke FG, welche durch einen Schuß mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ getroffen werden kann, wird bekanntlich die 50-prozentige oder wahrscheinliche Streuung s_{50} und die halbe 50-prozentige Streuung $\frac{s_{50}}{2} = a_{50}$ die 50-prozentige oder wahrscheinliche Abweichung genannt.

Die 50-prozentige Streuung folgt der Definition zufolge aus

$$5) \qquad P = \frac{1}{2} = \int_{-a_{50}}^{a_{50}} \frac{dx}{s_{100}} = \frac{2\,a_{50}}{s_{100}} = \frac{s_{50}}{s_{100}}$$

mit $s_{50} = \frac{1}{2} s_{100}$, was in der Natur der Annahme liegt.

Bei Einwirkung nur einer Elementarursache ist also die 50-prozentige Streuung gleich der halben 100-prozentigen Streuung. Dieses Resultat stimmt mit dem auf Seite 353 gefundenen Resultate überein, wo als Fehlerwahrscheinlichkeitskurve eine Strecke parallel zur Fehlerachse angenommen wurde.

c) Gesetz der zufälligen Abweichungen bei der Annahme von zwei unabhängigen Elementarursachen.

Sei für einen bestimmten Fall die Abweichung, welche von einer der beiden unabhängigen Elementarursachen allein hervorgerufen würde, x_1; die Abweichung, welche durch die andere Elementarursache allein hervorgerufen würde, sei x_2, so wird durch das Zusammenwirken beider Elementarursachen die Gesamtabweichung $x = x_1 + x_2$, algebraisch gedacht, hervorgerufen.

Mit Rücksicht auf die Eigenschaft, welche der Wirkung einer Elementarursache beigelegt wurden, liegen die Werte von x_1 und von x_2 zwischen $-a_{100}^{(1)}$ und $+a_{100}^{(1)}$; jeder beliebige Wert sowohl von x_1 als auch von x_2 innerhalb der angegebenen Grenzen hat die gleiche Wahrscheinlichkeit für sich. Selbstverständlich wird der größte Wert von $x = a_{100}^{(2)}$ den größten Werten von $x_1 = a_{100}^{(1)}$ und $x_2 = a_{100}^{(1)}$ entsprechen; daher muß

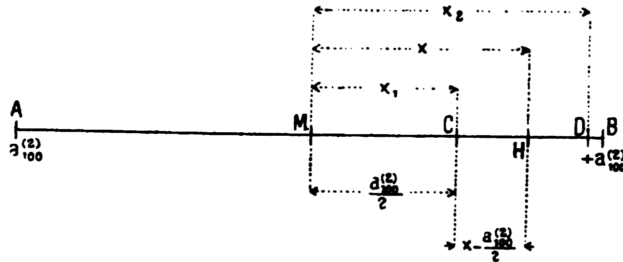
$$\pm a_{100}^{(2)} = \pm (a_{100}^{(1)} + a_{100}^{(1)}) = \pm 2\,a_{100}^{(1)} \text{ und } s_{100}^{(2)} = 2\,s_{100}^{(1)} \text{ sein.}$$

Durch zwei unabhängige Elementarursachen kann eine **bestimmte** Abweichung $x = x_1 + x_2$ auf verschiedene Art hervorgerufen werden:

denn es können sich die Werte x_1 und x_2 bei Einhaltung der Bedingung $x = x_1 + x_2$ innerhalb bestimmter Grenzen ändern. Der größte Wert, welchen x_1 (x_2) erreichen kann, ist offenbar $a_{100}^{(1)} = \frac{a_{100}^{(2)}}{2}$ und in diesem Falle muß gleichzeitig x_2 (x_1) den kleinsten Wert $x_2 = x - \frac{a_{100}^{(2)}}{2}$ annehmen.

Die Elementarabweichungen x_1 und x_2 können also bei einem bestimmten Werte von x alle Werte zwischen $\frac{a_{100}^{(2)}}{2}$ und $x - \frac{a_{100}^{(2)}}{2}$ annehmen. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der Abweichung x beim Zusammenwirken zweier unabhängiger Elementarursachen ist

Fig. 31.



proportional der Anzahl der zulässigen Werte von x_1 (x_2), also proportional der Streckenlänge

$$\frac{a_{100}^{(2)}}{2} - \left(x - \frac{a_{100}^{(2)}}{2}\right) = a_{100}^{(2)} - x.$$

Da nun x alle unendlich vielen Werte zwischen $-a_{100}^{2}$ und $+a_{100}^{(2)}$ annehmen kann, so ist die Wahrscheinlichkeit dP, eine bestimmte Gesamtabweichung x zu erreichen oder die Wahrscheinlichkeit, daß die Gesamtabweichung zwischen x und $x + dx$ liegt, unendlich klein, also:

6) $$dP = \frac{(a_{100}^{(2)} - x)\,dx}{c^2}.$$

Die Konstante c^2 muß offenbar von zweiter Dimension sein, weil die Wahrscheinlichkeit stets eine absolute Zahl ist.

Zu der Formel 6) gelangt man auch auf folgende Weise: Wird angenommen, daß das Ereignis durch eine Elementarursache im Punkte C (Fig. 31) im Abstande x_1 von M und von der zweiten Elementarursache im Punkte D im Abstande x_2 von M hervorgerufen worden wäre, so ist es naheliegend, daß durch das Zusammenwirken der beiden,

mit gleicher Intensität einwirkenden Ursachen das Ereignis im Halbierungspunkte H zwischen C und D hervorgerufen wird, also im Abstande $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ von M.

Man kann daraus folgern, daß das von zwei Elementarursachen hervorgerufene Ereignis stets dann im Punkte H hervorgerufen wird, wenn die beiden Elementarursachen, für sich allein betrachtet, das Ereignis beiderseits in gleichen Abständen von H hervorrufen. Da nun das Ereignis außerhalb von AB nicht stattfinden kann, so entspricht jedem Punkte der Strecke $HB = a_{100}^{(2)} - x$ ein Punkt C im gleichen Abstande links von H; diese beiden Punkte zusammen ergeben stets denselben Punkt H. Die Anzahl der günstigen Fälle ist daher proportional $HB = a_{100}^{(2)} - x$; die Wahrscheinlichkeit für das Hervorrufen des Ereignisses im Punkte H mit der Gesamtabweichung x ist daher auch proportional $a_{100}^{(2)} - x$; man hat also wie oben

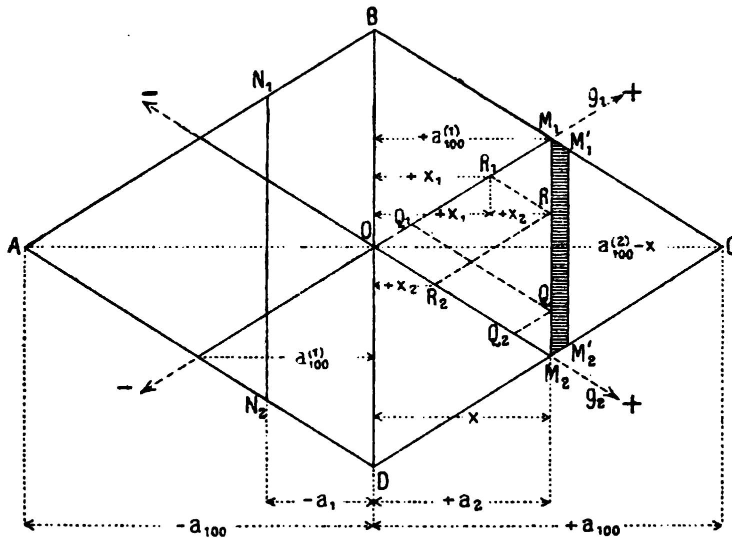
$$dP = \frac{(a_{100}^{(2)} - x)\, dx}{c^2}.$$

Wenn auch die Verhältnisse bei zwei Elementarursachen keinen besonderen Scharfblick erfordern, so steigern sich die Schwierigkeiten selbstverständlich mit der Zunahme der Elementarursachen, weshalb die Untersuchung nochmals an Hand einer graphischen Darstellung vorgenommen und überdies der Fall erörtert werden soll, bei welchem ein Ereignis in einem bestimmten Abstande von der Geraden BD (Fig. 32) beim Zusammenwirken von zwei unabhängigen Elementarursachen eintreten kann. Es sollen die senkrechten Abstände x_1 der Punkte der Geraden g_1 von BD in der Länge zwischen $-a_{100}^{(1)}$ und $+a_{100}^{(1)}$ alle möglichen Elementarabweichungen vorstellen, welche durch eine Elementarursache allein hervorgerufen werden können, ferner die Abstände x_2 der Punkte der Geraden g_2 ebenso alle Elementarabweichungen, welche durch die zweite Elementarursache allein verursacht werden können.

Bei der Annahme, daß durch eine Elementarursache das Ereignis im Punkte R_1 im Abstande $+x_1$ von BD eintritt, ferner durch die zweite Elementarursache im Punkte R_2 im Abstande $+x_2$ von BD hervorgerufen wird, gelangt man zum Punkte R, in welchem das Ereignis durch das Zusammenwirken der beiden Elementarursachen stattfindet, auf folgende Weise: man zieht nämlich durch R_1 eine Parallele zu g_2, durch R_2 eine Parallele zu g_1 und erhält im Schnittpunkte den Punkt R; der Abstand desselben von BD beträgt $x = x_1 + x_2$.

Alle Punkte, welche den gleichen Abstand x von BD haben, liegen in der durch R zu BD gehenden Parallelen $M_1 M_2$ und man findet für jeden Punkt Q dieser Geraden die beiden zugeordneten Punkte Q_1, Q_2 in g_1 und g_2, wenn zu diesen beiden Bezugslinien Parallele gezogen werden. Auf diese Weise kann man für die Punkte R, Q u. s. w. der Strecke $M_1 M_2$ die zugeordneten Punkte R_1, R_2; Q_1, Q_2 u. s. w. bestimmen. Die Abweichung $x = x_1 + x_2$ kann also ebenso oft vorkommen, als die Strecke $M_1 M_2$ Punkte enthält. Zwei benachbarte, zu den Werten x und $x + dx$ gehörende Strecken $M_1 M_2$ und $M_1' M_2'$ schneiden aus dem Dreiecke $M_1 M_2 C$ einen Elementar-

Fig. 32.



streifen $M_1 M_2 M_2' M_1'$ heraus, dessen Inhalt $M_1 M_2 . dx$ beträgt. Die Wahrscheinlichkeit, daß die resultierende Gesamtabweichung zwischen x und $x + dx$ liege, ist daher proportional zu $M_1 M_2 . dx$; es ist also

$$dP = c_1 . M_1 M_2 . dx.$$

Bezeichnet man im Dreiecke $M_1 M_2 C$ das Verhältnis der Grundlinie $M_1 M_2$ zur Höhe $a_{100}^{(2)} - x$ mit c_2, so ist $M_1 M_2 = c_2 (a_{100}^{(2)} - x)$, daher

7) $$dP = c_1 c_2 . (a_{100}^{(2)} - x) dx = c_3 (a_{100}^{(2)} - x) dx.$$

Die Konstante c_3 muß, weil die Wahrscheinlichkeit stets eine absolute Zahl ist, der reziproke Wert einer zweiten Dimension sein, daher kann $dP = \frac{(a_{100}^{(2)} - x) dx}{c^2}$ gesetzt werden, übereinstimmend mit 6).

Die Wahrscheinlichkeit, mit welcher das Ereignis innerhalb des von $N_1 N_2$ und $M_1 M_2$ gebildeten endlichen Parallelstreifens zu erwarten ist, wenn man die Abstände zwischen $N_1 N_2$ beziehungsweise $M_1 M_2$ und BD mit $-a_1$ und $+a_2$ bezeichnet, ist nach dem Satze von den einander ausschließenden Ereignissen gleich der Summe aller Elementarwahrscheinlichkeiten, mit welchen das Ereignis in allen unendlich vielen Abständen x mit den Werten zwischen $-a_1$ und $+a_2$ eintritt. Setzt man der Einfachheit halber $a_{100}^{(2)} = a_{100}$, so ist daher:

$$P_{-a_1}^{a_2} = \frac{1}{c^2}\int_{-a_1}^{a_2}(a_{100} - x)\,dx;$$

für einen symmetrischen Parallelstreifen von der Breite $2a$ ist dann

$$P_{-a}^{a} = \frac{2}{c^2}\int_0^a(a_{100} - x)\,dx = \frac{(2\,a_{100}\,a - a^2)}{c^2}.$$

Zur Bestimmung der Konstanten c^2 ist zu beachten, daß das Ereignis zwischen $-a_{100}$ und $+a_{100}$ vorkommen muß, daß also, wenn man auf die Ausdrücke beim Schießen übergeht, die Wahrscheinlichkeit für das Treffen eines symmetrischen Parallelstreifens von der Breite $2\,a_{100}$ gleich 1 sein muß. Es ist daher $\frac{2\,a_{100}\,a_{100} - a_{100}^2}{c^2} = 1$; hieraus folgt $c^2 = a_{100}^2$, daher ist

8) $$P_{-a}^{a} = \frac{2\,a_{100}\,a - a^2}{a_{100}^2}.$$

Mittels dieser Gleichung kann man die Wahrscheinlichkeit des Treffens eines symmetrischen Parallelstreifens von der Breite $2a$, oder auch umgekehrt bei gegebener Wahrscheinlichkeit P_{-a}^{a} die dieser Wahrscheinlichkeit entsprechende Breite des symmetrischen Parallelstreifens $2a$ bestimmen.

Weil $c_8 = \frac{1}{c^2} = \frac{1}{a_{100}^2}$ ist, so kann man die Gleichung 7) auch in der Form schreiben

9) $$dP = \frac{(a_{100} - x)\,dx}{a_{100}^2};$$

hieraus folgt für das Fehlerverteilungsgesetz oder für die Fehlerhäufigkeit die Formel

10) $$\frac{dP}{dx} = y = \frac{a_{100} - x}{a_{100}^2}.$$

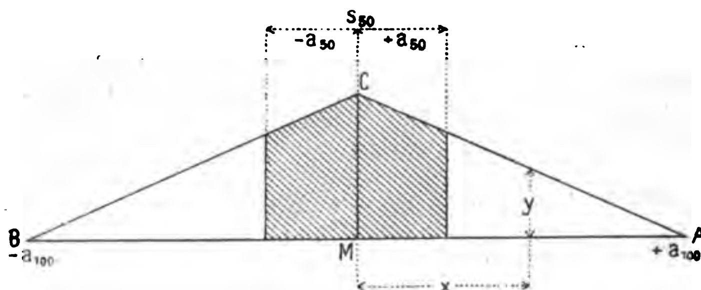
Diese Gleichung stellt auch die Fehlerwahrscheinlichkeitskurve dar. Schreibt man die Gleichung in der Form

$$y = \frac{a_{100} \mp x}{a_{100}^2}, \quad |x| \leqq a_{100},$$

so ist die völlige Übereinstimmung mit der Gleichung 3) auf Seite 338 (Fehlergesetz von Simpson) ersichtlich.

Die Wahrscheinlichkeitskurve bei Voraussetzung zweier Elementarursachen zerfällt also in die sich schneidenden Geraden AC und BC (Fig. 33). Die Wahrscheinlichkeit, daß die resultierende Abweichung zwischen x und $x + dx$ liege, ist gegeben durch $dP = y\,dx$; diese Wahrscheinlichkeit ist daher stets der Ordinate y proportional. Das Maximum von y entfällt für $x = 0$ mit $y = \frac{1}{a_{100}}$.

Fig. 33.



Die 50-prozentige Streuung $s_{50} = 2\,a_{50}$ ergibt sich bekanntlich aus Gleichung 8), wenn man $P = \frac{1}{2}$ setzt, in welchem Falle a in a_{50} übergeht. Es ist also $\frac{1}{2} = \frac{2\,a_{100}\,a_{50} - a_{50}^2}{a_{100}^2}$, woraus

$$a_{50} = a_{100}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 0{\cdot}29289\,a_{100} \text{ und}$$

$$a_{100} = 3{\cdot}4142\,a_{50}, \text{ daher } s_{100} = 3{\cdot}4142\,s_{50} \text{ folgt.}$$

Bei Voraussetzung von zwei unabhängigen Elementarursachen ist also die 100-prozentige Streuung nahezu gleich der 3·5-fachen 50-prozentigen Streuung.

Setzt man den Wert von a_{100} in die Gleichung 8), so folgt

$$11)\qquad P_{-a}^{a} = \frac{6{\cdot}83\,a_{50}\,a - a^2}{11{\cdot}66\,a_{50}^2}.$$

Wird hierin die relative Zieldimension $\frac{a}{a_{50}} = \frac{2a}{2a_{50}} = \frac{z}{s_{50}} = k$ eingeführt, so ergibt sich

$$12) \qquad P_{-a}^{a} = \frac{6{\cdot}83\,k - k^2}{11{\cdot}66} = 0{\cdot}2929\,k\,(2 - 0{\cdot}2929\,k),$$

welche Gleichung die Berechnung der Tabelle der Wahrscheinlichkeitsfaktoren für symmetrische Parallelstreifen von der relativen Breite k zuläßt. Die in Spalte 2 der Tabelle X, welche dem zweiten Teile dieses Bandes beigegeben ist, eingetragenen Wahrscheinlichkeitsfaktoren wurden mittels dieser Gleichung berechnet.

Auf niederem Wege kann man diese Gleichung auf folgende Weise ableiten: Nachdem mit Zuhilfenahme der Fig. 32 gezeigt wurde, wie durch zwei unabhängige Elementarursachen die Gesamtabweichung $x = x_1 + x_2$ entsteht, und zwar bei der Voraussetzung, daß x_1 und x_2 die durch die alleinige Einwirkung der einzelnen Elementarursachen hervorgerufenen Abweichungen sind, kann man zeigen, daß jedem Punkte des Viereckes $ABCD$ einer der Fälle $x = x_1 + x_2$ entspricht; die Anzahl aller Punkte des Viereckes entspricht also der Anzahl aller möglichen Fälle.

Fragt man nun nach der Wahrscheinlichkeit, mit welcher die Abweichung x zwischen den Werten $-a_1$ und $+a_2$ liegt, so ist die Anzahl der dieser Bedingung günstigen Fälle gleich der Anzahl aller jener Punkte des Viereckes $ABCD$, welche zwischen den Geraden $N_1 N_2$ und $M_1 M_2$ liegen. Die Anzahl der Punkte zweier verschiedener Flächen verhalten sich offenbar wie die Flächeninhalte dieser Flächen; bezeichnet man daher den Flächeninhalt des ganzen Viereckes mit F und den zwischen den Parallelen $N_1 N_2$ und $M_1 M_2$ liegenden Teil desselben mit f, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Schuß zwischen die Geraden $N_1 N_2$ und $M_1 M_2$ fällt, gegeben durch

$$P_{-a_1}^{a_2} = \frac{f}{F} = \frac{BD\,.\,a_{100} - \frac{M_1 M_2\,(a_{100} - a_2)}{2} - \frac{N_1 N_2\,(a_{100} - a_1)}{2}}{BD\,.\,a_{100}};$$

da $M_1 M_2 = BD\,\frac{a_{100} - a_2}{a_{100}}$ und $N_1 N_2 = BD\,\frac{a_{100} - a_1}{a_{100}}$ ist, so folgt

$$P_{-a_1}^{a_2} = \frac{2\,a_{100}\,(a_1 + a_2) - a_1^2 - a_2^2}{2\,a_{100}^2}.$$

Führt man hierin die Bedingung für einen symmetrischen Parallelstreifen ein, indem man $a_1 = a_2 = a$ setzt, so resultiert wieder die Gleichung 8).

d) Gesetz der zufälligen Abweichungen bei der Annahme von drei unabhängigen Elementarursachen.

Nimmt man an, wie dies bei zwei Elementarursachen geschah, daß von den drei Ursachen jede einzeln in ihrer Einwirkung auf das

Fig. 34.

Ereignis vollkommen gleich ist und daß jede dieser Ursachen, für sich allein wirkend, die Abweichung x_1 beziehungsweise x_2 und x_3 hervorruft, so folgt für die durch das Zusammenwirken dieser drei Elementarursachen resultierende Abweichung $x = x_1 + x_2 + x_3$.

Die Abstände x, x_1, x_2 und x_3 beziehen sich auf die zur Papierfläche senkrechte Ebene $M_1 M_2$ (Fig. 34). Es wird analog wie in

Figur 32 angenommen, daß die senkrechten Abstände der Punkte der Achsen g_1, g_2 und g_3 von der Ebene $M_1 M_2$ die durch je eine Elementarursache verursachten Abweichungen x_1, x_2 und x_3 darstellen, die in ihrer Größe zwischen $-a_{100}^{(1)}$ und $+a_{100}^{(1)}$ liegen müssen. Die größte durch das Zusammenwirken von drei Elementarursachen hervorgerufene Abweichung kann daher den Wert $a_{100}^{(3)} = 3\, a_{100}^{(1)}$ nicht übersteigen. Der Kürze halber soll wieder a_{100} statt $a_{100}^{(3)}$ geschrieben werden.

In der Figur 34 ist g_3 durch die Horizontalprojektion g_3' und durch die Vertikalprojektion g_3'' dargestellt, sonst reicht die Horizontalprojektion — ausgenommen von Schnitten eines Prismas mit Ebenen, von welchen später die Rede sein wird — vollkommen aus; deshalb wurde auch von der üblichen Bezeichnung der Projektionen abgesehen.

Sind die drei Abweichungen durch die drei Punkte R_1, R_2 und R_3 mit den Abständen x_1, x_2 und x_3 von der Ebene $M_1 M_2$ gegeben,*) so gelangt man durch folgende Konstruktion zu dem resultierenden Punkte R im Abstande $x = x_1 + x_2 + x_3$ von der Ebene $M_1 M_2$:

Man zieht durch R_2 eine Parallele zu g_1, durch R_1 eine Parallele zu g_2 und erhält im Schnittpunkte R_0 dieser beiden Geraden einen Punkt, dessen Abstand von $M_1 M_2$ gleich $x_1 + x_2$ ist. Zieht man jetzt durch R_0 eine Parallele zu g_3 und trägt auf derselben das Maß x_3 auf, so gelangt man zu dem Punkte R, welcher der Bedingung $x = x_1 + x_2 + x_3$ entspricht.

In der Figur ist noch ersichtlich, wie aus den Abweichungen x_1', x_2' und x_3' der drei Punkte R_1', R_2' und R_3' der Punkt R' gefunden wurde, welchem die Gesamtabweichung $x' = x_1' + x_2' + x_3'$ zukommt.

Alle unendlich vielen Kombinationen der Werte x_1 und x_2 führen zu einem Systeme von Punkten, welche in ihrer Gesamtheit das Parallelogramm $ABCD$ ergeben. Denkt man sich jetzt von jedem Punkte dieses Parallelogramms parallel zu g_3 alle möglichen Werte von x_3 zwischen $-a_{100}^{(1)}$ und $+a_{100}^{(1)}$ aufgetragen, so gelangt man zu dem Parallelepiped in Figur 34, welches die Eigenschaft hat, daß jeder innerhalb dieses Körpers liegende Punkt mit seinem Abstande x von der Ebene $M_1 M_2$ einer der Kombinationen der zulässigen Werte x_1, x_2 und x_3 entspricht.

Die Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen einer bestimmten Abweichung x ist proportional der Anzahl günstiger Fälle, denn die Anzahl aller Fälle ist konstant. Alle günstigen Fälle, d. h. alle Fälle, bei welchen die Kombination der drei Abstände x_1, x_2 und x_3

*) Die Bezeichnung der Strecke OR_3 mit x_3 wurde in der Figur absichtlich unterlassen, um nicht ihre Deutlichkeit zu stören.

dieselbe Summe x ergeben, liegen in der Schnittfläche der im Abstande x von $M_1 M_2$ gelegten Ebene $N_1 N_2$ mit dem Parallelepiped. Zwei benachbarte Ebenen, welche zu den Abweichungen x und $x + dx$ gehören, schneiden aus diesem Körper eine Schicht heraus, deren Rauminhalt proportional der Wahrscheinlichkeit ist, daß die resultierende Abweichung zwischen x und $x + dx$ liege. Die Schnittfigur mit $N_1 N_2$ ist, wenn $|x| > \frac{a_{100}}{3}$, die Basis $EFG = b$ einer dreiseitigen Pyramide von der Höhe $a_{100} - x$; die Basis dieser Pyramide ist dem Quadrate ihrer Höhe proportional. Es ist also die Wahrscheinlichkeit dP_1, daß die Gesamtabweichung zwischen x und $x + dx$ liege, wenn $|x| > \frac{a_{100}}{3}$ ist,

$$dP_1 = c_1 . b . dx = c_1 . c_2 (a_{100} - x)^2 . dx = c_3 (a_{100} - x)^2 dx.$$

Die Konstante c_3 muß, da die Wahrscheinlichkeit eine absolute Zahl ist, der reziproke Wert einer dritten Dimension sein, so daß gesetzt werden kann

$$13)\qquad dP_1 = \frac{(a_{100} - x)^2}{c^3} dx, \quad |x| > \frac{a_{100}}{3}.$$

Für negative Abweichungen x hat man

$$14)\qquad dP_1' = \frac{(a_{100} + x)^2}{c^3} dx, \quad |x| > \frac{a_{100}}{3}.$$

Ist $|x| < \frac{a_{100}}{3}$, so ist die Schnittfläche ein Sechseck $HJKLMN$, welches entsteht, wenn man von der Basis der Pyramide mit der Höhe $a_{100} - x$ die drei kleinen Dreiecke f_1, f_2, f_3 abschneidet. Diese Dreiecke sind Grundflächen von drei kleinen Pyramiden mit der Höhe $\frac{a_{100}}{3} - x$, welche der großen Pyramide ähnlich sind; die Grundfläche jeder dieser drei Pyramiden ist proportional zu $\left(\frac{a_{100}}{3} - x\right)^2$. Wenn $|x| < \frac{a_{100}}{3}$ ist, so hat somit die Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen einer Abweichung zwischen x und $x + dx$ den Wert

$$dP_2 = \frac{(a_{100} - x)^2 - 3\left(\frac{a_{100}}{3} - x\right)^2}{c^3} dx, \quad |x| < \frac{a_{100}}{3}$$

oder

$$15)\qquad dP_2 = \frac{2\left(\frac{a_{100}^2}{3} - x^2\right)}{c^3} dx, \quad |x| < \frac{a_{100}}{3}.$$

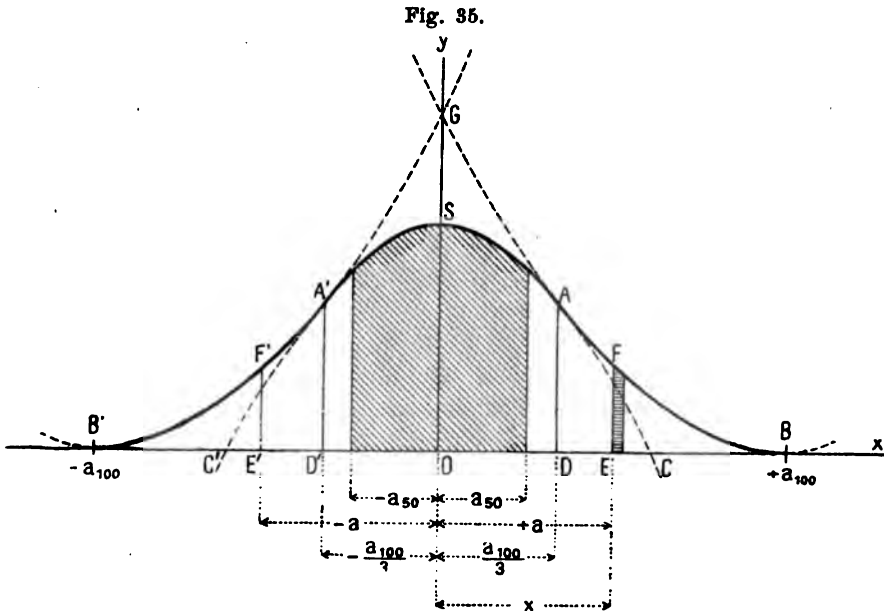
Für die Fehlerwahrscheinlichkeitskurven ergeben sich aus 13), 14) und 15) die Gleichungen

16) $$\frac{dP_1}{dx} = y = \frac{(a_{100} \mp x)^2}{c^3}, \quad |x| > \frac{a_{100}}{3},$$

17) $$\frac{dP_2}{dx} = y = \frac{2\left(\frac{a_{100}^2}{3} - x^2\right)}{c^3}, \quad |x| < \frac{a_{100}}{3}.$$

Die Fehlerwahrscheinlichkeitskurve setzt sich also aus drei Parabelstücken zusammen, nämlich aus dem Parabelstücke ASA' (Fig. 35),

Fig. 35.



entsprechend der Gleichung 17) und aus den Parabelstücken AB und $A'B'$, entsprechend der Gleichung 16).

Die zwei durch die Gleichung 16) ausgedrückten Parabeln berühren, wie man leicht erkennt, die Abszissenachse im Abstande $+a_{100}$ beziehungsweise $-a_{100}$ vom Koordinatenursprunge O.

Die den Parabeln ASA' und $BFAG$ beziehungsweise ASA' und $B'F'A'G'$ gemeinschaftlichen Punkte A und A' ergeben sich durch Koexistenz der Gleichungen 16) und 17). Die Abszissen der gemeinsamen Punkte werden bestimmt aus

$$2\left(\frac{a_{100}^2}{3} - x^2\right) = (a_{100} \mp x)^2 \quad \text{mit} \quad x = \pm\frac{a_{100}}{3};$$

für die Ordinaten der Punkte A und A' hat man daher $y = \frac{4}{9}\frac{a_{100}^2}{c^3}$.

Aus dem Umstande, daß je zwei Parabeln nur ein gemeinschaftlicher Punkt A beziehungsweise A' entspricht, kann man den Schluß ziehen, daß sich die Parabeln ASA' und $BFAG$ im Punkte A, hingegen die Parabeln ASA' und $B'F'A'G$ im Punkte A' berühren.

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Abweichung zwischen x und $x + dx$ liegt, ist gegeben durch das Flächenelement

$$\frac{y\,dx}{c^3} = \frac{EF . dx}{c^3}.$$

Aus dem Gesagten und nach dem Satze von den voneinander unabhängigen Ereignissen folgt, daß die Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen irgend einer Abweichung zwischen den Grenzen $-a_{50}$ und $+a_{50}$ gleich sein muß der zwischen diesen Grenzen liegenden Fläche der Fehlerwahrscheinlichkeitskurve, also bei der gemachten Annahme gleich der schraffierten Fläche mit dem größeren Inhalte.

Da der Annahme zufolge nur Abweichungen zwischen $-a_{100}$ und $+a_{100}$ zulässig sind, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen irgend einer Abweichung innerhalb $-a_{100}$ und $+a_{100}$ gleich 1 und hiemit übereinstimmend auch die zwischen der Kurve $BASA'B'$ und der Abszissenachse liegende Fläche gleich 1.

Die Größe a_{100} versinnlicht in diesem Gesetze den Präzisionswert. Je größer dieser Wert ist, desto wahrscheinlicher werden größere und desto unwahrscheinlicher kleinere Abweichungen, womit jedoch nicht gesagt sein soll, daß jemals für einen und denselben Fall größere Abweichungen wahrscheinlicher werden als kleinere.

Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit dafür, daß für einen bestimmten Fall die Abweichung die Grenzen $-a$ und $+a$ nicht überschreitet, sind daher die Ausdrücke für dP_2 beziehungsweise für dP_2 und dP_1 zwischen den gegebenen Grenzen zu integrieren.

Es ergibt sich als Wahrscheinlichkeit für das Treffen eines symmetrischen Parallelstreifens von der Breite $2a$, wenn $|a| < \frac{a_{100}}{3}$ ist,

$$18)\qquad P_2 = \frac{4}{c^3}\int_0^a \left(\frac{a_{100}^2}{3} - x^2\right) dx = \frac{4}{3}\,\frac{a_{100}^2\,a - a^3}{c^3}, \qquad a < \frac{a_{100}}{3}.$$

Wie bei der Bedingung $|a| > \frac{a_{100}}{3}$ vorzugehen ist, zeigt Figur 35. Man bestimmt zuerst die durch die Parabel ASA' begrenzte Fläche, indem man Gleichung 18) für $a = \frac{a_{100}}{3}$ spezialisiert. Man erhält so die Wahrscheinlichkeit P_2 für das Treffen eines symmetrischen Parallel-

streifens von der Breite $2 \frac{a_{100}}{3}$. Hierauf bestimmt man mit Benützung der Gleichung 13) die Wahrscheinlichkeit P_1 für das Treffen des Streifens $DEFA$, indem man zwischen den Grenzen $\frac{a_{100}}{3}$ und a integriert, worauf nach dem Satze von den einander ausschließenden Ereignissen resultiert:

$$P = P_2 + 2 P_1,$$

nämlich

$$19) \qquad P = \frac{4}{c^3} \int\limits_0^{\frac{a_{100}}{3}} \left(\frac{a_{100}^2}{3} - x^2\right) dx + \frac{2}{c^3} \int\limits_{\frac{a_{100}}{3}}^{a} (a_{100} - x)^2 \, dx =$$

$$= \frac{\frac{16}{27} a_{100}^3 - \frac{2}{3} (a_{100} - a)^3}{c^3}, \qquad a > \frac{a_{100}}{3}.$$

Die Konstante c^3 kann auf gleiche Weise wie bei zwei Elementarursachen bestimmt werden. Da keine größere Abweichung wie a_{100} vorkommen kann, ist die Wahrscheinlichkeit für irgend eine zwischen $+a_{100}$ und $-a_{100}$ gelegene Abweichung gleich 1. Setzt man daher in Gleichung 19) $P = 1$ und $a = a_{100}$, so folgt

$$1 = \frac{16}{27} \frac{a_{100}^3}{c^3}; \quad \text{daher ist } c^3 = \frac{16}{27} a_{100}^3.$$

Hiemit übergehen die Gleichungen 18) und 19) in

$$20) \qquad P_2 = \frac{9}{4} \frac{a_{100}^2 a - a^3}{a_{100}^3}, \qquad a < \frac{a_{100}}{3};$$

und

$$21) \qquad P = 1 - \frac{9}{8} \left(\frac{a_{100} - a}{a_{100}}\right)^3, \quad a > \frac{a_{100}}{3}.$$

Um den in den Gleichungen 20) und 21) eingeführten Präzisionswert a_{100} durch den üblichen Präzisionswert a_{50} zu ersetzen, ist es zunächst notwendig zu wissen, ob $a_{50} \lesseqgtr \frac{a_{100}}{3}$ ist; dann erst weiß man, welche der genannten Gleichungen zur Bestimmung von a_{50} benützt werden darf.

Setzt man in Gleichung 20) für a den für diese Gleichung größten zulässigen Wert, nämlich $a = \frac{a_{100}}{3}$, so folgt $P_2 = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$; die 50-prozentige Abweichung a_{50} muß also kleiner sein als $\frac{a_{100}}{3}$, woraus her-

vorgeht, daß in Gleichung 20) die Wahrscheinlichkeit P_2 den Wert $\frac{1}{2}$ annehmen kann, in welchem Falle a in a_{50} übergeht. Zur Bestimmung von a_{50} kann deshalb die Gleichung benützt werden

$$22)\qquad \frac{1}{2}=\frac{9}{4}\,\frac{a_{100}^2\,a_{50}-a_{50}^3}{a_{100}^3}.$$

Da es sich darum handelt, in der Beziehung $a_{50}=a_{100}\,u$ den Wert u zu bestimmen, so hat man in die Gleichung 22) für a_{50} diesen Wert einzusetzen und erhält:

$$u-u^3=\frac{2}{9};$$

hieraus ergibt sich $u=0\cdot235\,24$. Es ist also $a_{50}=0\cdot235\,24\,a_{100}$, daher $a_{100}=\frac{a_{50}}{0\cdot235\,24}=4\cdot251\,a_{50}$.

Die 100-prozentige Streuung ist demnach nahezu gleich der 4·25-fachen 50-prozentigen Streuung.

Setzt man diesen Wert von a_{100} in die Gleichungen 20) und 21) ein, so resultiert

$$23)\qquad P_2=\frac{9}{4}\cdot\frac{4\cdot251^2\,a_{50}^2\,a-a^3}{4\cdot251^3\,a_{50}^3},\qquad a<\frac{4\cdot251\,a_{50}}{3}=1\cdot417\,a_{50},$$

und

$$24)\qquad P=1-\frac{9}{8}\left(\frac{4\cdot251\,a_{50}-a}{4\cdot251\,a_{50}}\right)^3,\quad a>\frac{4\cdot251\,a_{50}}{3}=1\cdot417\,a_{50}.$$

Dividiert man in 23) Zähler und Nenner durch a_{50}^3, in 24) innerhalb der Klammern Zähler und Nenner durch a_{50} und setzt die relative Zieldimension $\frac{a}{a_{50}}=\frac{2a}{s_{50}}=\frac{z}{s_{50}}=k$, so folgt

$$25)\qquad P_2=0\cdot529\,29\,k-0\cdot029\,29\,k^3,\qquad k<1\cdot417;$$

und

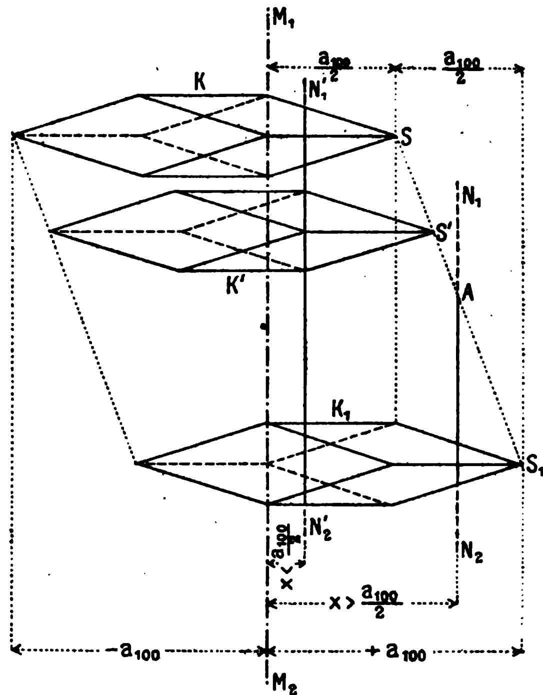
$$26)\qquad P=1-(1\cdot040\,04-0\cdot244\,66\,k)^3,\quad k>1\cdot417.$$

Die beiden Gleichungen 25) und 26) können durch die Tabelle der Wahrscheinlichkeitsfaktoren bei Voraussetzung von drei Elementarursachen repräsentiert werden. Die Zahlen der Spalte 3 in Tabelle X wurden mittels dieser Gleichungen gerechnet und zeigen, daß sie sowohl von den in Spalte 4 eingetragenen als auch von den für das Gaußsche Fehlergesetz gültigen Zahlen (Tabelle II) sehr wenig abweichen.

e) Gesetz der zufälligen Abweichungen bei der Annahme von vier und mehr unabhängigen Elementarursachen.

Bei Voraussetzung von vier Elementarursachen, von welchen jede für sich allein wirkend die Abweichung x_1 beziehungsweise x_2, x_3 und x_4 hervorruft, wird das Zusammenwirken dieser vier Ursachen die Abweichung $x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ zur Folge haben. Bedeutet $a_{100}^{(1)}$ die größte Abweichung, welche durch eine der Elementarursachen hervorgerufen werden kann, so ist die größte Abweichung a_{100}, welche durch das Zusammenwirken dieser vier Elementarursachen resultiert, $a_{100} = 4\, a_{100}^{(1)}$.

Fig. 36.



Die Vorstellung aller Variationen, welche bei Annahme von vier Ursachen vorkommen können, wird durch die Figur 36 unterstützt. Stellen alle Punkte des Körpers K die Variationen der Zusammensetzungen von drei Elementarursachen vor und tritt eine vierte Elementarursache dazu, welche allein eine Abweichung x_4 zwischen $-a_{100}^{(1)}$ und $+a_{100}^{(1)}$ hervorrufen kann, so muß man jeden der unendlich vielen Werte von x_4 mit allen Punkten des Körpers K kombinieren, um alle möglichen hier in Betracht kommenden Variationen zu erhalten. Um nur jene Variationen aufzufinden, welche ein bestimmter Wert von x_4, z. B. der Wert $x_4 = a' < \frac{a_{100}}{2}$ ergibt, muß man von jedem Punkte des Körpers K entsprechend der Richtung der Streuung senkrecht auf $M_1 M_2$ diesen Abstand a' auftragen; das Resultat wird ein dem Körper K kongruenter Körper K' sein, welcher der Übersicht halber etwas tiefer gezeichnet wurde. Bei diesem Vorgange erhält man für jeden Wert von x_4 einen solchen Körper und man

kann sich diese Körperschar so versinnlicht denken, daß man jedem der unendlich vielen Punkte der Verbindungsgeraden $S\,S_1$ einen solchen Körper mit der Spitze in dieser Geraden zuordnet.

Die Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen einer Abweichung x wird offenbar proportional sein der Anzahl der Punkte, welche in der Ebene $N_1\,N_2$ $(N_1'\,N_2')$ im Abstande x von $M_1\,M_2$ liegen.

Ist $|x| > \frac{a_{100}}{2}$, so wird die Ebene $N_1\,N_2$ die unendlich vielen Körper in Dreiecken schneiden, deren größtes durch den Schnitt des Körpers K_1 entsteht, und welche immer kleiner werden und endlich im Schnittpunkte A der Geraden $S\,S_1$ mit $N_1\,N_2$ in einen Punkt übergehen.

Die Wahrscheinlichkeit dP für das Vorkommen einer Abweichung x ist daher proportional dem Volum einer Pyramide von der Höhe $a_{100} - x$, daher dem Werte $(a_{100} - x)^3$; es ist somit

$$27)\qquad d\,P_1 = \frac{(a_{100} - x)^3}{c^4}\,d\,x,\quad |x| > \frac{a_{100}}{2}.$$

Die Konstante c^4 muß offenbar der Wert einer vierten Dimension sein, weil die Wahrscheinlichkeit stets eine absolute Zahl ist.

Die oben angedeuteten Verhältnisse ändern sich, wie aus Figur 36 ersichtlich, wenn $|x| < \frac{a_{100}}{2}$ wird, denn in diesem Falle wird die Gerade $S\,S_1$ nicht geschnitten, die Dreiecksschar beginnt daher nicht mit der Fläche Null, sondern mit dem Schnittdreiecke des Körpers K, auch werden nur jene Körper in einem Dreiecke geschnitten, welche ihre Spitzen zwischen S und S' haben, während zu den Schnittflächen der Körper zwischen S' und S_1 je 3 Dreiecke fehlen, deren Größe in der Lage S' mit einem Punkte beginnt und beim Körper K_1 mit drei Dreiecken enden, welche kongruent sind mit der Schnittfläche des Körpers K. Bei der Bedingung $|x| < \frac{a_{100}}{2}$ ist daher die Wahrscheinlichkeit $d\,P_2$ für das Vorkommen einer Abweichung x proportional dem Werte

$$(a_{100} - x)^3 - 4\left(\frac{a_{100}}{2} - x\right)^3,\quad |x| < \frac{a_{100}}{2};$$

die Wahrscheinlichkeit für diese Bedingung ist daher

$$28)\quad d\,P_2 = \frac{(a_{100} - x)^3}{c^4}\,d\,x - 4\,\frac{\left(\frac{a_{100}}{2} - x\right)^3}{c^4}\,d\,x,\quad |x| < \frac{a_{100}}{2}.$$

Bei Annahme von vier Elementarfehlern besteht die zugehörige Fehlerwahrscheinlichkeitskurve aus vier kubischen Parabelbögen,

welche sich nicht nur mit ihren Tangenten, sondern auch mit ihren Krümmungen stetig aneinander und an die Abszissenachse anlegen.

Für das Treffen eines symmetrischen Parallelstreifens von der Breite $2a$, wobei $|a| < \frac{a_{100}}{2}$ ist, folgt aus Gleichung 28) die Wahrscheinlichkeit

$$P_2 = \frac{2}{c^4}\int_0^a (a_{100} - x)^3\,dx - \frac{8}{c^4}\int_0^a \left(\frac{a_{100}}{2} - x\right)^3 dx, \qquad a < \frac{a_{100}}{2},$$

oder nach Ausführung der Integrationen

29) $$P_2 = \frac{1}{2c^4}(2a_{100}^3\,a - 4\,a_{100}\,a^3 + 3\,a^4), \qquad a < \frac{a_{100}}{2};$$

für den Fall, wenn $|a| > \frac{a_{100}}{2}$ ist, folgt aus den Gleichungen 28) und 27) für das Treffen eines symmetrischen Parallelstreifens von der Breite $2a$ der Wahrscheinlichkeitswert

$$P = \frac{2}{c^4}\int_0^{\frac{a_{100}}{2}} (a_{100} - x)^3\,dx - \frac{8}{c^4}\int_0^{\frac{a_{100}}{2}} \left(\frac{a_{100}}{2} - x\right)^3 dx +$$

$$+ \frac{2}{c^4}\int_{\frac{a_{100}}{2}}^{a} (a_{100} - x)^3\,dx, \qquad a > \frac{a_{100}}{2}, \text{ oder}$$

30) $$P = \frac{3}{8}\frac{a_{100}^4}{c^4}\left\{1 - \frac{4}{3}\left(1 - \frac{a}{a_{100}}\right)^4\right\}, \qquad a > \frac{a_{100}}{2}.$$

Um die Konstante c^4 zu bestimmen, spezialisiert man die Gleichung 30) für einen symmetrischen Parallelsteifen von der Breite $2a_{100}$, von welchem bekannt ist, daß er mit der Wahrscheinlichkeit 1 getroffen wird; es ergibt sich:

$$1 = \frac{3}{8}\frac{a_{100}^4}{c^4}; \text{ daher } c^4 = \frac{3}{8}a_{100}^4.$$

Mit Berücksichtigung des Wertes für c^4 übergehen die Gleichungen 29) und 30) in:

31) $$P_2 = \frac{8}{3}\frac{a}{a_{100}} - \frac{16}{3}\frac{a^3}{a_{100}^3} + 4\frac{a^4}{a_{100}^4}, \qquad a < \frac{a_{100}}{2}$$

und

32) $$P = 1 - \frac{4}{3}\left(1 - \frac{a}{a_{100}}\right)^4, \qquad a > \frac{a_{100}}{2}.$$

Um statt des Präzisionswertes a_{100} jenen a_{50} einführen zu können, muß für die Beziehung $a_{50} = a_{100}\,u$ der Faktor u bestimmt werden. Setzt man in 31) für a den größten zulässigen Wert $\frac{a_{100}}{2}$ ein, so zeigt sich, daß $a_{50} < \frac{a_{100}}{2}$ ist. Wird sonach die Gleichung 31) für den Wert $a = a_{50}$ spezialisiert, wofür P_2 den Wert $\frac{1}{2}$ annimmt, und setzt gleichzeitig $a_{50} = a_{100}\,u$, so folgt zur Bestimmung von u die Gleichung:

$$\frac{1}{2} = \frac{8}{3}u - \frac{16}{3}u^3 + 4u^4;$$

daher ist $u = 0{\cdot}201\,36$, also $a_{50} = 0{\cdot}201\,36\,a_{100}$ und $a_{100} = 4{\cdot}966\,23\,a_{50}$.

Führt man den gefundenen Wert von a_{100} in die Gleichungen 31) und 32) ein und setzt $\frac{a}{a_{50}} = k$, so resultiert zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für das Treffen eines symmetrischen Parallelstreifens

$$P_2 = 0{\cdot}536\,06\,k - 0{\cdot}043\,535\,k^3 + 0{\cdot}006\,575\,9\,k^4, \qquad k < 2{\cdot}483$$

und

$$P_1 = 1 - \frac{4}{3}(1 - 0{\cdot}201\,36\,k)^4, \qquad k > 2{\cdot}483.$$

Wie man sich leicht überzeugen kann, stimmen die aus diesen Gleichungen folgenden und in Spalte 4 der Tabelle X eingetragenen Resultate beinahe mit den aus dem Laplaceschen Integral hervorgehenden Zahlen (Tabelle II) überein.

Eine Ausdehnung des Problems auf fünf und mehr Elementarursachen erscheint daher schon aus diesem Grunde als überflüssig; außerdem werden auch die Formeln mit der Zunahme der Ursachen stets komplizierter. Die Fehlerwahrscheinlichkeitskurve besteht bei fünf Elementarfehlern aus fünf Parabelästen von der vierten Ordnung, welche sich an den Übergangsstellen mit ihren drei ersten Differentialquotienten stetig aneinander anschließen. Der Fehlerbereich auf der Abszissenachse beträgt bei fünf Elementarfehlern $a_{100} = 5\,a_{100}^{(1)}$.

Die Tabelle X läßt — wenn man sich auf eine Untersuchung der Verallgemeinerung nicht einlassen will — vermuten, daß sich die Zahlen derselben bei der Steigerung der Anzahl von Elementarursachen einer Grenze nähern, welche mit den aus dem Laplaceschen Integral hervorgehenden Zahlen übereinstimmt; diese Übereinstimmung ist aber

bereits bei vier Elementarursachen nahezu erreicht. Die Anzahl der Elementarursachen hat daher keinen nennenswerten Einfluß auf das Resultat, weshalb bei Anwendung der abgeleiteten Relationen mit Zugrundelegung von drei oder vier Elementarursachen mehr als hinlänglich genaue Resultate zu erwarten sind.

Man kann folgende allgemeine Angaben machen:

Die Dispersion des Gesamtfehlers wird mit jedem hinzukommenden Elementarfehler eine breitere. Der Fehlerbereich auf der Abszissenachse beträgt nämlich bei $n+1$ Elementarfehlern $(n+1)\,a_{100}^{(1)}$.

Die Fehlerwahrscheinlichkeitskurve wird mit jedem hinzukommenden Elementarfehler je um einen Grad stetiger. Sie besteht nämlich bei $n+1$ Elementarfehlern aus $n+1$ Parabelästen von der n-ten Ordnung, welche sich an den Übergangsstellen mit ihren $n-1$ ersten Differentialquotienten stetig aneinander anschließen.

In der Grenze für $n=\infty$ wird man dementsprechend eine Fehlerwahrscheinlichkeitskurve zu erwarten haben, die sich nach beiden Seiten hin ins Unendliche erstreckt und die mit ihren sämtlichen Differentialquotienten stetig verläuft. Eine solche Kurve ist durch das Gaußsche Fehlergesetz gegeben.

In dem Werke „Festschrift Ludwig Boltzmann gewidmet zum sechzigsten Geburtstage 20. Februar 1904" Leipzig 1904, gibt A. Sommerfeld in einem Aufsatze (Seite 848 bis einschließlich 859) eine Ableitung des Gaußschen Fehlergesetzes, welche gleichfalls von der Hypothese der Elementarfehler ausgeht. Sommerfeld gelangt zu ähnlichen Resultaten, wie sie in diesem Punkte nach Oberst Schöffler gefunden wurden. Am Schlusse des genannten Aufsatzes sagt Sommerfeld:

Da in Wirklichkeit die Anzahl der eine Beobachtung beeinflussenden Elementarfehler nicht unendlich groß sein dürfte, da ferner sehr große Gesamtfehler im allgemeinen nicht nur sehr unwahrscheinlich, sondern überhaupt unmöglich sind, so dürfte im allgemeinen eine unserer Fehlerkurven für ein endliches n der Wirklichkeit besser entsprechen als ihr Grenzfall, das Gaußsche Fehlergesetz. Letzteres empfiehlt sich gegenüber jenen lediglich durch die größere Einfachheit seiner analytischen Darstellung sowie dadurch, daß es von dem meist unbekannten Gesetz der Elementarfehler unabhängig ist, während unsere Fehlerkurven bei endlichem n von der besonderen Form dieses Gesetzes abhängen.

Anmerkung. Im Punkte 29 des Werkes von Czuber „Theorie der Beobachtungsfehler" Leipzig 1891 ist angeführt:

Der Ableitung des Fehlergesetzes aus der Hypothese des arithmetischen Mittels läßt sich der Vorzug großer Einfachheit und Klarheit nicht absprechen; dagegen haftet ihr der Mangel an, daß sie auf die Natur der Fehler, die Art ihrer Entstehung nicht eingeht.

Daraus erklärt sich das Bestreben der Geometer, dem Fehlergesetz eine festere Grundlage dadurch zu geben, daß man bei seiner Ableitung auf die innere Natur der Fehler, auf ihre Entstehung aus den verschiedenen Fehlerursachen zurückgeht.

Was nun die Elementarfehler betrifft, so werden dieselben in mannigfachster Weise zur Wirkung kommen. Zunächst wird es eine Klasse von Fehlerquellen geben, aus welchen Elementarfehler entspringen, die eines jeden Wertes zwischen gewissen Grenzen fähig sind. Neben dieser Gattung von Fehlerursachen wird es andere geben, welche bei jeder Beobachtung einen Fehler von derselben Größe, also einen konstanten Fehler erzeugen. Noch andere Fehlerquellen geben zur Entstehung von Elementarfehlern Veranlassung, deren jeder mehrere bestimmte Werte annehmen kann, einen jeden mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit. Während ferner manche Fehlerquellen bei jeder Beobachtung zur Wirkung kommen, wird es andere geben, welche nur gelegentlich auftreten und dann in der einen oder anderen der angedeuteten Weisen sich kennzeichnen. Bei solchen Fehlerquellen tritt die Wahrscheinlichkeit, daß sie in Aktion kommen, als neues Element hinzu.

Ein gewichtiger Umstand liegt in der Anzahl und der relativen Bedeutung der bei einer Beobachtung konkurrierenden Fehlerquellen. Die Anzahl wird im allgemeinen um so größer sein, je komplizierter die Hilfsmittel der Beobachtung und je verwickelter der dabei befolgte Vorgang ist. Mit dem Fortschreiten der Beobachtungskunst ist die relative Bedeutung der einzelnen Fehlerquellen dem Gleichgewichte immer näher gerückt worden. Während zu einer Zeit, wo die Instrumente noch unvollkommen waren, einige wenige Fehlerquellen derart überwogen, daß die anderen in dem Gesetze des Gesamtfehlers kaum zum Ausdrucke kommen konnten, wie dies auch heute bei primitiv angestellten Beobachtungen vorkommen mag, erfreuen sich die modernen Hilfsmittel der Meßkunst eines hohen Grades von Ebenmäßigkeit, durch welchen die großen Unterschiede in der relativen Bedeutung der Elementarfehler aufgehoben sind. Wenn nun hier eine große Anzahl von Fehlerquellen nachweisbar ist, so folgt daraus von selbst, daß jede einzelne nur geringe Bedeutung haben kann im Vergleiche zum Gesamtfehler, insbesondere, daß die Elementarfehler einzeln zwischen sehr engen Grenzen sich bewegen müssen.

Eine weitere wichtige Frage geht dahin, ob die verschiedenen Fehlerquellen unabhängig voneinander wirken; denn dadurch ist die Anwendbarkeit der Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung wesentlich bedingt. Bei einer Klasse von Fehlerquellen vermag man einen Zusammenhang nicht zu erkennen und sie bilden ohne Zweifel die Mehrheit aller. Dagegen gibt es andere, bei denen eine gewisse Abhängigkeit nicht zu leugnen ist; so muß bei allen Elementarfehlern, welche von den Schwankungen der Temperatur herrühren, ein gegenseitiger Zusammenhang vermutet werden. Aber die Unmöglichkeit, diesen Zusammenhang in Rechnung zu bringen, läßt keine andere Wahl übrig, als die Fehlerquellen dieser zweiten, jedenfalls minder zahlreichen Klasse auch als unabhängig anzusehen.

Tabellen.

Tabelle I.

Werte der Funktion $\Phi(a\,h) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a\,h} e^{-t^2} d\,t.$

$a\,h$	$\Phi\,(a\,h)$	Diff.	$a\,h$	$\Phi\,(a\,h)$	Diff.	$a\,h$	$\Phi\,(a\,h)$	Diff.
0·00	0·00000 00	1128 33	0·35	0 37938 19	994 77	0·70	0·67780 10	686 44
0·01	0·01128 33	1128 11	0·36	0·38932 96	987 63	0·71	0·68466 54	676 76
0·02	0·02256 44	1127 66	0·37	0·39920 59	980 34	0·72	0·69143 30	667 08
0·03	0·03384 10	1126 99	0·38	0·40900 93	972 92	0·73	0·69810 38	657 42
0·04	0·04511 09	1126 09	0·39	0·41873 85	965 37	0·74	0·70467 80	647 76
0·05	0·05637 18	1124 97	0·40	0·42839 22	957 68	0·75	0·71115 56	638 11
0·06	0·06762 15	1123 62	0·41	0·43796 90	949 86	0·76	0·71753 67	628 49
0·07	0·07885 77	1122 04	0·42	0·44746 76	941 91	0·77	0·72382 16	618 88
0·08	0·09007 81	1120 25	0·43	0·45688 67	933 84	0·78	0·73001 04	609 31
0·09	0·10128 06	1118 24	0·44	0·46622 51	925 67	0·79	0·73610 35	599 75
0·10	0·11246 30	1116 00	0·45	0·47548 18	917 37	0·80	0·74210 10	590 23
0·11	0·12362 30	1113 54	0·46	0·48465 55	908 97	0·81	0·74800 33	580 75
0·12	0·13475 84	1110 87	0·47	0·49374 52	900 46	0·82	0·75381 08	571 30
0·13	0·14586 71	1107 99	0·48	0·50274 98	891 85	0·83	0·75952 38	561 89
0·14	0·15694 70	1104 89	0·49	0·51166 83	883 16	0·84	0·76514 27	552 53
0·15	0·16799 59	1101 58	0·50	0·52049 99	874 38	0·85	0·77066 80	543 22
0·16	0·17901 17	1098 06	0·51	0·52924 37	865 50	0·86	0·77610 22	533 96
0·17	0·18999 23	1094 34	0·52	0·53789 87	856 54	0·87	0·78143 98	524 75
0·18	0·20093 57	1090 41	0·53	0·54646 41	847 51	0·88	0·78668 73	515 59
0·19	0·21183 98	1086 27	0·54	0·55493 92	838 41	0·89	0·79184 32	506 50
0·20	0·22270 25	1081 93	0·55	0·56332 33	829 24	0·90	0·79690 82	497 46
0·21	0·23352 18	1077 40	0·56	0·57161 57	820 01	0·91	0·80188 28	488 49
0·22	0·24429 58	1072 67	0·57	0·57981 58	810 71	0·92	0·80676 77	479 58
0·23	0·25502 25	1067 75	0·58	0·58792 29	801 36	0·93	0·81156 35	470 75
0·24	0·26570 00	1062 63	0·59	0·59593 65	791 96	0·94	0·81627 10	461 98
0·25	0·27632 63	1057 34	0·60	0·60385 61	782 51	0·95	0·82089 08	453 28
0·26	0·28689 97	1051 85	0·61	0·61168 12	773 02	0·96	0·82542 36	444 67
0·27	0·29741 82	1046 18	0·62	0·61941 14	763 49	0·97	0·82987 03	436 12
0·28	0·30788 00	1040 34	0·63	0·62704 63	753 94	0·98	0·83423 15	427 66
0·29	0·31828 34	1034 33	0·64	0·63458 57	744 35	0·99	0·83850 81	419 27
0·30	0·32862 67	1028 14	0·65	0·64202 92	734 73	1·00	0·84270 08	410 97
0·31	0·33890 81	1021 78	0·66	0·64937 65	725 10	1·01	0·84681 05	402 75
0·32	0·34912 59	1015 26	0·67	0·65662 75	715 45	1·02	0·85083 80	394 62
0·33	0·35927 85	1008 59	0·68	0·66378 20	705 79	1·03	0·85478 42	386 57
0·34	0·36936 44	1001 75	0·69	0·67083 99	696 11	1·04	0·85864 99	378 61

a h	*Φ* (*a h*)	Diff.	*a h*	*Φ* (*a h*)	Diff.	*a h*	*Φ* (*a h*)	Diff.
1·05	0·86243 60	370 75	1·45	0·95969 50	135 85	1·85	0·99111 10	36 15
1·06	0·86614 35	362 97	1·46	0·96105 35	131 94	1·86	0·99147 25	34 82
1·07	0·86977 32	355 29	1·47	0·96237 29	128 12	1·87	0·99182 07	33 55
1·08	0·87332 61	347 69	1·48	0·96365 41	124 38	1·88	0·99215 62	32 31
1·09	0·87680 30	340 20	1·49	0·96489 79	120 73	1·89	0·99247 93	31 11
1·10	0·88020 50	332 80	1·50	0·96610 52	117 16	1·90	0·99279 04	29 95
1·11	0·88353 30	325 49	1·51	0·96727 68	113 67	1·91	0·99308 99	28 83
1·12	0·88678 79	318 28	1·52	0·96841 35	110 27	1·92	0·99337 82	27 75
1·13	0·88997 07	311 16	1·53	0·96951 62	106 95	1·93	0·99365 57	26 69
1·14	0·89308 23	304 15	1·54	0·97058 57	103 70	1·94	0·99392 26	25 68
1·15	0·89612 38	297 14	1·55	0·97162 27	100 54	1·95	0·99417 94	24 69
1·16	0·89909 62	290 42	1·56	0·97262 81	97 45	1·96	0·99442 63	23 74
1·17	0·90200 04	283 70	1·57	0·97360 26	94 44	1·97	0·99466 37	22 83
1·18	0·90483 74	277 09	1·58	0·97454 70	91 50	1·98	0·99489 20	21 94
1·19	0·90760 83	270 57	1·59	0·97546 20	88 64	1·99	0·99511 14	21 09
1·20	0·91031 40	264 15	1·60	0·97634 84	85 85	2·00	0·99532 23	20 25
1·21	0·91295 55	257 84	1·61	0·97720 69	83 12	2·01	0·99552 48	19 47
1·22	0·91553 39	251 62	1·62	0·97803 81	80 48	2·02	0·99571 95	18 68
1·23	0·91805 01	245 51	1·63	0·97884 29	77 89	2·03	0·99590 63	17 95
1·24	0·92050 52	239 49	1·64	0·97962 18	75 38	2·04	0·99608 58	17 33
1·25	0·92290 01	233 58	1·65	0·98037 56	72 93	2·05	0·99625 81	16 54
1·26	0·92523 59	227 77	1·66	0·98110 49	70 55	2·06	0·99642 35	15 87
1·27	0·92751 36	222 06	1·67	0·98181 04	68 24	2·07	0·99658 22	15 22
1·28	0·92973 42	216 45	1·68	0·98249 28	65 98	2·08	0·99673 44	14 61
1·29	0·93189 87	210 93	1·69	0·98315 26	63 78	2·09	0·99688 05	14 00
1·30	0·93400 80	205 52	1·70	0·98379 04	61 66	2·10	0·99702 05	13 43
1·31	0·93606 32	200 20	1·71	0·98440 70	59 58	2·11	0·99715 48	12 88
1·32	0·93806 52	194 98	1·72	0·98500 28	57 57	2·12	0·99728 36	12 34
1·33	0·94001 50	189 87	1·73	0·98557 85	55 61	2·13	0·99740 70	11 83
1·34	0·94191 37	184 85	1·74	0·98613 46	53 71	2·14	0·99752 53	11 33
1·35	0·94376 22	179 92	1·75	0·98667 17	51 86	2·15	0·99763 86	10 86
1·36	0·94556 14	175 10	1·76	0·98719 03	50 07	2·16	0·99774 72	10 39
1·37	0·94731 24	170 36	1·77	0·98769 10	48 32	2·17	0·99785 11	9 94
1·38	0·94901 60	165 73	1·78	0·98817 42	46 64	2·18	0·99795 05	9 54
1·39	0·95067 33	161 18	1·79	0·98864 06	44 99	2·19	0·99804 59	9 13
1·40	0·95228 51	156 73	1·80	0·98909 05	43 40	2·20	0·99813 72	8 72
1·41	0·95385 24	152 38	1·81	0·98952 45	41 86	2·21	0·99822 44	8 35
1·42	0·95537 62	148 11	1·82	0·98994 31	40 36	2·22	0·99830 79	7 99
1·43	0·95685 73	143 93	1·83	0·99034 67	38 92	2·23	0·99838 78	7 64
1·44	0·95829 66	139 84	1·84	0·99073 59	37 51	2·24	0·99846 42	7 31

a h	$\Phi(a h)$	Diff.	*a h*	$\Phi(a h)$	Diff.	*a h*	$\Phi(a h)$	Diff.
2·25	0·99853 73	6 98	2·65	0·99982 15	98	3·05	0·99998 39	10
2·26	0·99860 71	6 68	2·66	0·99983 13	93	3·06	0·99998 49	10
2·27	0·99867 39	6 38	2·67	0·99984 06	88	3·07	0·99998 59	8
2·28	0·99873 77	6 09	2·68	0·99984 94	84	3·08	0·99998 67	9
2·29	0·99879 86	5 82	2·69	0·99985 78	79	3·09	0·99998 76	8
2·30	0·99885 68	5 56	2·70	0·99986 57	75	3·10	0·99998 84	7
2·31	0·99891 24	5 31	2·71	0·99987 32	71	3·11	0·99998 91	7
2·32	0·99896 55	5 07	2·72	0·99988 03	67	3·12	0·99998 98	6
2·33	0·99901 62	4 84	2·73	0·99988 70	63	3·13	0·99999 04	6
2·34	0·99906 46	4 61	2·74	0·99989 33	61	3·14	0·99999 10	6
2·35	0·99911 07	4 41	2·75	0·99989 94	57	3·15	0·99999 16	5
2·36	0·99915 48	4 20	2·76	0·99990 51	54	3·16	0·99999 21	5
2·37	0·99919 68	4 01	2·77	0·99991 05	51	3·17	0·99999 26	5
2·38	0·99923 69	3 82	2·78	0·99991 56	48	3·18	0·99999 31	5
2·39	0·99927 51	3 64	2·79	0·99992 04	46	3·19	0·99999 36	4
2·40	0·99931 15	3 47	2·80	0·99992 50	43	3·20	0·99999 40	4
2·41	0·99934 62	3 31	2·81	0·99992 93	41	3·21	0·99999 44	3
2·42	0·99937 93	3 15	2·82	0·99993 34	38	3·22	0·99999 47	4
2·43	0·99941 08	3·00	2·83	0·99993 72	37	3·23	0·99999 51	3
2·44	0·99944 08	2 86	2·84	0·99994 09	34	3·24	0·99999 54	3
2·45	0·99946 94	2 72	2·85	0·99994 43	33	3·25	0·99999 57	3
2·46	0·99949 66	2 60	2·86	0·99994 76	31	3·26	0·99999 60	2
2·47	0·99952 26	2 46	2·87	0·99995 07	29	3·27	0·99999 62	3
2·48	0·99954 72	2 35	2·88	0·99995 36	27	3·28	0·99999 65	2
2·49	0·99957 07	2 23	2·89	0·99995 63	26	3·29	0·99999 67	2
2·50	0·99959 30	2 13	2·90	0·99995 89	24	3·30	0·99999 69	2
2·51	0·99961 43	2 02	2·91	0·99996 13	23	3·31	0·99999 71	2
2·52	0·99963 45	1 92	2·92	0·99996 36	22	3·32	0·99999 73	2
2·53	0·99965 37	1 83	2·93	0·99996 58	21	3·33	0·99999 75	2
2·54	0·99967 20	1 73	2·94	0·99996 79	19	3·34	0·99999 77	1
2·55	0·99968 93	1 65	2·95	0·99996 98	18	3·35	0·99999 78	2
2·56	0·99970 58	1 57	2·96	0·99997 16	17	3·36	0·99999 80	1
2·57	0·99972 15	1 49	2·97	0·99997 33	17	3·37	0·99999 81	1
2·58	0·99973 64	1 41	2·98	0·99997 50	15	3·38	0·99999 82	2
2·59	0·99975 05	1 35	2·99	0·99997 65	14	3·39	0·99999 84	1
2·60	0·99976 40	1 27	3·00	0·99997 79	14	3·40	0·99999 85	1
2·61	0·99977 67	1 21	3·01	0·99997 93	12	3·41	0·99999 86	1
2·62	0·99978 88	1 15	3·02	0·99998 05	12	3·42	0·99999 87	1
2·63	0·99980 03	1 09	3·03	0·99998 17	12	3·43	0·99999 88	1
2·64	0·99981 12	1 03	3·04	0·99998 29	10	3·44	0·99999 89	0

$a h$	$\Phi(a h)$	$a h$	$\Phi(a h)$	$a h$	$\Phi(a h)$
3·45	0·99999 89	3·65	0·999999 75551	3·85	0·999999 94812
3·46	0·999999 00780	3·66	0·999999 77333	3·86	0·999999 95208
3·47	0·999999 07672	3·67	0·999999 78990	3·87	0·999999 95575
3·48	0·999999 14101	3·68	0·999999 80528	3·88	0·999999 95915
3·49	0·999999 20097	3·69	0·999999 81957	3·89	0·999999 96230
3·50	0·999999 25691	3·70	0·999999 83285	3·90	0·999999 96521
3·51	0·999999 30905	3·71	0·999999 84517	3·91	0·999999 96790
3·52	0·999999 35766	3·72	0·999999 85663	3·92	0·999999 97039
3·53	0·999999 40296	3·73	0·999999 86726	3·93	0·999999 97260
3·54	0·999999 44519	3·74	0·999999 87712	3·94	0·999999 97482
3·55	0·999999 48452	3·75	0·999999 88629	3·95	0·999999 97678
3·56	0·999999 52115	3·76	0·999999 89477	3·96	0·999999 97860
3·57	0·999999 55527	3·77	0·999999 90265	3·97	0·999999 9[illegible]028
3·58	0·999999 58703	3·78	0·999999 90995	3·98	0·999999 98183
3·59	0·999999 61661	3·79	0·999999 91672	3·99	0·999999 98327
3·60	0·999999 64414	3·80	0·999999 92300	4·00	0·999999 98458
3·61	0·999999 66975	3·81	0·999999 92881	4·10	0·999999 99330
3·62	0·999999 69358	3·82	0·999999 93421	4·20	0·999999 99714
3·63	0·999999 71574	3·83	0·999999 93921	4·30	0·999999 99881
3·64	0·999999 73636	3·84	0·999999 94383	4·40	0·999999 99951
				4·50	0·999999 99960
				4·60	0·999999 99992
				4·70	0·999999 99997
				4·80	0·999999 99999

Tabelle II.

Werte der Funktion $\Phi\left(\varrho \frac{a}{r}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho \frac{a}{r}} e^{-t^2} dt$,

geordnet nach dem Argumente $\frac{a}{r}$.

$\frac{a}{r}$	$\Phi\left(\varrho \frac{a}{r}\right)$	Diff.	$\frac{a}{r}$	$\Phi\left(\varrho \frac{a}{r}\right)$	Diff.	$\frac{a}{r}$	$\Phi\left(\varrho \frac{a}{r}\right)$	Diff.
0·00	0·00000	538	0·30	0·16035	527	0·60	0·31430	495
0·01	0·00538	538	0·31	0·16562	526	0·61	0·31925	494
0·02	0·01076	538	0·32	0·17088	526	0·62	0·32419	492
0·03	0·01614	538	0·33	0·17614	524	0·63	0·32911	491
0·04	0·02152	538	0·34	0·18138	524	0·64	0·33402	490
0·05	0·02690	538	0·35	0·18662	523	0·65	0·33892	488
0·06	0·03228	538	0·36	0·19185	522	0·66	0·34380	486
0·07	0·03766	537	0·37	0·19707	522	0·67	0·34866	486
0·08	0·04303	537	0·38	0 20229	520	0·68	0·35352	483
0·09	0·04840	538	0·39	0·20749	519	0·69	0·35835	482
0·10	0·05378	536	0·40	0·21268	519	0·70	0·36317	481
0·11	0·05914	537	0·41	0·21787	517	0·71	0·36798	479
0·12	0·06451	536	0·42	0·22304	517	0·72	0·37277	478
0·13	0·06987	536	0·43	0·22821	515	0·73	0·37755	476
0·14	0·07523	536	0·44	0·23336	515	0·74	0·38231	474
0·15	0·08059	535	0·45	0·23851	513	0·75	0·38705	473
0·16	0·08594	535	0·46	0·24364	512	0·76	0·39178	471
0·17	0·09129	534	0·47	0·24876	512	0·77	0·39649	469
0·18	0·09663	534	0·48	0·25388	510	0·78	0·40118	468
0·19	0·10197	534	0·49	0·25898	509	0·79	0·40586	466
0·20	0·10731	533	0·50	0·26407	508	0·80	0·41052	465
0·21	0·11264	532	0·51	0·26915	506	0·81	0·41517	462
0·22	0·11796	532	0·52	0·27421	506	0·82	0·41979	461
0·23	0·12328	532	0·53	0·27927	504	0·83	0·42440	459
0·24	0·12860	531	0·54	0·28431	503	0·84	0·42899	458
0·25	0·13391	530	0·55	0·28934	502	0·85	0·43357	456
0·26	0·13921	530	0·56	0·29436	500	0·86	0·43818	454
0·27	0·14451	529	0·57	0·29936	499	0·87	0·44267	452
0·28	0·14980	528	0·58	0·30435	498	0·88	0·44719	450
0·29	0·15508	527	0·59	0·30933	497	0·89	0·45169	449

$\frac{a}{r}$	$\Phi\left(\varrho\frac{a}{r}\right)$	Diff.	$\frac{a}{r}$	$\Phi\left(\varrho\frac{a}{r}\right)$	Diff.	$\frac{a}{r}$	$\Phi\left(\varrho\frac{a}{r}\right)$	Diff.
0·90	0·45618	446	1·30	0·61942	366	1·70	0·74847	277
0·91	0·46064	445	1·31	0·62308	363	1·71	0·75124	276
0·92	0·46509	443	1·32	0·62671	361	1·72	0·75400	274
0·93	0·46952	441	1·33	0·63032	359	1·73	0·75674	271
0·94	0·47393	439	1·34	0·63391	356	1·74	0·75945	269
0·95	0·47832	438	1·35	0·63747	355	1·75	0·76214	267
0·96	0·48270	435	1·36	0·64102	352	1·76	0·76481	265
0·97	0·48605	434	1·37	0·64454	350	1·77	0·76746	263
0·98	0·49139	431	1·38	0·64804	348	1·78	0·77009	261
0·99	0·49570	430	1·39	0·65152	346	1·79	0·77270	258
1·00	0·50000	428	1·40	0·65498	343	1·80	0·77528	257
1·01	0·50428	425	1·41	0·65841	341	1·81	0·77785	254
1·02	0·50853	424	1·42	0·66182	339	1·82	0·78039	252
1·03	0·51277	422	1·43	0·66521	337	1·83	0·78291	251
1·04	0·51699	420	1·44	0·66858	335	1·84	0·78542	248
1·05	0·52119	418	1·45	0·67193	333	1·85	0·78790	246
1·06	0·52537	415	1·46	0·67526	330	1·86	0·79036	244
1·07	0·52952	414	1·47	0·67856	328	1·87	0·79280	242
1·08	0·53366	412	1·48	0·68184	326	1·88	0·79522	239
1·09	0·53778	410	1·49	0·68510	323	1·89	0·79761	238
1·10	0·54188	407	1·50	0·68833	322	1·90	0·79999	236
1·11	0·54595	406	1·51	0·69155	319	1·91	0·80235	234
1·12	0·55001	403	1·52	0·69474	317	1·92	0·80469	231
1·13	0·55404	402	1·53	0·69791	315	1·93	0·80700	230
1·14	0·55806	399	1·54	0·70106	313	1·94	0·80930	228
1·15	0·56205	397	1·55	0·70419	310	1·95	0·81158	225
1·16	0·56602	396	1·56	0·70729	309	1·96	0·81383	224
1·17	0·56998	393	1·57	0·71038	306	1·97	0·81607	221
1·18	0·57391	391	1·58	0·71344	304	1·98	0·81828	220
1·19	0·57782	389	1·59	0·71648	301	1·99	0·82048	218
1·20	0·58171	387	1·60	0·71949	300	2·00	0·82261	215
1·21	0·58558	384	1·61	0·72249	297	2·01	0·82481	214
1·22	0·58942	383	1·62	0·72546	295	2·02	0·82695	212
1·23	0·59325	380	1·63	0·72841	293	2·03	0·82907	210
1·24	0·59705	378	1·64	0·73134	291	2·04	0·83117	207
1·25	0·60083	377	1·65	0·73425	289	2·05	0·83324	206
1·26	0·60460	373	1·66	0·73714	286	2·06	0·83530	204
1·27	0·60833	372	1·67	0·74000	285	2·07	0·83734	202
1·28	0·61205	370	1·68	0·74285	282	2·08	0·83936	201
1·29	0·61575	367	1·69	0·74567	280	2·09	0·84137	198

$\frac{a}{r}$	$\Phi\left(\varrho \frac{a}{r}\right)$	Diff.	$\frac{a}{r}$	$\Phi\left(\varrho \frac{a}{r}\right)$	Diff.	$\frac{a}{r}$	$\Phi\left(\varrho \frac{a}{r}\right)$	Diff.
2·10	0·84330	196	2·50	0·90825	129	2·90	0·94954	79
2·11	0·84531	195	2·51	0·90954	128	2·91	0·95033	78
2·12	0·84726	193	2·52	0·91082	126	2·92	0·95111	76
2·13	0·84919	190	2·53	0·91208	124	2·93	0·95187	76
2·14	0·85109	189	2·54	0·91332	124	2·94	0·95263	75
2·15	0·85298	188	2·55	0·91456	122	2·95	0·95338	74
2·16	0·85486	185	2·56	0·91578	120	2·96	0·95412	73
2·17	0·85671	183	2·57	0·91698	119	2·97	0·95485	72
2·18	0·85854	182	2·58	0·91817	118	2·98	0·95557	71
2·19	0·86036	180	2·59	0·91935	116	2·99	0·95628	70
2·20	0·86216	178	2·60	0·92051	115	3·00	0·95698	69
2·21	0·86394	176	2·61	0·92166	114	3·01	0·95767	68
2·22	0·86570	175	2·62	0·92280	112	3·02	0·95835	67
2·23	0·86745	172	2·63	0·92392	111	3·03	0·95902	66
2·24	0·86917	171	2·64	0·92503	110	3·04	0·95968	65
2·25	0·87088	170	2·65	0·92613	108	3·05	0·96033	65
2·26	0·87258	167	2·66	0·92721	107	3·06	0·96098	63
2·27	0·87425	166	2·67	0·92828	106	3·07	0·96161	63
2·28	0·87591	164	2·68	0·92934	104	3·08	0·96224	62
2·29	0·87755	163	2·69	0·93038	103	3·09	0·96286	60
2·30	0·87918	160	2·70	0·93141	102	3·10	0·96346	60
2·31	0·88078	159	2·71	0·93243	101	3·11	0·96406	60
2·32	0·88237	158	2·72	0·93344	99	3·12	0·96466	58
2·33	0·88395	155	2·73	0·93443	98	3·13	0·96524	58
2·34	0·88550	155	2·74	0·93541	97	3·14	0·96582	56
2·35	0·88705	152	2·75	0·93638	96	3·15	0·96638	56
2·36	0·88857	151	2·76	0·93734	94	3·16	0·96694	55
2·37	0·89008	149	2·77	0·93828	94	3·17	0·96749	55
2·38	0·89157	147	2·78	0·93922	92	3·18	0·96804	53
2·39	0·89304	146	2·79	0·94014	91	3·19	0·96857	53
2·40	0·89450	145	2·80	0·94105	90	3·20	0·96910	52
2·41	0·89595	143	2·81	0·94195	89	3·21	0·96962	51
2·42	0·89738	141	2·82	0·94284	87	3·22	0·97013	51
2·43	0·89879	140	2·83	0·94371	87	3·23	0·97064	50
2·44	0·90019	138	2·84	0·94458	85	3·24	0·97114	49
2·45	0·90157	136	2·85	0·94543	84	3·25	0·97163	48
2·46	0·90293	135	2·86	0·94627	84	3·26	0·97211	48
2·47	0·90428	134	2·87	0·94711	82	3·27	0·97259	47
2·48	0·90562	132	2·88	0·94793	81	3·28	0·97306	46
2·49	0·90694	131	2·89	0·94874	80	3·29	0·97352	45

$\frac{a}{r}$	$\Phi\left(\varrho\frac{a}{r}\right)$	Diff.	$\frac{a}{r}$	$\Phi\left(\varrho\frac{a}{r}\right)$	Diff.	$\frac{a}{r}$	$\Phi\left(\varrho\frac{a}{r}\right)$	Diff.
3·30	0·97397	45	3·40	0·97817	359	4·40	0·99700	60
3·31	0·97442	44	3·50	0·98176	306	4·50	0·99760	48
3·32	0·97486	44	3·60	0·98482	261	4·60	0·99808	40
3·33	0·97530	43	3·70	0·98743	219	4·70	0·99848	31
3·34	0·97573	42	3·80	0·98962	185	4·80	0·99879	26
3·35	0·97615	42	3·90	0·99147	155	4·90	0·99905	21
3·36	0·97657	41	4·00	0·99302	129	5·00	0·99926	16
3·37	0·97698	40	4·10	0·99431	108	5·10	0·99942	13
3·38	0·97738	40	4·20	0·99539	88	5·20	0·99955	10
3·39	0·97778	39	4·30	0·99627	73	5·30	0·99965	

Tabelle III.

Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers zwischen den Grenzen Null und dem *k*-fachen wahrscheinlichen Fehler.

k	0·00	0·01	0·02	0·03	0·04	0·05	0·06	0·07	0·08	0·09	Diff.
0·0	0·0000	0·0054	0·0108	0·0161	0·0215	0·0269	0·0323	0·0377	0·0430	0·0484	54
0·1	0538	0591	0645	0699	0752	0806	0859	0913	0966	1020	53
0·2	1073	1126	1180	1233	1286	1339	1392	1445	1498	1551	52
0·3	1603	1656	1709	1761	1814	1866	1918	1971	2023	2075	52
0·4	2127	2179	2230	2282	2334	2385	2436	2488	2539	2590	51
0·5	0·2641	0·2691	0·2742	0·2793	0·2843	0·2893	0·2944	0·2994	0·3043	0·3093	50
0·6	3143	3192	3242	3291	3340	3389	3438	3487	3535	3583	49
0·7	3632	3680	3728	3775	3823	3870	3918	3965	4012	4059	46
0·8	4105	4152	4198	4244	4290	4336	4381	4427	4472	4517	45
0·9	4562	4606	4651	4695	4739	4783	4827	4860	4914	4957	43
1·0	0·5000	0·5043	0·5085	0·5128	0·5170	0·5212	0·5254	0·5295	0·5337	0·5378	41
1·1	5419	5460	5500	5540	5581	5620	5660	5700	5739	5778	39
1·2	5817	5856	5894	5932	5970	6008	6046	6083	6120	6157	37
1·3	6194	6231	6267	6303	6339	6375	6410	6445	6480	6515	35
1·4	6550	6584	6618	6652	6686	6719	6753	6786	6818	6851	32
1·5	0·6883	0·6915	0·6947	0·6979	0·7011	0·7042	0·7073	0·7104	0·7134	0·7165	30
1·6	7195	7225	7255	7284	7313	7342	7371	7400	7428	7457	28
1·7	7485	7512	7540	7567	7594	7621	7648	7675	7701	7727	26
1·8	7753	7778	7804	7829	7854	7879	7904	7928	7952	7976	24
1·9	8000	8023	8047	8070	8093	8116	8138	8161	8183	8205	22
2·0	0·8227	0·8248	0·8270	0·8291	0·8312	0·8332	0·8353	0·8373	0·8394	0·8414	19
2·1	8433	8453	8473	8492	8511	8530	8549	8567	8585	8604	18
2·2	8622	8639	8657	8674	8692	8709	8726	8742	8759	8775	17
2·3	8792	8808	8824	8840	8855	8870	8886	8901	8916	8930	15
2·4	8945	8960	8974	8988	9002	9016	9029	9043	9056	9069	13
2·5	0·9082	0·9095	0·9108	0·9121	0·9133	0·9146	0·9158	0·9170	0·9182	0·9193	12
2·6	9205	9217	9228	9239	9250	9261	9272	9283	9293	9304	10
2·7	9314	9324	9334	9344	9354	9364	9373	9383	9392	9401	9
2·8	9410	9419	9428	9437	9446	9454	9463	9471	9479	9487	8
2·9	9495	9503	9511	9519	9526	9534	9541	9548	9556	9563	7
3·0	0·9570	0·9577	0·9583	0·9590	0·9597	0·9603	0·9610	0·9616	0·9622	0·9629	6
3·1	9635	9641	9647	9652	9658	9664	9669	9675	9680	9686	5
3·2	9691	9696	9701	9706	9711	9716	9721	9726	9731	9735	5
3·3	9740	9744	9749	9753	9757	9761	9766	9770	9774	9778	4
3·4	9782	9786	9789	9793	9797	9800	9804	9807	9811	9814	4
3·5	0·9818	0·9821	0·9824	0·9827	0·9830	0·9833	0·9837	0·9840	0·9842	0 9845	3
3·6	9848	9851	9854	9856	9859	9862	9864	9867	9869	9872	2
3·7	9874	9877	9879	9881	9884	9886	9888	9890	9892	9894	2
3·8	9896	9898	9900	9902	9904	9906	9908	9909	9911	9913	2
3·9	9915	9916	9918	9920	9921	9923	9924	9926	9927	9929	1
4·0	9930	9932	9933	9934	9936	9937	9938	9939	9941	9942	1
4·1	9943	9944	9945	9947	9948	9949	9950	9951	9952	9953	1

k=	4·1	4·2	4·3	4·4	4·5	4·6	4·7	4·8	4·9	5·0
P=	0·9943	0·9954	0·9963	0·9970	0·9976	0·9981	0·9985	0·9988	0·9991	0·9993

Tabelle IV.

Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers zwischen den Grenzen Null und dem *k*-fachen mittleren Fehler.

k	0·00	0·01	0·02	0·03	0·04	0·05	0·06	0·07	0·08	0·09	Diff.
0·0	0·0000	0·0080	0·0159	0·0239	0·0319	0·0399	0·0478	0·0558	0·0637	0·0717	80
0·1	0797	0876	0955	1034	1113	1192	1271	1350	1428	1507	78
0·2	1585	1663	1741	1819	1897	1974	2051	2128	2205	2282	76
0·3	2358	2434	2510	2586	2661	2737	2812	2886	2960	3035	73
0·4	3108	3182	3255	3328	3401	3473	3545	3616	3688	3759	70
0·5	0·3829	0·3900	0·3969	0·4039	0·4108	0·4177	0·4245	0·4313	0·4381	0·4448	67
0·6	4515	4581	4647	4713	4778	4843	4908	4971	5035	5098	63
0·7	5161	5223	5285	5346	5407	5467	5527	5587	5746	5705	58
0·8	5763	5821	5878	5935	5991	6047	6090	6157	6211	6265	54
0·9	6319	6372	6424	6476	6528	6579	6629	6680	6729	6778	49
1·0	0·6827	0·6875	0·6923	0·6970	0·7016	0·7063	0·7109	0·7154	0·7198	0·7243	44
1·1	7287	7330	7373	7415	7457	7498	7539	7580	7620	7660	39
1·2	7699	7737	7775	7813	7850	7887	7923	7959	7994	8030	34
1·3	8064	8098	8132	8165	8197	8229	8262	8293	8324	8355	30
1·4	8385	8415	8444	8473	8501	8529	8557	8584	8611	8638	26
1·5	0·8664	0·8689	0·8715	0·8740	0·8764	0·8789	0·8812	0·8836	0·8859	0·8882	22
1·6	8904	8926	8948	8969	8990	9011	9031	9051	9070	9090	19
1·7	9109	9127	9146	9164	9181	9199	9216	9233	9249	9266	15
1·8	9281	9297	9312	9328	9342	9357	9371	9385	9399	9412	14
1·9	9426	9439	9451	9464	9476	9488	9500	9518	9533	9534	11
2·0	0·9545	0·9556	0·9566	0·9576	0·9586	0·9596	0·9606	0·9616	0·9625	0·9634	9
2·1	9643	9651	9660	9668	9676	9684	9692	9700	9707	9715	7
2·2	9722	9729	9736	9742	9749	9756	9762	9768	9774	9780	5
2·3	9785	9791	9797	9802	9807	9812	9817	9822	9827	9832	4
2·4	9836	9840	9845	9849	9853	9867	9861	9865	9869	9872	4
2·5	0·9876	0·9879	0·9883	0·9886	0·9889	0·9892	0·9895	0·9898	0·9901	0·9904	3
2·6	9907	9909	9912	9915	9917	9920	9922	9924	9926	9928	3
2·7	9931	9933	9935	9937	9939	9940	9942	9944	9946	9947	2
2·8	9949	9950	9952	9953	9955	9956	9958	9959	9960	9961	2
2·9	9963	9964	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	1
k =	3·0	3·1	3·2	3·3	3·4	3·5	3·6	3·7	3·8	3·9	
P =	0·9973	0·9981	0·9986	0·9990	0·9993	0·9995	0·9997	0·9998	0·9999	0·9999	
k =	4·0	4·1								*k* = ∞	
P =	0·9999	0·9999								*P* = 1	

Tabelle V.

Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers zwischen den Grenzen Null und dem *k*-fachen durchschnittlichen Fehler.

$\frac{a}{\vartheta}=k$	$\Phi(k\vartheta)$	$\frac{a}{\vartheta}=k$	$\Phi(k\vartheta)$	$\frac{a}{\vartheta}=k$	$\Phi(k\vartheta)$	$\frac{a}{\vartheta}=k$	$\Phi(k\vartheta)$
0·00	0·00000	0·44	0·27445	0·88	0·51730	1·64	0·80929
0·01	00064	0·45	28044	0·89	52236	1·66	81465
0·02	01273	0·46	28640	0·90	52729	1·68	81989
0·03	01910	0·47	29234	0·91	53219	1·70	82502
0·04	02546	0·48	29827	0·92	53708	1·72	83005
0·05	03182	0·49	30417	0·93	54192	1·74	83495
0·06	03818	0·50	31006	0·94	54675	1·76	83975
0·07	04454	0·51	31593	0·95	55153	1·78	84445
0·08	05089	0·52	32178	0·96	55630	1·80	84904
0·09	05724	0·53	32762	0·97	56102	1·82	85424
0·10	06359	0·54	33343	0·98	56574	1·84	85792
0·11	06994	0·55	33932	0·99	57042	1·86	86221
0·12	07628	0·56	34499	1·00	57506	1·88	86638
0·13	08261	0·57	35074	1·02	58425	1·90	87047
0·14	08894	0·58	35647	1·04	59334	1·92	87444
0·15	09526	0·59	36217	1·06	60231	1·94	87884
0·16	10158	0·60	36786	1 08	61115	1·96	88213
0·17	10789	0·61	37353	1·10	61988	1·98	88584
0·18	11419	0·62	37918	1·12	62848	2·00	88945
0·19	12049	0·63	38479	1·14	63695	2·05	89808
0·20	12678	0·64	39140	1·16	64531	2·10	90617
0·21	13307	0·65	39597	1·18	65354	2·15	91373
0·22	13934	0·66	40153	1·20	66146	2·20	92079
0·23	14561	0·67	40706	1·22	66965	2·25	92738
0·24	15186	0·68	41256	1·24	67752	2·30	93351
0·25	15811	0·69	41805	1·26	68526	2·35	93920
0·26	16434	0·70	42350	1·28	69287	2·40	94449
0·27	17057	0·71	42894	1·30	70037	2·45	94939
0·28	17678	0·72	43435	1·32	70775	2·50	95395
0·29	18298	0·73	43974	1·34	71499	2·55	95811
0·30	18917	0·74	44509	1·36	72212	2·60	96196
0·31	19445	0·75	45043	1·38	72913	2·65	96552
0·32	20153	0·76	45574	1·40	73602	2·70	96878
0·33	20768	0·77	46103	1·42	74278	2·75	97177
0·34	21382	0·78	46629	1·44	74941	2·80	97443
0·35	21985	0·79	47151	1·46	75593	2·85	97703
0·36	22606	0·80	47672	1·48	76233	2·90	97932
0·37	23216	0·81	48190	1·50	76862	2·95	98141
0·38	23825	0·82	48706	1·52	77478	3·00	98331
0·39	24434	0·83	49218	1·54	78083	3·10	98662
0·40	25038	0·84	49727	1·56	78676	3·20	98932
0·41	25643	0·85	50235	1·58	79256	3·30	99211
0·42	26245	0·86	50739	1·60	79825	3·40	99333
0·43	26846	0·87	51242	1·62	80383	3·50	99477

Tabelle VI.

Werte der Funktionen $F(\zeta)=\frac{\varrho}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\zeta} e^{-\varrho^2\zeta^2}\,d\zeta$,

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\varrho^2}\frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)}=\frac{1}{2\varrho\sqrt{\pi}}\frac{e^{-\varrho^2\zeta^2}}{F(\zeta)} \text{ und } f'(\zeta)=-2\varrho^2 f(\zeta)\{\zeta+f(\zeta)\}$$

für die Argumentenwerte $-5<-\zeta<0<+\zeta<+5$.

$-\zeta$	$F(-\zeta)$	$f(-\zeta)$	$-f'(-\zeta)$	ζ	$F(\zeta)$	$f(\zeta)$	$-f'(\zeta)$
— 5·0	0·0004	5·37	0·92	0·0	0·500	1·18	0·64
— 4·9	0·001	5·28	0·92	0·1	0·527	1·12	0·62
— 4·8	0·001	5·19	0·92	0·2	0·554	1·06	0·61
— 4·7	0·001	5·10	0·92	0·3	0·580	1·00	0·59
— 4·6	0·001	5·00	0·92	0·4	0·606	0·94	0·57
— 4·5	0·001	4·91	0·92	0·5	0·632	0·88	0·55
— 4·4	0·002	4·82	0·92	0·6	0·657	0·83	0·54
— 4·3	0·002	4·73	0·92	0·7	0·682	0·78	0·52
— 4·2	0·002	4·64	0·91	0·8	0·705	0·73	0·51
— 4·1	0·003	4·55	0·91	0·9	0·728	0·68	0·49
— 4·0	0·003	4·45	0·91	1·0	0·750	0·63	0·47
— 3·9	0·004	4·36	0·91	1·1	0·771	0·58	0·45
— 3·8	0·005	4·27	0·91	1·2	0·791	0·54	0·43
— 3·7	0·006	4·18	0·91	1·3	0·810	0·50	0·41
— 3·6	0·008	4·09	0·90	1·4	0·827	0·46	0·39
— 3·5	0·009	4·00	0·90	1·5	0·844	0·42	0·37
— 3·4	0·011	3·91	0·90	1·6	0·860	0·38	0·35
— 3·3	0·013	3·82	0·89	1·7	0·874	0·35	0·33
— 3·2	0·015	3·73	0·89	1·8	0·888	0·32	0·31
— 3·1	0·018	3·64	0·89	1·9	0·900	0·29	0·29
— 3·0	0·022	3·55	0·89	2·0	0·911	0·26	0·27
— 2·9	0·025	3·46	0·88	2·1	0·922	0·24	0·25
— 2·8	0·029	3·37	0·88	2·2	0·931	0·21	0·23
— 2·7	0·034	3·28	0·88	2·3	0·940	0·19	0·21
— 2·6	0·040	3·19	0·87	2·4	0·947	0·17	0·20
— 2·5	0·046	3·11	0·87	2·5	0·954	0·15	0·18
— 2·4	0·053	3·02	0·86	2·6	0·960	0·13	0·16
— 2·3	0·060	2·94	0·86	2·7	0·966	0·12	0·15
— 2·2	0·069	2·85	0·85	2·8	0·971	0·10	0·13
— 2·1	0·078	2·77	0·84	2·9	0·975	0·09	0·12

$-\zeta$	$F(-\zeta)$	$f(-\zeta)$	$-f'(-\zeta)$	ζ	$F(\zeta)$	$f(\zeta)$	$-f'(\zeta)$
—2·0	0·089	2·69	0·84	3·0	0·978	0·08	0·11
—1·9	0·100	2·60	0·83	3·1	0·982	0·07	0·10
—1·8	0·112	2·52	0·82	3·2	0·985	0·06	0·09
—1·7	0·126	2·44	0·81	3·3	0·987	0·05	0·08
—1·6	0·140	2·36	0·81	3·4	0·989	0·04	0·07
—1·5	0·156	2·28	0·80	3·5	0·991	0·04	0·06
—1·4	0·173	2·20	0·79	3·6	0·992	0·03	0·05
—1·3	0·190	2·12	0·79	3·7	0·994	0·03	0·04
—1·2	0·209	2·04	0·78	3·8	0·995	0·02	0·04
—1·1	0·229	1·96	0·77	3·9	0·996	0·02	0·03
—1·0	0·250	1·88	0·76	4·0	0·997	0·02	0·03
—0·9	0·272	1·81	0·75	4·1	0·997	0·02	0·03
—0·8	0·295	1·73	0·74	4·2	0·998	0·01	0·02
—0·7	0·318	1·66	0·73	4·3	0·998	0·01	0·02
—0·6	0·343	1·59	0·72	4·4	0·998	0·01	0·02
—0·5	0·368	1·52	0·70	4·5	0·999	0·01	0·01
—0·4	0·394	1·45	0·69	4·6	0·999	0·01	0·01
—0·3	0·420	1·38	0·68	4·7	0·999	0·004	0·01
—0·2	0·446	1 31	0·67	4·8	0·999	0·003	0·01
—0·1	0·473	1·25	0·65	4·9	0·999	0·003	0·01
—0·0	0·500	1·18	0·64	5·0	0·9996	0·002	0·005

Tabelle VII.

Quadrate der Zahlen von 10 bis 99.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
20	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
30	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
40	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
50	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
60	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
70	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
80	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
90	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Tabelle VIII.

Quadratwurzeln der Zahlen von 0·1 bis 9·9.

n	0·0	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9
0		0·316	0·447	0·548	0·632	0·707	0·775	0·837	0·894	0·949
1	1	1·049	1·095	1·140	1·183	1·225	1·265	1·304	1·342	1·378
2	1·414	1·449	1·483	1·517	1·549	1·581	1·612	1·643	1·673	1·703
3	1·732	1·761	1·789	1·817	1·844	1·871	1·897	1·924	1·949	1·975
4	2	2·025	2·049	2·074	2·098	2·121	2·145	2·168	2·191	2·214
5	2·236	2·258	2·280	2·302	2·324	2·345	2·366	2·387	2·408	2·429
6	2·449	2·470	2·490	2·510	2·530	2·550	2·569	2·588	2·608	2·627
7	2·646	2·665	2·683	2·702	2·720	2·739	2·757	2·775	2·793	2·811
8	2·828	2·846	2·864	2·881	2·898	2·915	2·933	2·950	2·966	2·983
9	3	3·017	3·033	3·050	3·066	3·082	3·098	3·114	3·130	3·146

Tabelle IX.

Quadratwurzeln der Zahlen 10 bis 100.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	3·162	3·317	3·464	3·606	3·742	3·873	4	4·123	4·243	4·359
20	4·472	4·583	4·690	4·796	4·899	5	5·099	5·196	5·292	5·385
30	5·477	5·568	5·657	5·745	5·831	5·916	6	6·083	6·164	6·245
40	6·325	6·403	6·481	6·557	6·633	6·708	6·782	6·856	6·928	7
50	7·071	7·141	7·211	7·280	7·348	7·416	7·483	7·550	7·616	7·681
60	7·746	7·810	7·874	7·937	8	8·062	8·124	8·185	8·246	8·307
70	8·367	8·426	8·485	8·544	8·602	8·660	8·718	8·775	8·832	8·888
80	8·944	9	9·055	9·110	9·165	9·220	9·274	9·327	9·381	9·434
90	9·487	9·539	9·592	9·644	9·695	9·747	9·798	9·849	9·899	9·950